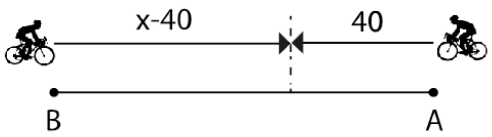
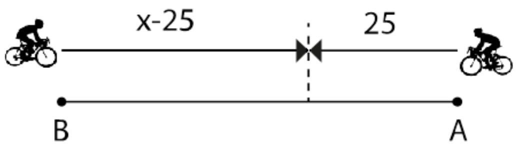
פתרון מלא - מבחן 1

שאלה 1:
*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**



נסמן את המרחק בין A ל-B בתור x.
לפי הנתון הראשון, הרוכב מ-B פגש את הרוכב המהיר מ-A במרחק 40 ק"מ מ-A כפי שנראה בשרטוט.
נסמן את זמן נסיעתם עד המפגש באמצעות t, ונחשב את מהירויותיהם, על ידי חילוק הדרך בזמן.

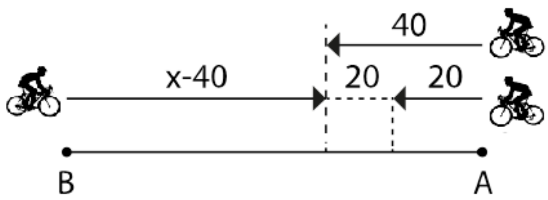
נתון ראשון	מהירות	זמן	דרך
הרוכב המהיר שיצא מ-A	$\frac{40}{t}$	t	40
הרוכב שיצא מ-B	$\frac{x-40}{t}$	t	$x-40$



לפי הנתון השני, הרוכב מ-B פגש את הרוכב האיטי מ-A במרחק 25 ק"מ מ-A כמתואר בשרטוט.

מהירותו של הרוכב שיצא מ-B נשארה זהה, ולכן
נוכל לחשב את זמן הרכיבה שלו, על ידי חילוק הדרך במהירות.
זמן זה זהה לזמן הנסיעה של הרוכב האיטי שיצא מ-A, ולכן נוכל לחשב כעת גם את מהירותו של הרוכב האיטי שיצא מ-A, על ידי חלוקת הדרך בזמן.

נתון שני	מהירות	זמן	דרך
הרוכב האיטי שיצא מ-A	$\frac{25(x-40)}{t(x-25)}$	$\frac{t(x-25)}{x-40}$	25
הרוכב שיצא מ-B	$\frac{x-40}{t}$	$\frac{t(x-25)}{x-40}$	$x-25$



לפי הנתון השלישי, בעת הפגישה הראשונה, שהתרחשה במרחק 40 ק"מ מ-A, המרחק בין שני הרוכבים שיצאו מ-A היה 20 ק"מ. כלומר, הרוכב האיטי שיצא מ-A עבר 20 ק"מ (40-20 =) בפרק זמן שאורכו t (הזמן שחלף מרגע היציאה עד למפגש הראשון).

על פי מה שמצאנו עד כה, מהירותו של הרוכב האיטי היא: $\frac{25(x-40)}{t(x-25)}$. בזמן t הוא עבר 20 ק"מ, ולכן:

$$V\cdot T=S\rightarrow\frac{25(x-40)}{\cancel{t}(x-25)}\cdot\cancel{t}=20\rightarrow25(x-40)=20(x-25)\rightarrow5x=500\rightarrow\boxed{x=100\text{ ק"מ}}$$

שאלה 2:

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**

א. הסדרה A_n היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת. כמו בכל סדרה הנדסית, גם כאן הנוסחה לאיבר הכללי היא: $A_n = A_1 \cdot q^{n-1}$, אך במקרה זה, המנה q היא <u>שבר חיובי</u>. כלומר מתקיים: $0 < q < 1$.

כדי להוכיח כי שתי הסדרות החדשות (C_n, B_n) הן גם סדרות הנדסיות אינסופיות יורדות, עלינו להראות שהמנה של <u>כל אחת מהן</u> היא ערך כלשהו בין 0 ל-1. כלומר, להראות שלכל n מתקיים: $0 < \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ וכן $0 < \frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$.

נתחיל בסדרה B_n, אשר מוגדרת על ידי הכלל: $B_n = A_{n+1} \cdot A_{n+3}$. נבדוק אם המנה $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ היא מספר קבוע:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+2} \cdot a_{n+4}}{a_{n+1} \cdot a_{n+3}} = \frac{a_1 \cdot q^{n+1} \cdot a_1 \cdot q^{n+3}}{a_1 \cdot q^n \cdot a_1 \cdot q^{n+2}} = \frac{q^{2n+4}}{q^{2n+2}} = q^{2n+4-(2n+2)} \rightarrow \boxed{q_b = q^2}$$

מצאנו כי המנה של הסדרה B_n היא למעשה $q_b = q^2$. מכיוון שידוע כי $0 < q < 1$ ניתן להסיק כי מתקיים גם: $0 < q_b < 1$, ומכאן שגם הסדרה B_n היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

נבצע את אותה בדיקה עבור הסדרה C_n, המוגדרת על ידי הכלל: $C_n = (A_n)^2$, ולכן:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(a_{n+1})^2}{(a_n)^2} = \frac{(a_1 \cdot q^n)^2}{(a_1 \cdot q^{n-1})^2} = \frac{a_1^2 \cdot q^{2n}}{a_1^2 \cdot q^{2n-2}} = q^{2n-(2n-2)} \rightarrow \boxed{q_c = q^2}$$

מכיוון שידוע כי $0 < q < 1$ ניתן להסיק כי מתקיים גם: $0 < q_c < 1$, ומכאן שגם הסדרה C_n היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

ב. נתון כי סכום הסדרה C_n גדול פי-16 מסכום הסדרה B_n. נסמן: $S_c = 16 \cdot S_b$. נשתמש בנוסחת הסכום לסדרה הנדסית אינסופית יורדת $S = \frac{a_1}{1-q}$ ונקבל:

$$\frac{c_1}{1-q_c} = 16 \cdot \frac{b_1}{1-q_b} \rightarrow \frac{a_1^2}{\cancel{1-q^2}} = 16 \cdot \frac{a_2 \cdot a_4}{\cancel{1-q^2}}$$

$$a_1^2 = 16 \cdot (a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^3) \rightarrow \cancel{a_1^2} = 16 \cdot \cancel{a_1^2} \cdot q^4 \rightarrow 1 = 16q^4 \rightarrow q^4 = \frac{1}{16} \rightarrow q = \pm 0.5$$

לפי הנתונים $0 < q < 1$, ולכן: $\boxed{q = 0.5}$.

