ארכימדס
בכיוון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472
כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק א'
הוצאת ארכימדס
שאלון 472
הפונקציה הלוגוריתמית
הגדרת הלוגוריתם

הוצאת ארכימדס
שאלון 472

הפונקציה הלוגוריתמית
הגדרת הלוגוריתם

הגדרת הלוגריתם

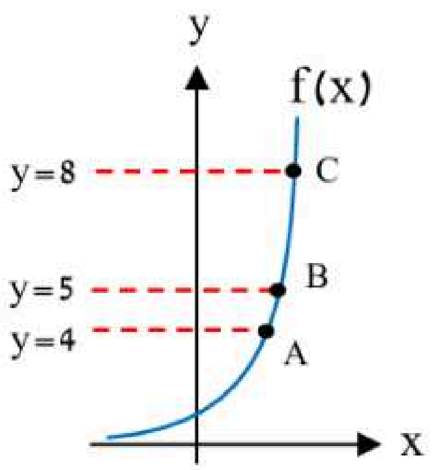
1. נתונות שלוש המשוואות: $2^x = 8$, $2^x = 5$, $2^x = 4$.

א. נסו לפתור את המשוואות. האם נתקלתם בקושי באחת מהן? הסבירו.

ב. עילאי טוען: "5 אינו חזקה של 2, ולכן לדעתי למשוואה $2^x = 5$ **אין פתרון**."

רז שרטט משמאל את הגרף של הפונקציה $f(x) = 2^x$ והוסיף את הישרים $y = 4$, $y = 5$ ו־$y = 8$ אשר חותכים את גרף הפונקציה בנקודות A, B ו־C בהתאמה. רז טוען: "הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x) = 2^x$, ולכן ניתן לקבוע שלמשוואה $2^x = 5$ **יש פתרון**."

מי מהשניים צודק? הסבירו.



ג. מצאו את שיעורי הנקודות A ו־C, והסבירו מה ניתן להסיק על שיעור ה־x של הנקודה B.

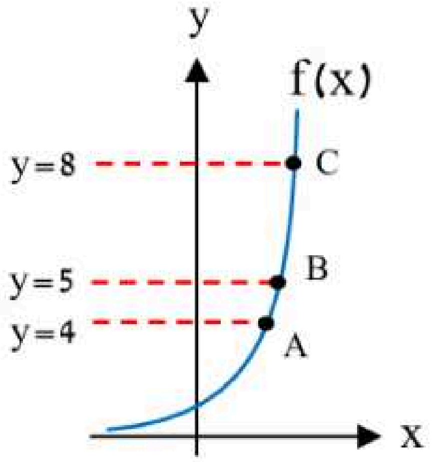
ד. הציבו במשוואה $2^x = 5$ את הערך $x = 2.322$, והראו שהוא קרוב מאוד להיות פתרון המשוואה.

הגדרת הלוגריתם

1. נתונות שלוש המשוואות: $2^x = 8$, $2^x = 5$, $2^x = 4$.

א. נסו לפתור את המשוואות. האם נתקלתם בקושי באחת מהן? הסבירו.

ב. עילאי טוען: "5 אינו חזקה של 2, ולכן לדעתי למשוואה $2^x = 5$ **אין פתרון**."



רז שרטט משמאל את הגרף של הפונקציה $f(x) = 2^x$ והוסיף את הישרים $y = 4$, $y = 5$ ו־$y = 8$ אשר חותכים את גרף הפונקציה בנקודות A, B ו־C בהתאמה. רז טוען: "הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x) = 2^x$, ולכן ניתן לקבוע שלמשוואה $2^x = 5$ **יש פתרון**."

מי מהשניים צודק? הסבירו.

ג. מצאו את שיעורי הנקודות A ו־C, והסבירו מה ניתן להסיק על שיעור ה־x של הנקודה B.

ד. הציבו במשוואה $2^x = 5$ את הערך $x = 2.322$, והראו שהוא קרוב מאוד להיות פתרון המשוואה.

תשובות: א. פתרון המשוואה $2^x = 8$ הוא x=3 , פתרון המשוואה $2^x = 4$ הוא x=2. לא למדנו כיצד לפתור את המשוואה $2^x = 5$.

הגדרת הלוגריתם

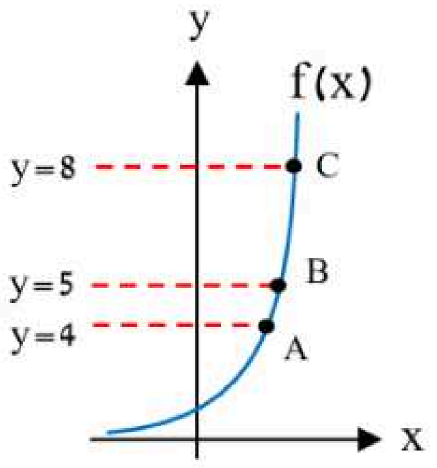
1. נתונות שלוש המשוואות: $2^x=8$, $2^x=5$, $2^x=4$.

