

שלושת הייצוגים של הפונקציה הריבועית

כעת נעסוק בשלושת הייצוגים של הפונקציה הריבועית - ייצוג סטנדרטי, ייצוג קודקודי וייצוג מכפלה.

נתבונן בייצוג ה**סטנדרטי** של הפונקציה $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$. נוכל להציג את הפונקציה $f(x)$ גם

בייצוג ה**קודקודי** $f(x) = 2(x - 2)^2 - 18$ וגם בייצוג ה**מכפלה**: $f(x) = 2(x + 1)(x - 5)$.

שלושת הייצוגים מציגים את **אותה פונקציה ריבועית**, בדרכים שונות.

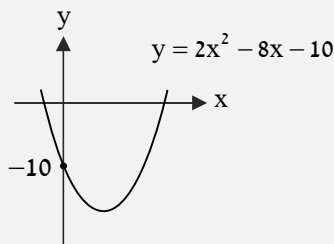
כיצד נוכל להיעזר בייצוגים השונים של הפרבולה, כדי ללמוד מהם על תכונות הפרבולה?

בשלושת ייצוגי הפרבולה מופיע המקדם a ובעזרתו נוכל להסיק ישירות על תכונות הפרבולה:

כאשר $0 < a$ לפרבולה יש נקודת מינימום. כך למשל, בדוגמה שבפתיחת ההסבר.

כאשר $a < 0$ לפרבולה יש נקודת מקסימום.

ככל ש- $|a|$ גדול יותר (הערך המספרי של a ללא קשר לסימן שלו), הפרבולה מכווצת יותר אופקית.



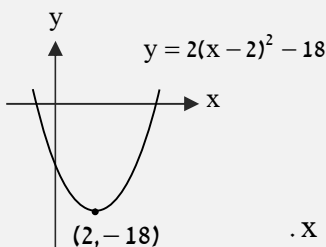
הייצוג הסטנדרטי של פונקציה ריבועית הוא: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

ייצוג זה מקל עלינו למצוא את שיעורי נקודת החיתוך של הפרבולה

עם ציר ה- y והיא $(0, c)$. הייצוג הסטנדרטי של הפרבולה שבדוגמה

הוא $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$.

ניתן להסיק מייצוג זה שהפרבולה חותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, -10)$.



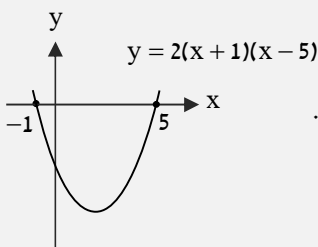
הייצוג הקודקודי של פונקציה ריבועית הוא: $f(x) = a(x - p)^2 + k$.

ייצוג זה מקל עלינו למצוא את שיעורי קדקוד הפרבולה (p, k)

ובתוך כך את ציר הסימטריה של הפרבולה $x = p$.

הייצוג הקודקודי של הפרבולה שבדוגמה הוא: $f(x) = 2(x - 2)^2 - 18$.

ניתן להסיק ממנו שקודקוד הפרבולה הוא $(2, -18)$ וציר הסימטריה הוא $x = 2$.



ייצוג המכפלה של פונקציה ריבועית הוא: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

ייצוג זה מקל עלינו למצוא את שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה

עם ציר ה- x שהן $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$. ציר הסימטריה הוא הממוצע: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

ייצוג המכפלה של הפרבולה שבדוגמה הוא: $f(x) = 2(x + 1)(x - 5)$.

ניתן להסיק ממנו שהפרבולה חותכת את הציר ה- x בנקודות $(-1, 0)$, $(5, 0)$

ושציר הסימטריה הוא: $x = 2$.

שאלות:

1. לפניכם שש התכונות אי-ו' של פרבולות:

א. האם הפרבולה ישרה / הפוכה.

ב. האם הפרבולה מתוחה או מכווצת.

ג. שיעורי קדקוד הפרבולה.

ד. משוואת ציר הסימטריה.

ה. שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה-x.

ו. שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה-y.