ג. התלמיד מחק איברים בסדרה <u>מעבר</u> לאיבר מסוים שמיקומו הסידורי **אי זוגי**. למעשה, הסדרה הפכה מסדרה אינסופית, לסדרה <u>סופית</u> בעלת מספר **אי זוגי** של איברים (הסדרה מתחילה באיבר שמיקומו אי זוגי ומסתיימת באיבר שמיקומו אי זוגי). מכיוון שלא ידוע לנו מהו מיקומו של האיבר במקום האי זוגי שהפך להיות האיבר האחרון בסדרה החדשה נגדיר אותו כ: a_{2n+1}. נתון כי בסדרה החדשה (הסופית) האיבר הראשון גדול פי ארבעה מהאיבר **האמצעי**. כדי להקל על מציאת המיקום הסידורי של האיבר **האמצעי** בסדרה מומלץ לשרטט סקיצה של הסדרה:

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{n}, a_{n+1}, \underbrace{a_{n+2}, \ldots, a_{2n}}_{n}, a_{2n+1}.$$

אם כן, האיבר ה**אמצעי** בסדרה בת מספר אי זוגי של איברים ($2n+1$) הוא a_{n+1}, ולכן: $a_1 = 4 \cdot a_{n+1}$

נשתמש בנוסחת האיבר הכללי בסדרה A_n ונקבל: $a_1 = 4 \cdot a_1 \cdot q^n$

חשוב לשים לב שלמרות מחיקת אינסוף האיברים, מנת הסדרה <u>לא השתנתה</u>, ולכן:

$$\cancel{a_1} = 4 \cdot \cancel{a_1} \cdot (0.5)^n \rightarrow \frac{1}{4} = (0.5)^n \rightarrow (0.5)^2 = (0.5)^n \rightarrow \boxed{n = 2}$$

לסיכום: בסדרה החדשה (הסופית) יש $2n+1$ איברים, ולכן סדרה זו מונה $\boxed{5 \text{ איברים}}$.

שאלה 3: * שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)

א. השאלה עוסקת בשני אצנים (דן ושי) בעלי הסתברויות <u>שונות</u> לסיים בהצלחה מקצה ריצה (p ו-q, בהתאמה). מכיוון שכל אחד מהאצנים רץ שישה או שבעה מקצים (מספר חזרות גבוה) נעדיף להשתמש בנוסחת ברנולי. כדי לקבוע מי אצן מוכשר יותר עלינו למצוא את p ו-q. מביניהם, בעל ההסתברות הגבוהה יותר לסיים מקצה בהצלחה **הוא** האצן המוכשר יותר.

<u>**דן:**</u> ההסתברות שדן יסיים בהצלחה בדיוק ארבעה מקצים ($k=4$) מתוך שבעה ($n=7$), קטנה פי 3 מההסתברות שיסיים בהצלחה בדיוק 3 מקצים ($k=3$) מתוך השבעה ($n=7$). מתקבלת משוואה עם נעלם אחד (p) אותו נוכל למצוא:

$$3\cdot\binom{7}{4}(p)^4(1-p)^3=\binom{7}{3}(p)^3(1-p)^4 \rightarrow 105\cdot(p)^4(1-p)^3=35\cdot(p)^3(1-p)^3 \quad / \quad : 35\cdot(p)^3(1-p)^3 \rightarrow$$

$$3p=(1-p)\rightarrow 4p=1\rightarrow \boxed{p=\frac{1}{4}}$$

שימו לב שיכולנו לחלק את שני האגפים בביטוי $(p)^3(1-p)^3$ מכיוון ששני המרכיבים שלו אינם מתאפסים.

<u>**שי:**</u> ההסתברות ששי יסיים בהצלחה שני מקצים ($k=2$) מתוך שישה ($n=6$) גבוהה פי 20 מההסתברות שיסיים בהצלחה חמישה מקצים ($k=5$) מתוך שישה ($n=6$). מתקבלת משוואה עם נעלם אחד (q) אותו נוכל למצוא:

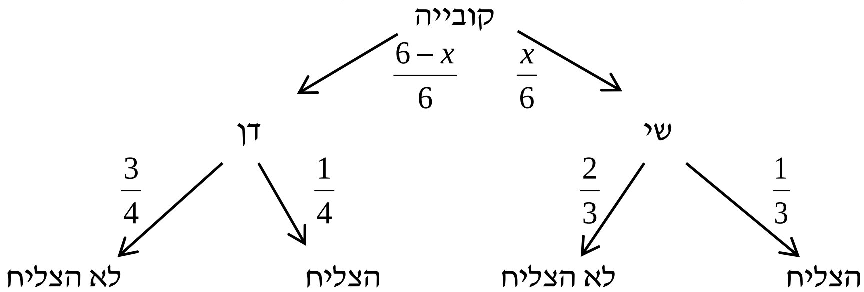
$$\binom{6}{2}(q)^2(1-q)^4=20\cdot\binom{6}{5}(q)^5(1-q)^1 \rightarrow 15\cdot(q)^2(1-q)^4=120\cdot(q)^5(1-q)^1 \quad /: \quad 15\cdot(q)^2(1-q) \rightarrow$$

$$(1-q)^3=8\cdot(q)^3 \quad /\sqrt[3]{\ } \quad \rightarrow 1-q=2q \rightarrow 1=3q \rightarrow \boxed{q=\frac{1}{3}}$$

שימו לב שיכולנו לחלק את שני האגפים בביטוי $(q)^2(1-q)$ מכיוון ששני המרכיבים שלו אינם מתאפסים.

מהשוואה בין p ל-q אנו רואים כי q גבוה יותר ($\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$), כלומר ההסתברות ששי יסיים מקצה בהצלחה גבוהה יותר ולכן <u>שי אצן מוכשר יותר מדן</u>.

ב. סעיף זה בנוי משני שלבים ולכן נוכל לפתור אותו בעזרת תרשים עץ:



כדי למלא את ההסתברויות בכל ענף עלינו להשתמש בתשובה של סעיף א׳ ובנתונים שקיבלנו:
ראשית, עלינו לגלות מהי ההסתברות שכל אחד מהאצנים יישלח לתחרות. החלטה זו נקבעת בהטלת קובייה. אם הקובייה תראה את הספרה x או כל ספרה הקטנה ממנה יישלח שי (שנמצא בסעיף א׳ כאצן המוכשר יותר). כלומר, ההסתברות ששי יישלח לתחרות הוא $\boxed{\frac{x}{6}}$. חשוב להבין איך הגענו לכך, ועל מנת לעשות זאת נבחר x לדוגמא: x=2. במקרה זה תוצאות הקובייה שיגרמו לשליחתו של שי הן 1 או 2. כלומר קיימות 2 אפשרויות מתוך ה-6, ולכן ההסתברות לשליחתו תהיה $\frac{2}{6}$ ובעצם $\boxed{\frac{x}{6}}$. ההסתברות לשליחה של דן תהיה ההסתברות המשלימה לשליחתו של שי לתחרות: $\boxed{\frac{6-x}{6}}=1-\frac{x}{6}$.