א. נסו לפתור את המשוואות. האם נתקלתם בקושי באחת מהן? הסבירו.

ב. עילאי טוען: "5 אינו חזקה של 2, ולכן לדעתי למשוואה $2^x=5$ **אין פתרון**."

רז שרטט משמאל את הגרף של הפונקציה $f(x)=2^x$ והוסיף את הישרים $y=4$, $y=5$ ו־$y=8$ אשר חותכים את גרף הפונקציה בנקודות A, B ו־C בהתאמה. רז טוען: "הישר $y=5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)=2^x$, ולכן ניתן לקבוע שלמשוואה $2^x=5$ **יש פתרון**."

מי מהשניים צודק? הסבירו.



ג. מצאו את שיעורי הנקודות A ו־C, והסבירו מה ניתן להסיק על שיעור ה־x של הנקודה B.

ד. הציבו במשוואה $2^x=5$ את הערך $x=2.322$, והראו שהוא קרוב מאוד להיות פתרון המשוואה.

תשובות: א. פתרון המשוואה $2^x=8$ הוא x=3 , פתרון המשוואה $2^x=4$ הוא x=2. לא למדנו כיצד לפתור את המשוואה $2^x=5$. **ב.** רז צודק.

הגדרת הלוגריתם

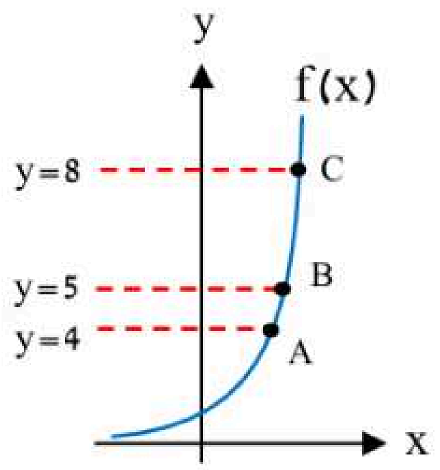
1. נתונות שלוש המשוואות: $2^x = 8$, $2^x = 5$, $2^x = 4$.

א. נסו לפתור את המשוואות. האם נתקלתם בקושי באחת מהן? הסבירו.

ב. עילאי טוען: "5 אינו חזקה של 2, ולכן לדעתי למשוואה $2^x = 5$ **אין פתרון**."

רז שרטט משמאל את הגרף של הפונקציה $f(x) = 2^x$ והוסיף את הישרים $y = 4$, $y = 5$ ו־$y = 8$ אשר חותכים את גרף הפונקציה בנקודות A, B ו־C בהתאמה. רז טוען: "הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x) = 2^x$, ולכן ניתן לקבוע שלמשוואה $2^x = 5$ **יש פתרון**."

מי מהשניים צודק? הסבירו.



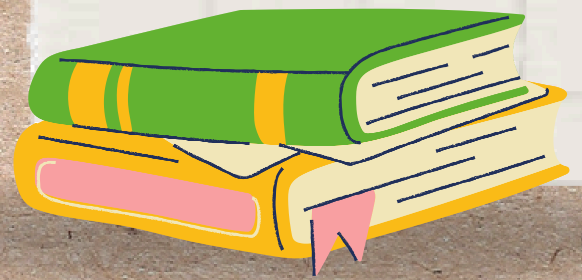
ג. מצאו את שיעורי הנקודות A ו־C, והסבירו מה ניתן להסיק על שיעור ה־x של הנקודה B.

ד. הציבו במשוואה $2^x = 5$ את הערך $x = 2.322$, והראו שהוא קרוב מאוד להיות פתרון המשוואה.

תשובות: ג. נשווה בין הפונקציות הנתונות, ונמצא את נקודות החיתוך A ו־C (2, 4)A (8, 3)C. נקודה B נמצאת בין הנקודות A ו־C, ולכן נוכל להסיק על שיעור ה־x שלה: $2 < x < 3$.

מהו הלוגריתם?

בשאלה הקודמת עסקנו במשוואה מעריכית שלא ניתן לפתור על ידי הצגת שני האגפים כחזקות בעלות אותו בסיס. כדי לפתור משוואות מסוג זה עלינו להכיר מונח מרכזי באלגברה - הלוגריתם.
במצגת זו נעסוק בהגדרת הלוגריתם ובחוקי הלוגריתם.
בהמשך נפתור בעזרתו משוואות שונות, וביניהן גם משוואות מעריכיות כמו המשוואה $2^x = 5$ שעסקנו בה בשאלה הקודמת.



מהו הלוגריתם?

תחילה נציג את **הגדרת הלוגריתם** בכתיב מתמטי: $log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$.

משמעות החץ הדו־כיווני היא שהטענה הימנית נובעת מהטענה השמאלית, וגם ההפך הוא נכון.

נשים לב ש**בסיס החזקה** a המופיע בטענה הימנית, הוא גם **בסיס הלוגריתם** בטענה השמאלית.