הקיפו את התכונות הניתנות לזיהוי ישיר מכל סוג של ייצוג:

ייצוג סטנדרטי $f(x) = ax^2 + bx + c$: א' ב' ג' ד' ה' ו'

ייצוג קודקודי $f(x) = a(x - p)^2 + k$: א' ב' ג' ד' ה' ו'

ייצוג מכפלה $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$: א' ב' ג' ד' ה' ו'

2. העבירו כל פונקציה לייצוג סטנדרטי $y = ax^2 + bx + c$:

א. $y = (x - 5)^2 - 4$ ב. $y = -2(x - 2)(x + 3)$ ג. $y = 2(x + 5)^2$

ד. $y = -(x - 2)^2 - 4x + 1$ ה. $y = -(x - 1)(x + 2) + 2x^2 - 2$ ו. $y = (x + 3)^2 + 2x + 3x^2$

3. מבין שש הפונקציות שלפניכם, מצאו את השלוש שהן ייצוגים שונים של אותה פונקציה:

א. $y = 3(x - 5)^2 - 60$ ב. $y = 3(x + 5)(x - 1)$ ג. $y = -3x(-x - 5) - 3x - 15$

ד. $y = 3(x^2 - 5x) + 12$ ה. $y = -3(-x^2 - 4) - 15$ ו. $y = \frac{1}{3}(3x + 6)^2 - 27$

4. העבירו כל פונקציה לייצוג מכפלה $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ בעזרת פירוק לטרינום:

א. $y = 2x^2 - 2x - 4$ ב. $y = -3x^2 + 6x + 24$ ג. $y = -5x^2 - 5x + 10$

5. עבור כל פרבולה, קבעו האם יש לה נקודת מינימום או נקודת מקסימום:

א. $y = 2(x - 5)^2 + 2$ ב. $y = -3(x - 4)(x + 3)$ ג. $y = -6x^2 + 4x + 2$

ד. $y = -4(x + 2)^2 + 7$ ה. $y = 9(x + 6)(x - 6)$ ו. $y = 2.5x^2 + 0.25x - 0.36$

6. עבור כל פונקציה, מצאו את שיעורי הקודקוד ואת טווח הערכים שיכולה הפונקציה לקבל:

א. $y = 2(x - 5)^2 + 2$ ב. $y = -3(x - 4)(x + 6)$ ג. $y = -4(x + 2)^2 + 7$ ד. $y = 9(x + 6)(x - 6)$

7. השלימו את הטבלה:

$h(x) = -x^2 + 6x - 5$	$g(x) = -2(x-1)(x-3)$	$f(x) = 3(x-1)^2 + 2$	
			נקודת מינימום או מקסימום
			ציר הסימטריה
			שיעורי הקדקוד
			תחום עליה
			שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה-x
			שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה-y
			תחום החיוביות
			טווח הערכים שיכולה הפונקציה לקבל

8. עבור כל פרבולה, מצאו את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה-x ואת תחום החיוביות:

א. $g(x) = -4(x+1)^2 + 64$ ב. $h(x) = -x^2 + 8x + 9$ ג. $f(x) = 3(x-4)(x+3)$

9. העבירו כל פונקציה להצגת מכפלה:

א. $y = (x-1)^2 - 9$ ב. $y = x^2 + 4x + 3$ ג. $y = 2(x+5)^2 - 8$ ד. $y = -2x^2 - 6x + 8$

10. מצאו את ציר הסימטריה של כל פונקציה:

א. $y = 2(x-5)^2 + 2$ ב. $y = x^2 - 6x + 9$ ג. $y = -4(x+2)^2 + 7$

ד. $y = 9(x+6)(x-6)$ ה. $y = -3(x-4)(x+3)$ ו. $y = -2x^2 - 6x + 20$

11. נתונה הפונקציה הריבועית $f(x) = -3(x+4)(x-6)$.

א. קבעו האם הפרבולה ישרה או הפוכה.

ב. קבעו האם הפרבולה הנתונה מכווצת או מתוחה יותר מהפרבולה: $g(x) = -x^2 + 2x + 24$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ד. מצאו את משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה.

ה. מצאו את שיעורי קדקוד הפרבולה.

ו. מצאו את טווח הערכים האפשרי של ערכי ה-y של הנקודות שעל הפרבולה.

12. העבירו את הפונקציות להצגת מכפלה ומצאו את שיעורי הקדקוד ונקודות החיתוך עם ציר ה-x:

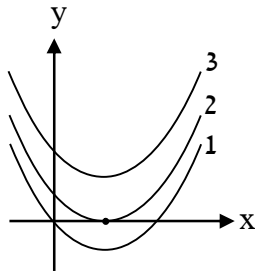
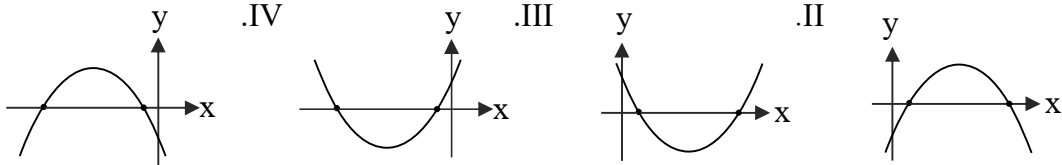
א. $g(x) = (x + 1)^2 - 4$ ב. $h(x) = (x - 1)^2 - 9$ ג. $y = (x - 2)^2 - 9$