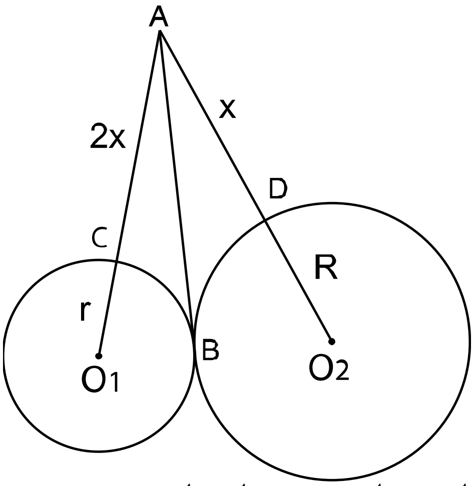
ידוע מסעיף א' כי ההסתברות ששי יסיים מקצה בהצלחה היא $\frac{1}{3}$ ואילו זו של דן היא $\frac{1}{4}$. נציב זאת בעץ. כעת, נשתמש בנתון היחיד בו עדיין לא השתמשנו: ההסתברות שהמועמד שישתתף בתחרות העירונית יסיים את הריצה בהצלחה נמוכה ב- $\frac{7}{18}$ מההסתברות שהוא לא יסיים אותו בהצלחה.

ההסתברות שהמועמד שנשלח (דן או שי) יסיים את הריצה בהצלחה, לפי העץ, היא: $\frac{x}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{6-x}{6}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{x}{18}+\frac{6-x}{24}}$

ההסתברות שהמועמד שנשלח (דן או שי) לא יסיים את הריצה בהצלחה היא: $\frac{x}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{6-x}{6}\cdot\frac{3}{4}=\boxed{\frac{2x}{18}+\frac{18-3x}{24}}$.

נתון שההסתברות להצלחה נמוכה ב- $\frac{7}{18}$ מההסתברות לכישלון, ולכן:

$$\frac{x}{18}+\frac{6-x}{24}+\frac{7}{18}=\frac{2x}{18}+\frac{18-3x}{24} \rightarrow \frac{28+4x+18-3x}{72}=\frac{54-9x+8x}{72} \rightarrow x+46=54-x \rightarrow 2x=8 \rightarrow \boxed{x=4}$$



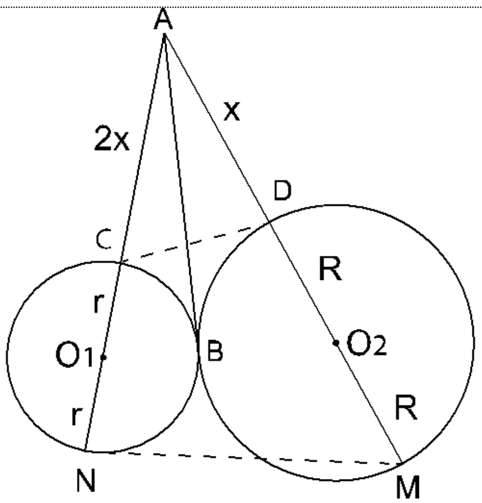
שאלה 4

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**

א. סעיף זה הינו סעיף קלאסי לתרגילים שעוסקים בפרופורציות במעגל. נתחיל בהגדרת כל הצלעות שמשתתפות בו.

1)	נסמן $AD = x$ ולכן $AC = 2x$	נתון $AC = 2AD$
2)	נסמן r רדיוס המעגל O_1, R רדיוס המעגל O_2, ומכיוון שנתון כי $S_{O_2} = 25S_{O_1}$ נקבל:	
3)	$25\pi r^2 = \pi R^2 \Rightarrow \boxed{R = 5r}$	נוסחת שטח המעגל וחישוב

בתרגיל נתון כי הישרים AO_1 ו- AO_2 חותכים את המעגלים. חשוב שנשים לב כי הישרים AO_1 ו- AO_2 אמנם חותכים את המעגל בנקודה אחת, אך <u>אינם</u> ה"חותכים" שעליהם מדובר במשפט "שני החותכים" של הפרופורציה במעגל, כי <u>אינם חותכים את המעגל בשתי נקודות</u>. כדי שנוכל להשתמש במשפט זה, נמשיך בבניית עזר את AO_2 עד לנקודה M, ואת AO_1 עד לנקודה N.



4)	$DM = 2R = 10r$	קוטר במעגל O_2 ומסעיף (3)
5)	$CN = 2r$	קוטר במעגל O_1.

כעת נוכל להשתמש במשפט החותך והמשיק למעגל היוצאים מאותה נקודה, עבור כל אחד מהמעגלים:

6)	במעגל O_1: $AC \cdot AN = AB^2$	אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק
7)	במעגל O_2: $AD \cdot AM = AB^2$	כנ"ל
8)	$AC \cdot AN = AD \cdot AM$	כלל המעבר מ-(6) ו-(7)
9)	$2x \cdot (2x + 2r) = x(x + 10r)$ $\Downarrow$ $x = 2r$	הצבה מסעיפים (1), (4) ו-(5)
10)	$\boxed{AD = 2r}$, $\boxed{AC = 4r}$ **מש"ל א**	מתוך (1) ו-(9)

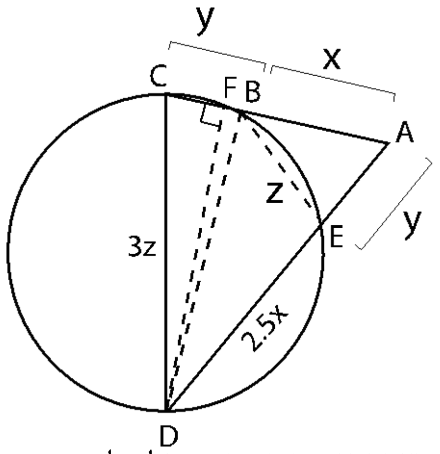
ב. נתון כי שטח המרובע CDMN הוא 40 סמ"ר ואנו מתבקשים לחשב את שטח המשולש ΔACD . נשים לב כי סכום שני השטחים הללו הוא השטח הכולל של משולש ΔAMN . זהו <u>רמז לשימוש ביחס הדמיון בין שטחי המשולשים</u>.
נתחיל בהוכחת הדמיון בין המשולשים ΔACD ו- ΔAMN :