משמעות המשוואה $log_a x = b$ היא שהלוגריתם של המספר x לפי הבסיס a הוא המעריך b.

מהו הלוגריתם?

כאשר ננסה למצוא את הלוגריתם, נענה על השאלה:
"באיזו חזקה יש להעלות את a כדי לקבל את x?"
לדוגמה, אם $2^3 = 8$ אז $log_2 8 = 3$, ונוכל לומר שהלוגריתם של המספר 8 לפי הבסיס 2 הוא 3. המשמעות: **המעריך b** שיש להעלות בו את הבסיס 2 כדי לקבל את המספר 8 הוא 3. **מציאת הלוגריתם היא הפעולה ההפוכה לפעולת ההעלאה בחזקה**, ומתקיים: $log_a \left(a^b\right) = b$.
המספר b מייצג את מעריך החזקה, ולכן כאשר a חיובי ושונה מ־1, b עשוי לקבל כל ערך מספרי.

אילו מגבלות חלות על a ועל x בביטוי $log_a x$?

לפי הגדרת הלוגריתם הבסיס a מוכרח להיות **חיובי ושונה מ־1**.
העלאה של a בחזקה של מספר חיובי, שלילי, או 0, תניב ערך חיובי,
ולכן ערך ה־x המייצג חזקה של a מוכרח להיות **חיובי** גם כן.
כלומר, עבור a חיובי ושונה מ־1, תחום ההגדרה של הביטוי $log_a x$
הוא x>0.

מנקודה זו והלאה, לאחר הסברים, המצגת מפנה לתרגול בכרך א' של הספר בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472:

כעת נוכל לפתור את תרגילים 2-4 בעמוד 51.

הגדרת הלוגריתם

דוגמה: חשבו את ערך הלוגריתם $log_2 8$.

הגדרת הלוגריתם

דוגמה: חשבו את ערך הלוגריתם $log_2 8$.

פתרון: נוכל לחשב את ערך הלוגריתם בשתי דרכים:

דרך א': נציב במחשבון ונקבל את התשובה 3.

דרך ב': נוכל לחשב זאת גם בעל פה:

העלאה של 2 בחזקת 3 תניב את הערך 8, ולכן $log_2 8 = 3$.

כעת נוכל לפתור את תרגיל 5 בעמוד 51.

הגדרת הלוגריתם

6. א. חשבו כל אחד מהלוגריתמים: $\log_3 3$, $\log_4 4$, $\log_5 5$.

ב. איזו מסקנה ניתן להסיק לגבי ערך הלוגריתם מהסוג $\log_a a$ כאשר a חיובי ושונה מ־1? הסבירו.

הגדרת הלוגריתם

6. א. חשבו כל אחד מהלוגריתמים: $\log_3 3$, $\log_4 4$, $\log_5 5$.

ב. איזו מסקנה ניתן להסיק לגבי ערך הלוגריתם מהסוג $\log_a a$ כאשר a חיובי ושונה מ־1? הסבירו.

תשובות: א. כולם שווים ל־1.

הגדרת הלוגריתם

6. א. חשבו כל אחד מהלוגריתמים: $\log_3 3$, $\log_4 4$, $\log_5 5$.

ב. איזו מסקנה ניתן להסיק לגבי ערך הלוגריתם מהסוג $\log_a a$ כאשר a חיובי ושונה מ־1? הסבירו.

תשובות: א. כולם שווים ל־1. **ב.** שווה ל־1.

הגדרת הלוגריתם

6. א. חשבו כל אחד מהלוגריתמים: $\log_3 3$, $\log_4 4$, $\log_5 5$.

ב. איזו מסקנה ניתן להסיק לגבי ערך הלוגריתם מהסוג $\log_a a$ כאשר a חיובי ושונה מ־1? הסבירו.

תשובות: א. כולם שווים ל־1. **ב.** שווה ל־1.

בשאלה זו מצאנו שעבור כל a חיובי ושונה מ־1, מתקיים: $\log_a a = 1$ מכיוון ש: $a^1 = a$.

הגדרת הלוגריתם

7. לפניכם שלושה לוגריתמים: $\log_3 1$, $\log_4 1$, $\log_5 1$.

א. חשבו כל אחד מהלוגריתמים.

ב. איזו מסקנה ניתן להסיק לגבי לוגריתם מהסוג $\log_a 1$ כאשר a חיובי ושונה מ־1? הסבירו.

ג. חן טוענה: "לביטוי $\log_1 1$ יש ערכים שונים. לדוגמה: $\log_1 1 = 5$, $\log_1 1 = 2$, $\log_1 1 = 0$."
האם היא צודקת? הסבירו.

הגדרת הלוגריתם

7. לפניכם שלושה לוגריתמים: $\log_3 1$, $\log_4 1$, $\log_5 1$.

א. חשבו כל אחד מהלוגריתמים.