ד. $f(x) = -2(x - 3)^2 + 32$ ה. $q(x) = 3(x + 1)^2 - 75$ ו. $t(x) = -3(x + 2)^2 + 12$

13. נתונות ארבע פונקציות:

$f(x) = x^2 - 6x + 5$, $g(x) = x^2 + 6x + 5$, $h(x) = -x^2 + 6x - 5$, $m(x) = -x^2 - 6x - 5$

לפניכם ארבע פרבולות. קבעו איזו פרבולה מתאימה לכל אחת מהפונקציות:



14. לפניכם שלוש פונקציות ושלוש פרבולות.

קבעו איזו פרבולה מתאימה לכל אחת מהפונקציות:

$h(x) = x^2 - 6x + 9$ $f(x) = x(x - 6)$ $g(x) = (x - 3)^2 + 6$

15. התאימו בין כל נתון בטור הימני לבין הפונקציה שהוא מתאים לה בטור השמאלי:

א. ציר הסימטריה: $x = 0$ 1. $e(x) = 5x^2 + 2x + 3$

ב. נקודות האפס: $(6, 0)$, $(-1, 0)$ 2. $f(x) = -3x^2$

ג. נקודת החיתוך עם ציר ה-y: $(0, 3)$ 3. $g(x) = 5(x - 4)^2 - 2$

ד. נקודת מינימום: $(4, -2)$ 4. $h(x) = -x^2 - 2$

ה. נקודת מינימום: $(-4, -2)$ 5. $q(x) = 5(x + 4)^2 - 2$

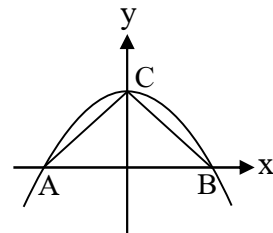
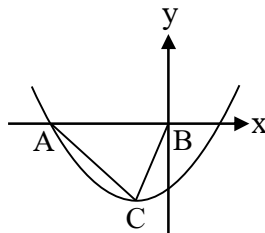
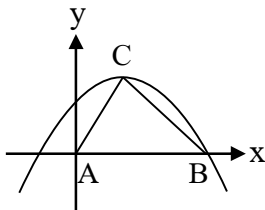
ו. נקודת מקסימום: $(0, -2)$ 6. $r(x) = (x - 6)(x + 1)$

16. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-x וציירו בעזרתן סקיצה של הפרבולה:

א. $y = (x - 5)(x + 3)$ ב. $y = (5 - x)(x + 3)$ ג. $y = (-x - 5)(x - 3)$ ד. $y = (x + 5)(x + 3)$

17. בכל שרטוט, הנקודות A ו-B על ציר ה-x והקדקוד בנקודה C. חשבו את שטח המשולש ΔABC :

א. $h(x) = -(x - 4)(x + 4)$ ב. $f(x) = (x + 5)(x - 3)$ ג. $g(x) = -(x - 7)(x + 1)$



18. הפרבולה $y = x^2 + 3x + c$ חותכת את ציר ה-x בנקודה $(2, 0)$. מצאו c ושיעורי נקודת החיתוך השנייה של הפונקציה עם ציר ה-x.
19. הפרבולה $f(x) = -x^2 + bx + 8$ חותכת את ציר ה-x בנקודה $(-4, 0)$. מצאו את:
 א. הפרמטר b.
 ב. שיעורי נקודת החיתוך השנייה של הפרבולה עם ציר ה-x.
 ג. הערך המקסימלי שיכולה הפונקציה $f(x)$ לקבל.
20. הפרבולה $y = 3x^2 + bx + c$ חותכת את ציר ה-y בנקודה $(0, 2)$. אחת מנקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-x היא $(1, 0)$. מצאו את b ו-c ואת שיעורי נקודת החיתוך השניה עם ציר ה-x.
21. (*) נתונה פרבולה שקדקודה בנקודה $(-1, 5)$ והיא עוברת בנקודה $(2, -13)$.
 א. כתבו את הייצוג הקדקודי של הפרבולה ומצאו את a.
 ב. כתבו את הייצוג הסטנדרטי של הפרבולה ומצאו את b ו-c.
 ג. מצאו את תחום הירידה של הפרבולה.
 ד. מצאו את טווח ערכי ה-y האפשריים לנקודות הנמצאות על הפרבולה.