11)	$\measuredangle NAM = \measuredangle CAD$	זווית משותפת
12)	$\frac{AD}{AN} = \frac{AC}{AM} \to \frac{2r}{6r} = \frac{4r}{12r} \to \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	קיים אותו היחס בין הצלעות המתאימות בשני המשולשים
13)	$\Downarrow$ $\Delta AMN \sim \Delta ACD$	לפי משפט דמיון צ.ז.צ. נובע מ-(11) ו-(12)
14)	$\left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \frac{S_{ACD}}{S_{AMN}} \to \left(\frac{2r}{6r}\right)^2 = \frac{S_{ACD}}{S_{ACD}+S_{CDMN}}$	במשולשים דומים יחס הדמיון בריבוע שווה ליחס השטחים
15)	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{S_{ACD}}{S_{ACD}+40} \to \frac{1}{9} = \frac{S_{ACD}}{S_{ACD}+40}$	
16)	$\Downarrow$ $\boxed{S_{ACD} = 5}$ סמ"ר **מש"ל ב'**	

ג. מצאנו ב-(13) שהמשולשים דומים : $\Delta AMN \sim \Delta ACD$.

17)	$\measuredangle AMN = \measuredangle ACD = \alpha$	נובע מ-(13) + סימון
18)	$\measuredangle ACD + \measuredangle NCD = 180^0$	סכום זויות צמודות הוא 180^0
19)	$\measuredangle AMN + \measuredangle NCD = 180^0$	מ-(17) ו-(18)
22)	$\Downarrow$ המרובע CDMN הוא בר חסימה **מש"ל ג'**	מרובע שבו סכום זוג זויות נגדיות הוא 180^0, ניתן לחסימה במעגל (בר חסימה)

שאלה 5: * שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)



א. בסעיף זה נשתמש בשלושה משתני עזר, מכיוון שבאמצעותם קל יותר להביע יחסי פרופורציה. בכל שלב נצמצם את מספר המשתנים ברגע שנגלה את יחסי הפרופורציה.

נתחיל ממשפט החותכים למעגל, נמשיך לדמיון המשולשים $\Delta BAE \sim \Delta DAC$, ונסיים את הסעיף באמצעות תכונת מרובע החוסם מעגל.

1)	$AE = BC = y$	נתון+ סימון
2)	$DE = 2.5AB$	נתון
3)	מרובע BCDE חסום מעגל	נתון
4)	$DE = 2.5x$, $AB = x$	סימון
5)	$AC \cdot AB = AD \cdot AE \to (x+y)x = (y+2.5x)y \to$ $x^2 - 1.5xy - y^2 = 0 \to (x-2y)\left(x+\frac{y}{2}\right) = 0 \to x = 2y, \cancel{x = -\frac{y}{2}}$ (אורכים הם תמיד חיוביים ולכן פסלנו את הפתרון $x = -\frac{y}{2}$).	שני חותכים למעגל היוצאים מאותה נקודה, מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.
6)	$DE = 5y$, $AB = 2y$	נובע מ-(4) ו-(5)
7)	$\measuredangle BAE = \measuredangle DAC$	זווית משותפת
8)	$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \to \frac{2y}{6y} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}$	נובע מ-(1) ו-(6) - יחס הצלעות לצידי הזווית המשותפת
9)	$\Delta BAE \sim \Delta DAC$	לפי משפט דמיון 1 : צ.ז.צ
10)	$\frac{BE}{CD} = \frac{1}{3} \to BE = z \to CD = 3z$	יחס דמיון נובע מ-(9)
11)	$BE + CD = BC + DE \to z + 3z = y + 5y \to z = 1.5y$	במרובע החוסם מעגל, סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום זוג הצלעות הנגדיות השני.
12)	$\frac{CD}{AE} = \frac{3z}{y} = \frac{4.5y}{y} = \boxed{4.5}$	נובע מ-(1), (10) ו-(11) **מש״ל א׳**

ב. על מנת שהישר BD יהיה קוטר המעגל, הזווית ההיקפית הנשענת עליו, $\measuredangle BED$, מוכרחה להיות בת 90^0. נוכיח כי הדבר אינו אפשרי : אם $\measuredangle BED$ היא בת 90^0, אז המשולש ΔAEB הוא ישר זווית. נבדוק האם מתקיים בו משפט פיתגורס :

$$AE^2 + EB^2 \stackrel{?}{=} AB^2 \to y^2 + 2.25y^2 \stackrel{?}{=} 4y^2 \to 3.25y^2 \neq 4y^2$$

ניתן לראות כי הדבר לא ייתכן, ולכן הזווית $\measuredangle BED$ אינה בת 90^0, ומכאן ש-$\boxed{BD \text{ אינו יכול להיות קוטר במעגל}}$.

מש״ל ב׳

ג. קל למצוא את יחס השטחים של שני משולשים בעלי גובה זהה : נוכיח כי יחס השטחים שלהם כיחס הבסיסים שלהם. לצורך כך נעביר את הגובה המשותף בבניית עזר :

13)	$S_{\Delta ABD} = 72$ סמ״ר	נתון
14)	DF גובה לצלע AC	בניית עזר

15) $S_{\Delta ABD}=\frac{AB\cdot DF}{2}\rightarrow S_{\Delta ABD}=\frac{2y\cdot DF}{2}\rightarrow S_{\Delta ABD}=y\cdot DF$ חישוב שטח המשולש ΔABD

16) $S_{\Delta BCD}=\frac{BC\cdot DF}{2}\rightarrow S_{\Delta BCD}=\frac{y\cdot DF}{2}$ חישוב שטח המשולש ΔBCD

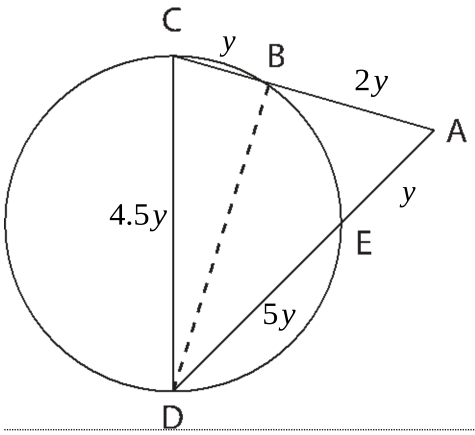
17) $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{\cancel{y\cdot DF}}{\frac{\cancel{y\cdot DF}}{2}}=2\rightarrow\frac{72}{S_{\Delta BCD}}=2\rightarrow S_{\Delta BCD}=36$ נובע מ-(13), (15) ו-(16)

18) $S_{\Delta ABE}=K$ סימון

19) $\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta ADC}}=\frac{K}{108}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\rightarrow 9K=108\rightarrow K=12$ יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון

20) $S_{BCDE}=108-12=$ $\boxed{\text{96 סמ״ר}}$ חיסור שטחים **מש״ל ג׳**

ד. בסעיף זה, השאלה הופכת לבעיה טריגונומטרית.