ב. איזו מסקנה ניתן להסיק לגבי לוגריתם מהסוג $\log_a 1$ כאשר a חיובי ושונה מ־1? הסבירו.

ג. חן טוענת: "לביטוי $\log_1 1$ יש ערכים שונים. לדוגמה: $\log_1 1 = 5$, $\log_1 1 = 2$, $\log_1 1 = 0$."
האם היא צודקת? הסבירו.

תשובות: א. כולם שווים ל־0.

הגדרת הלוגריתם

7. לפניכם שלושה לוגריתמים: $\log_3 1$, $\log_4 1$, $\log_5 1$.

א. חשבו כל אחד מהלוגריתמים.

ב. איזו מסקנה ניתן להסיק לגבי לוגריתם מהסוג $\log_a 1$ כאשר a חיובי ושונה מ־1? הסבירו.

ג. חן טוענת: "לביטוי $\log_1 1$ יש ערכים שונים. לדוגמה: $\log_1 1 = 5$, $\log_1 1 = 2$, $\log_1 1 = 0$."
האם היא צודקת? הסבירו.

תשובות: א. כולם שווים ל־0. **ב.** שווה ל־0.

הגדרת הלוגריתם

7. לפניכם שלושה לוגריתמים: $\log_3 1$, $\log_4 1$, $\log_5 1$.

א. חשבו כל אחד מהלוגריתמים.

ב. איזו מסקנה ניתן להסיק לגבי לוגריתם מהסוג $\log_a 1$ כאשר a חיובי ושונה מ־1? הסבירו.

ג. חן טוענת: "לביטוי $\log_1 1$ יש ערכים שונים. לדוגמה: $\log_1 1 = 5$, $\log_1 1 = 2$, $\log_1 1 = 0$."
האם היא צודקת? הסבירו.

תשובות: א. כולם שווים ל־0. **ב.** שווה ל־0. **ג.** חן צודקת. לביטוי יש אין־סוף ערכים, ולכן אינו מוגדר.

הגדרת הלוגריתם

7. לפניכם שלושה לוגריתמים: $\log_3 1$, $\log_4 1$, $\log_5 1$.

א. חשבו כל אחד מהלוגריתמים.

ב. איזו מסקנה ניתן להסיק לגבי לוגריתם מהסוג $\log_a 1$ כאשר a חיובי ושונה מ־1? הסבירו.

ג. חן טוענת: "לביטוי $\log_1 1$ יש ערכים שונים. לדוגמה: $\log_1 1 = 5$, $\log_1 1 = 2$, $\log_1 1 = 0$."
האם היא צודקת? הסבירו.

בשאלה זו מצאנו שעבור כל a חיובי ושונה מ־1, מתקיים: $\log_a 1 = 0$, זאת מכיוון שכאשר נעלה **כל מספר חיובי** בחזקת 0, התוצאה תהיה 1. לביטוי $\log_1 1$ יש אין־סוף ערכים, ולכן אינו מוגדר.

כעת נוכל לפתור את תרגיל 8 בעמוד 52.

הגדרת הלוגריתם

דוגמה: היעזרו בהגדרת הלוגריתם, ופתרו את המשוואה: $log_2x = 3$.

הגדרת הלוגריתם

דוגמה: היעזרו בהגדרת הלוגריתם, ופתרו את המשוואה: $log_2x = 3$.

פתרון: בעזרת הגדרת הלוגריתם נקבל את המשוואה: $x = 2^3$

שפתרונה x=8.

נשים לב שהביטוי X בבסיס הלוגריתם מוכרח להיות חיובי,

והפתרון אכן מקיים זאת.

כעת נוכל לפתור את תרגיל 9 בעמוד 52.

הגדרת הלוגוריתם

שימו לב! בכתיבה של לוגריתמים יש להבחין בין הביטויים $log_a\left(b^n\right)$ ו- $(log_ab)^n$. כדוגמה נציג את ההבדל בין $log_2\left(2^7\right)$ לבין $(log_22)^7$.

- משמעות הביטוי $log_a\left(b^n\right)$ היא לוגריתם מבסיס a של הביטוי b^n.
  לדוגמה, משמעות הביטוי $log_2\left(2^7\right)$ היא לוגריתם מבסיס 2 של הביטוי 2^7, וערכו: $log_2\left(2^7\right) = 7$.
- משמעות הביטוי $(log_ab)^n$ היא העלאת הלוגריתם **כולו** בחזקת n, ונהוג להציגו כך: $log_a{}^n b$.
  לדוגמה, משמעות הביטוי $(log_22)^7$ היא העלאה בחזקת 7 של לוגריתם שערכו 1: $(log_22)^7 = 1$.

כעת נוכל לפתור את תרגיל 10 בעמוד 53.

הגדרת הלוגריתם

שימו לב! כאשר בסיס הלוגריתם הוא e, נהוג להציגו בתור ln.

דוגמאות: $log_e 2 = ln2, log_e e = lne$.

כאשר בסיס הלוגריתם הוא 10, נהוג שלא לציין אותו.