לעיתים נרצה לעבור מייצוג סטנדרטי של פרבולה לייצוג קדקודי. לשם כך נשתמש בשיטת 'השלמה לריבוע'.

דוגמה: נעביר את הפרבולה $y = x^2 + 10x + 21$ מייצוג סטנדרטי לייצוג קדקודי:

- א. בייצוג הסטנדרטי $y = x^2 + 10x + 21$ נבחין כי $b = 10$. נחלק את b ב-2 ונקבל 5.
 ב. את המספר 5 שקיבלנו, נכניס כביטוי הריבועי: $(x + 5)^2$ שהוא שווה בערכו לביטוי: $x^2 + 10x + 25$.
 ג. הביטוי $x^2 + 10x + 25$ דומה לייצוג הסטנדרטי של הפרבולה. הפער ביניהם הוא 4 יח'.
 נוכל לרשום: $y = x^2 + 10x + 21 = (x + 5)^2 - 4$. לסיכום, קיבלנו ייצוג קדקודי: $y = (x + 5)^2 - 4$.
 נוכל לפתוח את הסוגריים ולוודא שהייצוג הקדקודי נכון.

22. העבירו את הפרבולות הבאות מייצוג סטנדרטי לייצוג קדקודי בעזרת השלמה לריבוע.

לאחר מכן, בדקו את התשובה על ידי פתיחת הסוגריים:

- א. $y = x^2 + 4x - 3$ ב. $y = x^2 + 6x - 16$ ג. $y = x^2 - 16x - 17$
 ד. $y = -x^2 + 2x + 5$ ה. $y = -3x^2 + 12x - 6$ (*) ו. $y = 4x^2 - 8x + 9$ (*)

23. השלימו את הטבלה לפי הייצוגים השונים של הפונקציה:

ייצוג סטנדרטי $y = ax^2 + bx + c$	ייצוג מכפלה $y = a(x - x_1)(x - x_2)$	ייצוג קדקודי $y = a(x - p)^2 + k$	
		$y = (x + 6)^2 - 1$	א
$y = x^2 - 2x - 8$			ב
$y = 2x^2 + 14x - 36$			ג
	$y = 3(x - 1)(x - 6)$		ד

24. מצאו את הפונקציה הריבועית המתקבלת לאחר ש:

א. נזיז את הפונקציה $f(x) = x(x - 6)$ שמאלה למרחק 5 יחידות.

ב. נזיז את הפונקציה $f(x) = (x - 2)(x - 5)$ ימינה למרחק של 4 יחידות.

תשובות:

1) ייצוג סטנדרטי: א', ב', ו'; ייצוג קדקודי: א', ב', ג', ד'; ייצוג מכפלה: א', ב', ה'.

2) א. $y = x^2 - 10x + 21$. ב. $y = -2x^2 - 2x + 12$. ג. $y = 2x^2 + 20x + 50$. ד. $y = -x^2 - 3$.

ה. $y = x^2 - x$. ו. $y = 4x^2 + 8x + 9$.

3) א, ב, ג, ו.

4) א. $y = 2(x + 1)(x - 2)$. ב. $y = -3(x + 2)(x - 4)$. ג. $y = -5(x + 2)(x - 1)$.

5) א. מינימום. ב. מקסימום. ג. מקסימום. ד. מקסימום. ה. מינימום. ו. מינימום.

6) א. $2 \leq y$, $(5, 2)$. ב. $y \leq 75$, $(-1, 75)$. ג. $y \leq 7$, $(-2, 7)$. ד. $-324 \leq y$, $(0, -324)$.

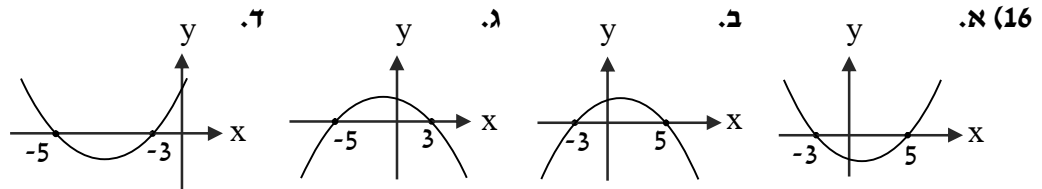
7)