21) נסמן את הזווית $\measuredangle ABD=\beta$, ומכאן ש: $\measuredangle CBD=180^\circ-\beta$ זוויות צמודות משלימות ל- 180°

23) נביע כל אחד מהרדיוסים R_1 ו- R_2 באמצעות משפט הסינוסים במשולשים ΔBCD ו- ΔABD:

$$\frac{6y}{\sin\beta}=2R_2\rightarrow R_2=\frac{3y}{\sin\beta}\qquad\qquad \frac{4.5y}{\sin(180^\circ-\beta)}=2R_1\rightarrow R_1=\frac{2.25y}{\sin\beta}$$

24) נחשב את היחס שבין שני הרדיוסים:

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{\frac{2.25y}{\sin\beta}}{\frac{3y}{\sin\beta}}\rightarrow\frac{R_1}{R_2}=\frac{2.25\cancel{y}}{\cancel{\sin\beta}}\cdot\frac{\cancel{\sin\beta}}{3\cancel{y}}\rightarrow\boxed{\frac{R_1}{R_2}=\frac{3}{4}}$$

מש״ל ד׳

שאלה 6 * שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)

א. 1) הפונקציה מוגדרת כאשר הביטוי בתוך השורש $\sqrt{a-x}$ הוא אי שלילי. עם זאת, מכיוון שהביטוי $\sqrt{a-x}$ מופיע גם במכנה, עלינו לוודא שהוא אינו מתאפס. מכאן שהפונקציה מוגדרת כאשר $a-x>0$ ולאחר סידור: $\boxed{x<a}$.

2) בטרם נגזור את הפונקציה, נבצע תחילה מכנה משותף בכדי שיהיה נוח יותר לגזור:

$$f(x)=\sqrt{a-x}+\frac{1}{\sqrt{a-x}}\to f(x)=\sqrt{a-x}\cdot\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}}+\frac{1}{\sqrt{a-x}}\to\boxed{f(x)=\frac{a-x+1}{\sqrt{a-x}}}$$

נגזור את הפונקציה:

$$f'(x)=\frac{-1\cdot\sqrt{a-x}-\dfrac{-1\cdot(a-x+1)}{2\sqrt{a-x}}}{\left(\sqrt{a-x}\right)^2}\to\boxed{f'(x)=\frac{-\sqrt{a-x}+\dfrac{a-x+1}{2\sqrt{a-x}}}{a-x}}$$

נשווה את הנגזרת ל-0, ונמצא את שיעורי נקודת הקיצון:

$$f'(x)=\frac{-\sqrt{a-x}+\dfrac{a-x+1}{2\sqrt{a-x}}}{a-x}=0\to-\sqrt{a-x}+\frac{a-x+1}{2\sqrt{a-x}}=0\to-2(a-x)+a-x+1=0\to$$

$$-2a+2x+a-x+1=0\to x-a+1=0\to\boxed{x=a-1}$$

ניעזר בטבלת עלייה וירידה ונמצא את סוגה של נקודת הקיצון:

תחום x	$x<a-1$	$x=a-1$	$a-1<x<a$	$x=a$
נציב בנגזרת	$x=a-2$	קיצון	$x=a-0.5$	אסימפטוטה
סימן הנגזרת	שלילי		חיובי	
הפונקציה עולה/יורדת	↘	Min	↗	

נציב $x=a-1$ במשוואת הפונקציה $f(x)$ ונמצא את שיעור ה-y של נקודת הקיצון:

$$f(a-1)=\sqrt{a-(a-1)}+\frac{1}{\sqrt{a-(a-1)}}=\sqrt{1}+\frac{1}{\sqrt{1}}=2$$

כלומר, שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה הם: $\boxed{\min(a-1,2)}$.

3) נציב בפונקציה $x=0$ ונמצא את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה-y:

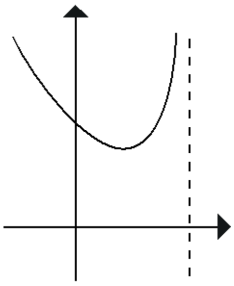
$$f(0)=\sqrt{a-0}+\frac{1}{\sqrt{a-0}}\to f(0)=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\to f(0)=\frac{a+1}{\sqrt{a}}\to\boxed{\left(0,\frac{a+1}{\sqrt{a}}\right)}$$

נציב בפונקציה $y=0$ ונמצא את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה-x:

$$0=\sqrt{a-x}+\frac{1}{\sqrt{a-x}}$$

מכיוון שסכום של שני ביטויים **חיוביים** הוא <u>בהכרח</u> ביטוי **חיובי**, הפונקציה אינה מתאפסת ולא קיימות נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

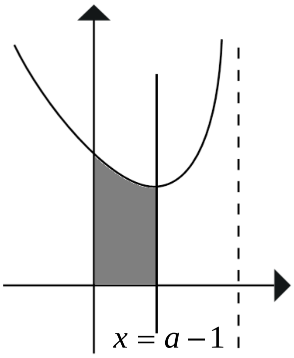
ב. כיוון שנתון $1<a$, הרי שנקודת הקיצון מתקבלת ברביע הראשון ולכן השרטוט:



ג. 1) הפונקציה $g(x)=\left[f(x)\right]^2-2$, לאחר הצבת $f(x)$ היא: $g(x)=\left[\sqrt{a-x}+\frac{1}{\sqrt{a-x}}\right]^2-2$. נעלה בריבוע ונסדר את משוואת הפונקציה $g(x)$:

$$g(x)=\left(\sqrt{a-x}\right)^2+2\cdot\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}}+\left(\frac{1}{\sqrt{a-x}}\right)^2=a-x+2+\frac{1}{a-x}-2\rightarrow\boxed{g(x)=a-x+\frac{1}{a-x}}$$

2) הישר $x=a-1$ חותך את גרף הפונקציה בנקודת הקיצון שלה, ולכן השטח הכלוא ברביע הראשון בין ישר זה, לבין גרף $g(x)$ הוא השטח המסומן באפור בשרטוט:



$x=a-1$

בכדי להביע את נפח גוף הסיבוב נעלה בריבוע את הפונקציה $g(x)$, נבצע את האינטגרל, ולבסוף נכפיל את התוצאה ב- π:

$$V=\pi\cdot\int_0^{a-1}\left(a-x+\frac{1}{a-x}\right)^2dx\rightarrow V=\pi\cdot\int_0^{a-1}\left[(a-x)^2+2+\frac{1}{(a-x)^2}\right]dx\rightarrow V=\pi\cdot\int_0^{a-1}\left[(a-x)^2+2+(a-x)^{-2}\right]dx$$

$$V=\pi\cdot\left[\frac{(a-x)^3}{-3}+2x+\frac{(a-x)^{-1}}{1}\right]\Bigg|_0^{a-1}\rightarrow V=\pi\cdot\left[\frac{(a-x)^3}{-3}+2x+\frac{1}{a-x}\right]\Bigg|_0^{a-1}\rightarrow$$

$$V=\pi\cdot\left[\frac{(a-a+1)^3}{-3}+2(a-1)+\frac{1}{a-a+1}-\frac{a^3}{-3}-\frac{1}{a}\right]\rightarrow V=\pi\cdot\left[-\frac{1}{3}+2a-2+1+\frac{a^3}{3}-\frac{1}{a}\right]$$

נסדר באמצעות מכנה משותף ונקבל כי נפח גוף הסיבוב הוא: $V=\pi\cdot\left[\frac{a^4+6a^2-4a-3}{3a}\right]$.

לפי הנתון, נפח גוף סיבוב זה שווה ל- $\frac{\pi\cdot\left(a^3+13\right)}{3}$. נשווה ונקבל:

$$\cancel{\pi}\cdot\left[\frac{a^4+6a^2-4a-3}{\cancel{3}a}\right]=\frac{\cancel{\pi}\cdot\left(a^3+13\right)}{\cancel{3}}\rightarrow a^4+6a^2-4a-3=a^4+13a\rightarrow 6a^2-17a-3=0$$

פתרונות המשוואה הם: $a=3$ או $\cancel{a=-\frac{1}{6}}$. לפי הנתון $a>1$, נקבל שהפתרון הנכון הוא: $\boxed{a=3}$.

שאלה 7 * שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)

א. הפונקציה $f(x)=-2x^2$ היא פרבולה רציפה. כעת נתבונן בפונקציה $g(x)=\tan(x^2)$:

הפונקציה $g(x)=\tan(x^2)$, ניתנת לכתיבה כך : $g(x)=\frac{\sin(x^2)}{\cos(x^2)}$, ומכאן שהיא אינה מוגדרת כאשר : $\cos(x^2)=0$.

כלומר, לגרף הפונקציה $g(x)=\tan(x^2)$ יש אסימפטוטות אנכיות.

אכן ניתן לראות כי גרף 2 הוא רציף ולגרף 1 יש אסימפטוטות אנכיות. מכאן שגרף 1 מתאים לפונקציה $g(x)=\tan(x^2)$, ואילו **גרף 2 מתאים לפונקציה $f(x)=-2x^2$**.

ב. בנקודות A ו-B האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה $g(x)$ חותכות את ציר ה-x.

הפונקציה $g(x)=\tan(x^2)$, ניתנת לכתיבה כך : $g(x)=\frac{\sin(x^2)}{\cos(x^2)}$, ומכאן שהיא אינה מוגדרת כאשר : $\cos(x^2)=0$.

פתרון המשוואה הוא : $x^2=\frac{\pi}{2}+\pi k$, עם זאת מכיוון שברצוננו לקבל את שני הפתרונות **הקרובים ביותר לראשית הצירים** לפי השרטוט, נשמיט את התוספת המחזורית πk :

$$x^2=\frac{\pi}{2}\rightarrow x=\pm1.25\rightarrow \boxed{A(-1.25,0)},\ \boxed{B(1.25,0)}$$

ג. נפתור סעיף זה בדרך גרפית. ניתן לראות בסקיצה כי הנקודה $C(0.43\pi,-3.67)$ היא נקודת החיתוך של הגרפים $f(x)=-2x^2$ ו- $g(x)=\tan(x^2)$, ומכאן <u>ששיעוריה הם גם פתרון המשוואה המבוקשת</u> בתחום הנתון, ולכן :

$$\tan(x^2)=-2x^2\rightarrow \boxed{x=0.43\pi}$$

בשרטוט, ניכר כי הגרפים נחתכים גם בראשית הצירים, והצבה של x=0 מוכיחה את זה. לכן גם x=0 הוא פתרון.

ד. 1. חיתוך עם ציר ה-y : נציב $x=0$:
$$h(0)=0\cdot\sin(0^2)=0\rightarrow \boxed{(0,0)}$$

חיתוך עם ציר ה-x : נציב $y=0$:
$$0=x\cdot\sin(x^2)\rightarrow x=0 \quad \text{או} \quad \sin(x^2)=0\rightarrow x^2=\pi k$$

מכיוון שהתחום הנתון הוא $0\le x\le 2.1$ מספיק לבחור בפתרון החיובי :
$$x=\sqrt{\pi k}\rightarrow x=1.77\rightarrow \boxed{(1.77,0)}$$

2. נגזור את הפונקציה $h(x)=x\cdot\sin(x^2)$ ונשווה ל-0 :

$$h'(x)=\sin(x^2)+2x^2\cos(x^2)=0\rightarrow \sin(x^2)=-2x^2\cos(x^2)$$

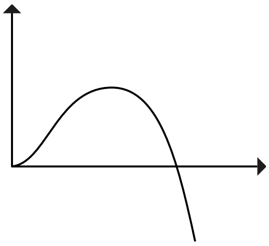
מכיוון ש : $\cos(x^2)\neq 0$, ניתן לחלק ב- $\cos(x^2)$:
$$\frac{\sin(x^2)}{\cos(x^2)}=-2x^2\rightarrow \boxed{\tan(x^2)=-2x^2}$$

<u>משוואה זו זהה למשוואה מסעיף ג',</u> ולכן פתרונה בתחום $0\le x\le 2.1$ הוא : $x=0.43\pi$. נשים לב כי לפי השרטוט, וגם בהצבה, מתקבל פתרון נוסף למשוואה כאשר : $x=0$. ניעזר בטבלת עליה וירידה למציאת סוג נקודת הקיצון :

תחום x	$x=0$	$0<x<0.43\pi$	$x=0.43\pi$	$0.43\pi<x<2.1$	$x=2.1$
נציב בנגזרת	קיצון בקצה התחום	$x=\frac{\pi}{12}$	קיצון	$x=\frac{\pi}{6}$	קיצון בקצה התחום
סימן הנגזרת		חיובי		שלילי	
הפונקציה עולה /יורדת	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min

נציב בפונקציה $h(x)$ את שיעור ה-x של נקודת הקיצון הפנימית : $x=0.43\pi$ ונקבל : $\boxed{Max(0.43\pi,1.31)}$.