לדוגמה: $log_{10} 100 = log 100$.

כעת נוכל לפתור את תרגיל 11 בעמוד 53.

חוקי הלוגריתמים

12. גל חישבה: $\log_2 4+\log_2 8=\log_2(2^2)+\log_2(2^3)=2+3=5=\log_2(2^5)=\log_2 32=\log_2(4\cdot 8)$

סהר חישב: $\log_3 3+\log_3 9=\log_3(3^1)+\log_3(3^2)=1+2=3=\log_3(3^3)=\log_3 27=\log_3(3\cdot 9)$

א. בדקו אם החישובים נכונים.

ב. עופר החל חישוב משלו. השלימו אותו לפי הדרך של גל ושל סהר: $\log_5 5+\log_5 125 =$

ג. מאיה החלה חישוב משלה. $\log_3 \frac{1}{3}+\log_3 9 =$. שערו מהו השלב **הימני** ביותר בחישוב.

ד. נסחו באופן מילולי את החוקיות שניתן לזהות בחישובים.

ה. השניים טענו שניתן להציג את החוקיות בעזרת הנוסחה: $\log_a x+\log_a y = \log_a(x\cdot y)$.

האם החישובים שהציגו מתאימים לנוסחה?

חוקי הלוגריתמים

12. גל חישבה: $\log_2 4+\log_2 8=\log_2(2^2)+\log_2(2^3)=2+3=5=\log_2(2^5)=\log_2 32=\log_2(4\cdot 8)$

סהר חישב: $\log_3 3+\log_3 9=\log_3(3^1)+\log_3(3^2)=1+2=3=\log_3(3^3)=\log_3 27=\log_3(3\cdot 9)$

א. בדקו אם החישובים נכונים.

ב. עופר החל חישוב משלו. השלימו אותו לפי הדרך של גל ושל סהר: $\log_5 5+\log_5 125=$

ג. מאיה החלה חישוב משלה. $\log_3 \frac{1}{3}+\log_3 9=$. שערו מהו השלב **הימני** ביותר בחישוב.

ד. נסחו באופן מילולי את החוקיות שניתן לזהות בחישובים.

ה. השניים טענו שניתן להציג את החוקיות בעזרת הנוסחה: $\log_a x+\log_a y=\log_a(x\cdot y)$.

האם החישובים שהציגו מתאימים לנוסחה?

תשובות: א. נכונים.

חוקי הלוגריתמים

12. גל חישבה: $\log_2 4+\log_2 8=\log_2(2^2)+\log_2(2^3)=2+3=5=\log_2(2^5)=\log_2 32=\log_2(4\cdot 8)$

סהר חישב: $\log_3 3+\log_3 9=\log_3(3^1)+\log_3(3^2)=1+2=3=\log_3(3^3)=\log_3 27=\log_3(3\cdot 9)$

א. בדקו אם החישובים נכונים.

ב. עופר החל חישוב משלו. השלימו אותו לפי הדרך של גל ושל סהר: $\log_5 5+\log_5 125=$

ג. מאיה החלה חישוב משלה. $\log_3 \frac{1}{3}+\log_3 9=$. שערו מהו השלב **הימני** ביותר בחישוב.

ד. נסחו באופן מילולי את החוקיות שניתן לזהות בחישובים.

ה. השניים טענו שניתן להציג את החוקיות בעזרת הנוסחה: $\log_a x+\log_a y=\log_a(x\cdot y)$.

האם החישובים שהציגו מתאימים לנוסחה?

תשובות: א. נכונים.

ב. $log_5 5+log_5 125=log_5\left(5^1\right)+log_5\left(5^3\right)=1+3=4=log_5\left(5^4\right)=log_5 625=log_5(5\cdot 125)$.

חוקי הלוגריתמים

12. גל חישבה: $\log_2 \mathbf{4} + \log_2 \mathbf{8} = \log_2(2^2) + \log_2(2^3) = 2 + 3 = 5 = \log_2(2^5) = \log_2 32 = \log_2(\mathbf{4} \cdot \mathbf{8})$

סהר חישב: $\log_3 \mathbf{3} + \log_3 \mathbf{9} = \log_3(3^1) + \log_3(3^2) = 1 + 2 = 3 = \log_3(3^3) = \log_3 27 = \log_3(\mathbf{3} \cdot \mathbf{9})$

א. בדקו אם החישובים נכונים.

ב. עופר החל חישוב משלו. השלימו אותו לפי הדרך של גל ושל סהר: $\log_5 \mathbf{5} + \log_5 \mathbf{125} =$

ג. מאיה החלה חישוב משלה. $\log_3 \mathbf{\frac{1}{3}} + \log_3 \mathbf{9} =$. שערו מהו השלב **הימני** ביותר בחישוב.

ד. נסחו באופן מילולי את החוקיות שניתן לזהות בחישובים.

ה. השניים טענו שניתן להציג את החוקיות בעזרת הנוסחה: $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$.

האם החישובים שהציגו מתאימים לנוסחה?