$h(x) = -x^2 + 6x - 5$	$g(x) = -2(x - 1)(x - 3)$	$f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$	
מקסימום	מקסימום	מינימום	נקודת מינימום או מקסימום
$x = 3$	$x = 2$	$x = 1$	ציר הסימטריה
$(3, 4)$	$(2, 2)$	$(1, 2)$	שיעורי הקדקוד
$x < 3$	$x < 2$	$1 < x$	תחום עליה
$(1, 0), (5, 0)$	$(1, 0), (3, 0)$	אין	שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה-x
$(0, -5)$	$(0, -6)$	$(0, 5)$	שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה-y
$1 < x < 5$	$1 < x < 3$	כל x	תחום החיוביות
$y \leq 4$	$y \leq 2$	$2 \leq y$	טווח הערכים שיכולה הפונקציה לקבל

- 8 א. $(-5,0)$, $(3,0)$. תחום חיוביות: $-5 < x < 3$. ב. $(-1,0)$, $(9,0)$. תחום חיוביות: $-1 < x < 9$.
 ג. $(-3,0)$, $(4,0)$. תחום חיוביות: $x < -3$ או $4 < x$.
- 9 א. $y = (x+2)(x-4)$. ב. $y = (x+3)(x+1)$. ג. $y = 2(x+7)(x+3)$. ד. $y = -2(x+4)(x-1)$.
- 10 א. $x = 5$. ב. $x = 3$. ג. $x = -2$. ד. $x = 0$. ה. $x = 0.5$. ו. $x = -1.5$.
- 11 א. הפוכה. ב. מכווצת יותר. ג. $(0,72)$, $(-4,0)$, $(6,0)$. ד. $x = 1$. ה. $(1,75)$. ו. $y \leq 75$.
- 12 א. $g(x) = (x+3)(x-1)$, הקדקוד: $(-1,-4)$, נקודות החיתוך: $(-3,0)$, $(1,0)$.
 ב. $h(x) = (x-4)(x+2)$, הקדקוד: $(1,-9)$, נקודות החיתוך: $(-2,0)$, $(4,0)$.
 ג. $y = (x-5)(x+1)$, הקדקוד: $(2,-9)$, נקודות החיתוך: $(-1,0)$, $(5,0)$.
 ד. $f(x) = -2(x-7)(x+1)$, הקדקוד: $(3,32)$, נקודות החיתוך: $(-1,0)$, $(7,0)$.
 ה. $q(x) = 3(x+6)(x-4)$, הקדקוד: $(-1,75)$, נקודות החיתוך: $(-6,0)$, $(4,0)$.
 ו. $t(x) = -3x(x+4)$, הקדקוד: $(-2,12)$, נקודות החיתוך: $(0,0)$, $(-4,0)$.
- 13 I. $h(x) = -x^2 + 6x - 5$. II. $f(x) = x^2 - 6x + 5$. III. $g(x) = x^2 + 6x + 5$. IV. $m(x) = -x^2 - 6x - 5$.

14 1. $f(x) = x(x-6)$. 2. $h(x) = x^2 - 6x + 9$. 3. $g(x) = (x-3)^2 + 6$.

15 א': $f(x)$, ב': $r(x)$, ג': $e(x)$, ד': $g(x)$, ה': $q(x)$, ו': $h(x)$.



17 א. 64 יח"ר. ב. 40 יח"ר. ג. 56 יח"ר.

18 $c = -10$, $(-5,0)$.

19 א. $b = -2$. ב. $(2,0)$. ג. 9.

20 $(\frac{2}{3}, 0)$, $c = 2$, $b = -5$.

21 א. $y = -2(x+1)^2 + 5$, $a = -2$. ב. $y = -2x^2 - 4x + 3$, $b = -4$, $c = 3$. ג. $-1 < x$. ד. $y \leq 5$.

22 א. $y = (x+2)^2 - 7$. ב. $y = (x+3)^2 - 25$. ג. $y = (x-8)^2 - 81$. ד. $y = -(x-1)^2 + 6$.

ה. $y = -3(x-2)^2 + 6$. ו. $y = 4(x-1)^2 + 5$.

23 א. $y = x^2 + 12x + 35$, $y = (x+7)(x+5)$. ב. $y = (x-1)^2 - 9$, $y = (x+2)(x-4)$.

ג. $y = 2(x-2)(x+9)$, $y = 2(x+3.5)^2 - 60.5$. ד. $y = 3x^2 - 21x + 18$, $y = 3(x-3.5)^2 - 18.75$.

24 א. $f(x) = (x+5)(x-1)$. ב. $f(x) = (x-6)(x-9)$.