.3



ה. בכדי למצוא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לציר ה-x ברביע הראשון, נחשב את האינטגרל:

$$S=\int_0^{1.77} x\cdot\sin(x^2)dx$$

כדי לבצע אינטגרציה לביטוי $x\cdot\sin(x^2)$ נצטרך להשתמש בשיטת ההצבה. ראשית, נסמן: $u=x^2$.

נגזור את שני אגפי המשוואה ונקבל: $\frac{du}{dx}=2x$. נבודד את dx ונקבל: $\boxed{dx=\frac{du}{2x}}$.

נחזור לאינטגרל לאחר הצבת u: $S=\int x\cdot\sin(u)dx$ ונציב בו: $dx=\frac{du}{2x}$:

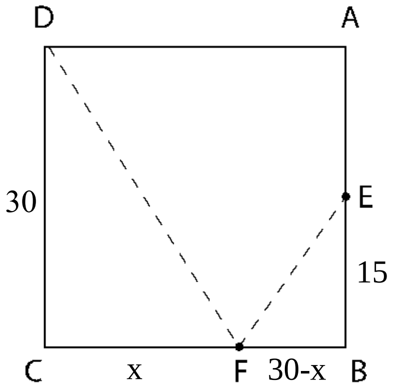
$$S=\int x\cdot\sin(u)dx\rightarrow\int\cancel{x}\cdot\sin(u)\cdot\frac{du}{2\cancel{x}}\rightarrow\int\frac{\sin(u)}{2}du$$

רק בשלב זה, <u>לאחר</u> סידור האינטגרל עבור u נבצע את האינטגרציה עצמה: $\int\frac{\sin(u)}{2}du=\frac{-\cos u}{2}$

נציב בחזרה $u=x^2$ ונקבל את האינטגרל הסופי של הביטוי $x\cdot\sin(x^2)$ והוא: $\frac{-\cos(x^2)}{2}$.

כעת נחזור ונבצע את האינטגרל $S=\int_0^{1.77} x\cdot\sin(x^2)dx$ במלואו:

$$S=\int_0^{1.77} x\cdot\sin(x^2)dx\rightarrow S=\left.\frac{-\cos(x^2)}{2}\right|_0^{1.77}\rightarrow\left(-\frac{\cos(1.77^2)}{2}\right)-\left(-\frac{\cos(0^2)}{2}\right)=0.5+0.5\rightarrow\boxed{S=1\text{יח״ר}}$$



שאלה 8:

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**

א. זוהי בעיית קיצון. פונקציית המטרה היא זמן התנועה הכולל של הכדור. לאחר הרכבת הפונקציה, נגזור ונשווה את הנגזרת ל-0 בכדי למצוא את נקודת המינימום.

את זמן תנועת הכדור נבטא באמצעות חילוק הדרך שעבר הכדור (הקטעים DF ו- FE) במהירות תנועתו : 10 מטר לשנייה.

נסמן : $CF = x$, ובהתאמה : $FB = 30 - x$.
כעת נוכל להביע את אורכי הקטעים DF ו- FE באמצעות משפט פיתגורס :

$$DF = \sqrt{x^2 + 30^2} \rightarrow DF = \sqrt{x^2 + 900}$$
$$FE = \sqrt{(30-x)^2 + 15^2} \rightarrow FE = \sqrt{x^2 - 60x + 1125}$$

כלומר, פונקציית המטרה המתארת את זמן תנועת הכדור היא :
$$\boxed{f(x) = \frac{\sqrt{x^2+900} + \sqrt{x^2-60x+1125}}{10}}$$

נגזור נשווה ל-0 ונעשה מכנה משותף :

$$f'(x) = \cancel{\frac{1}{10}} \cdot \left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+900}} + \frac{\cancel{2}(x-30)}{\cancel{2}\sqrt{x^2-60x+1125}} \right) = 0 \rightarrow x\sqrt{x^2-60x+1125} + (x-30)\sqrt{x^2+900} = 0$$

נעביר אגף ונעלה בריבוע כדי "להיפטר" מהשורש :

$$x^2(x^2 - 60x + 1125) = (x^2 - 60x + 900)(x^2 + 900) \rightarrow$$
$$\cancel{x^4} - \cancel{60x^3} + 1125x^2 = \cancel{x^4} + 900x^2 - \cancel{60x^3} - 54000x + 900x^2 + 810000 \rightarrow 675x^2 - 54000x + 810000 = 0 \rightarrow$$
$$x^2 - 80x + 1200 = 0 \rightarrow \boxed{x = 20},\ \cancel{x = 60}$$

הפתרון $x = 60$ נפסל, מכיוון שהצלע CF לא יכולה להיות ארוכה מ-30 מטר.
לאחר פתרון של משוואה אי רציונאלית, עלינו לבדוק כי הפתרון שמצאנו **אכן** פותר את המשוואה המקורית. נבדוק כי הפתרון $x = 20$ מקיים את המשוואה שלפני ההעלאה בריבוע :

$$20\sqrt{20^2 - 60 \cdot 20 + 1125} + (20 - 30)\sqrt{20^2 + 900} = 0$$

על ידי הצבה ניתן לראות כי מתקבל פסוק אמת.
לבסוף, נבדוק את סוג הנקודה $x = 20$ באמצעות הצבה בטבלת עלייה וירידה :

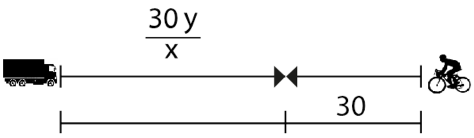
תחום x	$x = 0$	$0 < x < 20$	$x = 20$	$20 < x < 30$	$x = 30$
נציב בנגזרת	קצה התחום	$x = 10$	קיצון	$x = 25$	קצה התחום
סימן הנגזרת		שלילי		חיובי	
הפונקציה עולה/יורדת		$\searrow$	Min	$\nearrow$	

כלומר זמן התנועה הכולל של הכדור הוא מינימלי כאשר $\boxed{CF = 20 \text{ מטר}}$.

פתרון מלא - מבחן 2

שאלה 1

*** שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**



א. הנתונים בשאלה זו מורכבים מהרגיל, ולכן ניעזר בשרטוט עזר :

נמלא בטבלה את הנתונים המתייחסים לפגישה הראשונה :

נסמן את מהירות האופניים ב-x. נמלא תחילה את המהירות והדרך שעברו האופניים. נחלק את הדרך במהירות ונקבל את זמן נסיעתם.