תשובות: ג. $log_3\left(\frac{1}{3} \cdot 9\right)$.

חוקי הלוגריתמים

12. גל חישבה: $\log_2 4+\log_2 8=\log_2(2^2)+\log_2(2^3)=2+3=5=\log_2(2^5)=\log_2 32=\log_2(4\cdot 8)$

סהר חישב: $\log_3 3+\log_3 9=\log_3(3^1)+\log_3(3^2)=1+2=3=\log_3(3^3)=\log_3 27=\log_3(3\cdot 9)$

א. בדקו אם החישובים נכונים.

ב. עופר החל חישוב משלו. השלימו אותו לפי הדרך של גל ושל סהר: $\log_5 5+\log_5 125=$

ג. מאיה החלה חישוב משלה. $\log_3 \frac{1}{3}+\log_3 9=$. שערו מהו השלב **הימני** ביותר בחישוב.

ד. נסחו באופן מילולי את החוקיות שניתן לזהות בחישובים.

ה. השניים טענו שניתן להציג את החוקיות בעזרת הנוסחה: $\log_a x+\log_a y=\log_a(x\cdot y)$.

האם החישובים שהציגו מתאימים לנוסחה?

תשובות: ג. $log_3\left(\frac{1}{3}\cdot 9\right)$. **ד.** סכום לוגריתמים של שני מספרים לפי בסיס זהה, שווה ללוגריתם אחד של מכפלת המספרים לפי אותו בסיס.

חוקי הלוגריתמים

12. גל חישבה: $\log_2 \mathbf{4} + \log_2 \mathbf{8} = \log_2(2^2) + \log_2(2^3) = 2+3 = 5 = \log_2(2^5) = \log_2 32 = \log_2(\mathbf{4}\cdot\mathbf{8})$

סהר חישב: $\log_3 \mathbf{3} + \log_3 \mathbf{9} = \log_3(3^1) + \log_3(3^2) = 1+2 = 3 = \log_3(3^3) = \log_3 27 = \log_3(\mathbf{3}\cdot\mathbf{9})$

א. בדקו אם החישובים נכונים.

ב. עופר החל חישוב משלו. השלימו אותו לפי הדרך של גל ושל סהר: $\log_5 \mathbf{5} + \log_5 \mathbf{125} =$

ג. מאיה החלה חישוב משלה. $\log_3 \frac{1}{3} + \log_3 9 \ =$. שערו מהו השלב **הימני** ביותר בחישוב.

ד. נסחו באופן מילולי את החוקיות שניתן לזהות בחישובים.

ה. השניים טענו שניתן להציג את החוקיות בעזרת הנוסחה: $\log_a x + \log_a y = \log_a(x\cdot y)$.

האם החישובים שהציגו מתאימים לנוסחה?

תשובות: ג. $log_3\left(\frac{1}{3}\cdot 9\right)$. **ד.** סכום לוגריתמים של שני מספרים לפי בסיס זהה, שווה ללוגריתם אחד של מכפלת המספרים לפי אותו בסיס. **ה.** כן.

חוקי הלוגריתמים

השאלה הקודמת מובילה אותנו לחוק הלוגריתם של מכפלה: $log_a x + log_a y = log_a\left(x \cdot y\right)$. כלומר, הלוגריתם של מכפלת שני מספרים לפי בסיס a, שווה לסכום הלוגריתמים של כל אחד מהמספרים לפי בסיס a. החוק מתקיים עבור x ו־y חיוביים, כאשר a חיובי ושונה מ־1, וניתן להוכיחו באופן כללי עבור ערכים אלו.

החוק מתקיים גם עבור הבסיס e: $ln x + ln y = ln\left(x \cdot y\right)$.

חוקי הלוגריתמים

דוגמה: נתון: $\log_3 4+\log_3 5=\log_3 x$. מצאו את x.

חוקי הלוגריתמים

דוגמה: נתון: $\log_3 4 + \log_3 5 = \log_3 x$. מצאו את x.

פתרון: בעזרת חוק הלוגריתם של המכפלה נחשב: $\log_3 4 + \log_3 5 = \log_3 (4 \cdot 5) = \log_3 20$.

נקבל: $\log_3 x = \log_3 20$, ולכן: $x = 20$. עלינו לוודא שאם נציב את הפתרון $x = 20$ במשוואה המקורית לא יתקבל ביטוי אי־חיובי בתוך הלוגריתם, וזה אכן המצב. נשים לב שבפתרון זה הסתמכנו על כך שאם $\log_a x = \log_a y$ אז $x = y$ כאשר x ו־y חיוביים, ו־a חיובי ושונה מ־1.

כעת נוכל לפתור את תרגיל 13 בעמוד 54.

חוקי הלוגריתמים

דוגמה: חשבו את הסכום : $\log_6 3+\log_6 12$.

חוקי הלוגריתמים

דוגמה: חשבו את הסכום: $\log_6 3+\log_6 12$.

פתרון: בעזרת חוק הלוגריתם של מכפלה נקבל: $\log_6 3+\log_6 12=\log_6 36$.

נוכל לחשב את ערך הלוגריתם $\log_6 36$ בשתי דרכים:

דרך א': $\log_6 36 = \log_6(6^2)=2$ **דרך ב':** נציב במחשבון $\log_6 36$ ונקבל את התשובה 2.

כעת נוכל לפתור את תרגיל 14 בעמוד 54.

חוקי הלוגריתמים

15. לילך הציגה חישוב:

$$\log_2 8-\log_2 4=\log_2(2^3)-\log_2(2^2)=3-2=1=\log_2 2=\log_2(\frac{8}{4})$$

נדב הציג:

$$\log_3 27-\log_3 3=\log_3(3^3)-\log_3(3^1)=3-1=2=\log_3(3^2)=\log_3 9=\log_3(\frac{27}{3})$$

א. בדקו אם החישובים נכונים.

ב. גלבוע החל חישוב משלו. השלימו אותו לפי הדרך של לילך ונדב: $\log_5 125-\log_5 25=$

ג. כרמל החלה חישוב משלה: $\log_4 16-\log_4 \frac{1}{4}=$. שערו מהו השלב **הימני** ביותר בחישוב.

ד. נסחו באופן מילולי את החוקיות שניתן לזהות בחישובים.

חוקי הלוגריתמים

15. לילך הציגה חישוב:

$$\log_2 8-\log_2 4=\log_2(2^3)-\log_2(2^2)=3-2=1=\log_2 2=\log_2(\tfrac{8}{4})$$

נדב הציג:

$$\log_3 27-\log_3 3=\log_3(3^3)-\log_3(3^1)=3-1=2=\log_3(3^2)=\log_3 9=\log_3(\tfrac{27}{3})$$

א. בדקו אם החישובים נכונים.

ב. גלבוע החל חישוב משלו. השלימו אותו לפי הדרך של לילך ונדב: $\log_5 125-\log_5 25=$

ג. כרמל החלה חישוב משלה: $\log_4 16-\log_4 \frac{1}{4}=$. שערו מהו השלב **הימני** ביותר בחישוב.

ד. נסחו באופן מילולי את החוקיות שניתן לזהות בחישובים.

תשובות: א. החישובים נכונים.

חוקי הלוגריתמים

15. לילך הציגה חישוב:

$$\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2(2^3) - \log_2(2^2) = 3-2 = 1 = \log_2 2 = \log_2(\tfrac{8}{4})$$

נדב הציג:

$$\log_3 27 - \log_3 3 = \log_3(3^3) - \log_3(3^1) = 3-1 = 2 = \log_3(3^2) = \log_3 9 = \log_3(\tfrac{27}{3})$$

א. בדקו אם החישובים נכונים.

ב. גלבוע החל חישוב משלו. השלימו אותו לפי הדרך של לילך ונדב: $\log_5 125 - \log_5 25 =$

ג. כרמל החלה חישוב משלה: $\log_4 16 - \log_4 \frac{1}{4} =$. שערו מהו השלב **הימני** ביותר בחישוב.

ד. נסחו באופן מילולי את החוקיות שניתן לזהות בחישובים.

תשובות: א. החישובים נכונים.

ב. $log_5 125 - log_5 25 = log_5\left(5^3\right) - log_5\left(5^2\right) = 3 - 2 = 1 = log_5 5 = log_5 \frac{125}{25}$.

חוקי הלוגריתמים

15. לילך הציגה חישוב:

$$\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2(2^3) - \log_2(2^2) = 3-2 = 1 = \log_2 2 = \log_2(\frac{8}{4})$$

נדב הציג: $\log_3 27 - \log_3 3 = \log_3(3^3) - \log_3(3^1) = 3-1 = 2 = \log_3(3^2) = \log_3 9 = \log_3(\frac{27}{3})$

א. בדקו אם החישובים נכונים.

ב. גלבוע החל חישוב משלו. השלימו אותו לפי הדרך של לילך ונדב: $\log_5 125 - \log_5 25 =$

ג. כרמל החלה חישוב משלה: $\log_4 16 - \log_4 \frac{1}{4} =$. שערו מהו השלב **הימני** ביותר בחישוב.

ד. נסחו באופן מילולי את החוקיות שניתן לזהות בחישובים.

תשובות: ג. $log_4 \frac{16}{\frac{1}{4}}$.

חוקי הלוגריתמים

15. לילך הציגה חישוב:

$$\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2(2^3) - \log_2(2^2) = 3-2 = 1 = \log_2 2 = \log_2(\tfrac{8}{4})$$

נדב הציג: $\log_3 27 - \log_3 3 = \log_3(3^3) - \log_3(3^1) = 3-1 = 2 = \log_3(3^2) = \log_3 9 = \log_3(\frac{27}{3})$

א. בדקו אם החישובים נכונים.

ב. גלבוע החל חישוב משלו. השלימו אותו לפי הדרך של לילך ונדב: $\log_5 125 - \log_5 25 =$

ג. כרמל החלה חישוב משלה: $\log_4 16 - \log_4 \frac{1}{4} =$. שערו מהו השלב **הימני** ביותר בחישוב.

ד. נסחו באופן מילולי את החוקיות שניתן לזהות בחישובים.

תשובות: ג. $log_4\frac{16}{\frac{1}{4}}$. **ד.** הפרש הלוגריתמים של כל אחד משני מספרים לפי בסיס זהה, שווה ללוגריתם אחד של מנת המספרים לפי אותו בסיס.

חוקי הלוגריתמים

השאלה הקודמת מובילה אותנו ל**חוק הלוגריתם של מנה:**

$log_a x - log_a y = log_a\left(\frac{x}{y}\right)$. כלומר, הלוגריתם של מנה של שני מספרים לפי בסיס a, שווה להפרש הלוגריתמים של כל אחד מהמספרים לפי בסיס a. החוק מתקיים עבור x ו־y חיוביים, כאשר a חיובי ושונה מ־1.

בשאלה הקודמת הסקנו לגבי החוק בעזרת מקרים בודדים, אך ניתן להוכיח אותו גם באופן כללי. החוק מתקיים גם עבור הבסיס e,

ולכן: $lnx - lny = ln\left(\frac{x}{y}\right)$. דוגמה: $log_3 20 - log_3 5 = log_3\left(\frac{20}{5}\right) = log_3 4$.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 16-17 בעמוד 55.

חוקי הלוגריתמים

18. נופר הציגה את החישוב: $\log_7(2^3)=\log_7(2\cdot 2\cdot 2)=\log_7 2+\log_7 2+\log_7 2 = 3\log_7 2$

א. הציגו את הלוגריתמים הבאים כפי שעשתה נופר: 1. $\log_4(3^5)$ 2. $\log_5(3^4)$

ב. מצאו ביטוי אלגברי שבעזרתו ניתן להציג את הביטוי $\log_a x^n$.

חוקי הלוגריתמים

18. נופר הציגה את החישוב: $\log_7(2^3) = \log_7(2\cdot 2\cdot 2) = \log_7 2 + \log_7 2 + \log_7 2 = 3\log_7 2$

א. הציגו את הלוגריתמים הבאים כפי שעשתה נופר: 1. $\log_4(3^5)$ 2. $\log_5(3^4)$

ב. מצאו ביטוי אלגברי שבעזרתו ניתן להציג את הביטוי $\log_a x^n$.

תשובות:

א.1. $log_4\left(3^5\right) = \log_4(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3) = \log_4 3 + \log_4 3 + \log_4 3 + \log_4 3 + \log_4 3 = 5\log_4 3$.

חוקי הלוגריתמים

18. נופר הציגה את החישוב: $\log_7(2^3) = \log_7(2\cdot2\cdot2) = \log_7 2 + \log_7 2 + \log_7 2 = 3\log_7 2$

א. הציגו את הלוגריתמים הבאים כפי שעשתה נופר: 1. $\log_4(3^5)$ 2. $\log_5(3^4)$

ב. מצאו ביטוי אלגברי שבעזרתו ניתן להציג את הביטוי $\log_a x^n$.

תשובות:

א.1. $log_4\left(3^5\right) = \log_4(3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3) = \log_4 3 + \log_4 3 + \log_4 3 + \log_4 3 + \log_4 3 = 5\log_4 3$.

2. $log_5\left(3^4\right) = \log_4(3\cdot3\cdot3\cdot3) = 4log_5 3$.

חוקי הלוגריתמים

18. נופר הציגה את החישוב: $\log_7(2^3) = \log_7(2\cdot2\cdot2) = \log_7 2 + \log_7 2 + \log_7 2 = 3\log_7 2$

א. הציגו את הלוגריתמים הבאים כפי שעשתה נופר: 1. $\log_4(3^5)$ 2. $\log_5(3^4)$

ב. מצאו ביטוי אלגברי שבעזרתו ניתן להציג את הביטוי $\log_a x^n$.

תשובות:

א.1. $log_4\left(3^5\right) = \log_4(3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3) = \log_4 3 + \log_4 3 + \log_4 3 + \log_4 3 + \log_4 3 = 5\log_4 3$.

2. $log_5\left(3^4\right) = \log_4(3\cdot3\cdot3\cdot3) = 4log_5 3$. **ב.** $n\cdot log_a x$.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 20-21 בעמוד 56.

למרחב ההוראה

לחצו כאן

במרחב ההוראה מאות דפי תרגול, וביניהם בחינות מתכונת. המרחב מיועד לצוותי הוראה במוסדות לימוד אשר רכשו את הספר.

למי לפנות?

לשאלות לארכימדס:

במספר 050-9074007 של הוצאת ארכימדס

להזמנות מרוכזות - פונים ל-"יש הפצות":

טלפון 03-5595354 או וואטסאפ 054-7154211