נסמן את מהירות המשאית ב-y. נכפיל את המהירות בזמן ונקבל את הדרך שעברה המשאית עד הפגישה הראשונה.

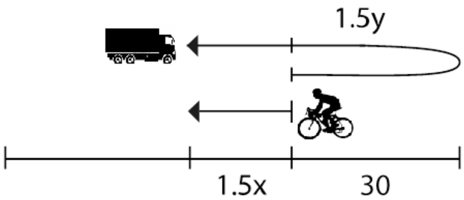
המשאית והאופניים נפגשו ולכן המרחק שבין שתי הערים הוא :

$\boxed{(I)\ \frac{30y}{x}+30}$.

עד הפגישה הראשונה	מהירות	זמן	דרך
אופניים	x	$\frac{30}{x}$	30
משאית	y	$\frac{30}{x}$	$\frac{30y}{x}$

נמלא בטבלה את הנתונים המתייחסים לפגישה השנייה :

האופניים נסעו 90 דקות (1.5 שעות) במהירות x. כלומר, עברו מרחק של $1.5x$ ק״מ. לפי השרטוט ניתן לראות כי במשך זמן נסיעת האופניים, נסעה המשאית 30 ק״מ לכיוון עפולה וחזרה בכדי להשיג את האופניים.



מכאן שהמרחק שעברה המשאית גדול ב-60 ק״מ מהמרחק שעברו האופניים. מתקבלת המשוואה :

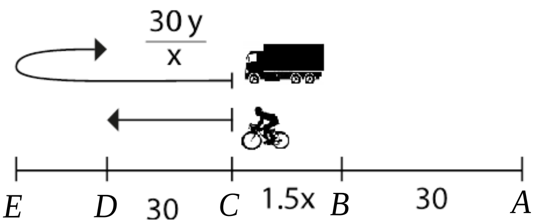
מהפגישה הראשונה לשנייה	מהירות	זמן	דרך
אופניים	x	1.5	$1.5x$
משאית	y	1.5	$1.5y$

$$1.5y=1.5x+60\rightarrow\boxed{(II)\quad y=x+40}$$

נמלא בטבלה את הנתונים המתייחסים לפגישה השלישית :

הדרך המשותפת שעברו המשאית והאופניים שווה למרחק שבין שתי הערים.

מהפגישה השנייה לשלישית	מהירות	זמן	דרך
אופניים	x	$\frac{30}{x}$	30
משאית	y	$\frac{30}{x}$	$\frac{30y}{x}$



ניתן לראות בשרטוט כי הקטע CE שווה $CE=\frac{\frac{30y}{x}+30}{2}$. כמו כן, ניתן לראות כי : $AC=1.5x+30$.

על ידי חיבור קטעים ניתן לראות כי : $AC+CE$ שווה למרחק שבין שתי הערים $AE=\frac{30y}{x}+30$ (לפי I). ולכן :

$$\frac{\frac{30y}{x}+30}{2}+1.5x+30=\frac{30y}{x}+30\rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{30y}{x}+30\right)=1.5x+30$$

נציב את $y=x+40$ במשוואה ונפתור:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{30(x+40)}{x}+30\right)=1.5x+30 \to \frac{30(x+40)}{x}+30=3x+60 \to 30(x+40)=3x^2+30x \to$$

$$30x+1200=3x^2+30x \to x^2=400 \to \boxed{x=20},\ \cancel{x=-20}$$

מכאן שמהירות האופניים היא $\boxed{20}$ קמ"ש ומהירות המשאית היא $\boxed{60}$ קמ"ש.

ב. תחילה נמצא את המרחק שבין שתי הערים:

$$\frac{30y}{x}+30=\frac{30\cdot 60}{20}+30=\boxed{120\ \text{ק"מ}}$$

כעת נמלא את הנתונים בטבלה:

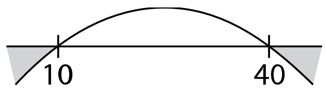
המשאית והאופניים נוסעים זו לקראת זו ומכאן שהמהירות המשותפת שלהם היא סכום המהירויות של שניהם. נבטא את זמן נסיעתם עד הפגישה על ידי חלוקת המרחק בין הערים במהירות המשותפת.

עד הפגישה	מהירות	זמן	דרך
אופניים+משאית	$(20-k)+(60-k)$	$\frac{120}{80-2k}$	120

זמן הנסיעה קצר משעתיים ולכן:

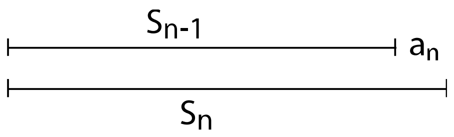
$$\frac{120}{80-2k}<2 \to \frac{120}{80-2k}-2<0 \to \frac{120-2(80-2k)}{80-2k}<0 \to \frac{4k-40}{80-2k}<0 \to (4k-40)(80-2k)<0$$

שני הערכים המאפסים הם: $k=10$ ו- $k=40$. נמקם את המאפסים על ציר ונעביר דרכן את הפרבולה:



פתרון אי השוויון הוא: $k>40$ או $k<10$.
התחום $k>40$ נפסל מכיוון שבמקרה זה מהירות האופניים תהיה שלילית. בנוסף, $k>0$, ולכן תחום המספרים בו נמצא הפרמטר k הוא: $\boxed{0<k<10}$.

שאלה 2 * שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)



א. ניעזר בשרטוט ונראה כי אם נחסר מסכום הסדרה S_n את סכום $n-1$ האיברים הראשונים נישאר עם האיבר a_n אותו אנו מחפשים:

$$S_n - S_{n-1} = n\cdot(n+2)-(n-1)\cdot(n+1) = n^2+2n-n^2+1 \rightarrow \boxed{a_n = 2n+1}$$

כדי להוכיח שהסדרה היא חשבונית, נראה כי ההפרש בין <u>כל שני איברים סמוכים</u> a_n ו- a_{n-1} קבוע ואינו תלוי ב-n:

$$a_n - a_{n-1} = 2n+1-\left(2(n-1)+1\right) = 2n+1-2n+1 \rightarrow \boxed{a_n - a_{n-1} = 2}$$

מכאן שהסדרה חשבונית והפרשה הוא 2.

ב. נתבונן באיבר הכללי $B_n = A_n\cdot(-1)^n$. כאשר n אי זוגי מתקיים $B_n = -A_n$, כאשר n זוגי מתקיים: $B_n = A_n$.

מכאן שהסדרה B_n היא למעשה הסדרה A_n שבה הפכו את סימני האיברים האי זוגיים.

נשים לב: הסדרה B_n <u>אינה</u> סדרה חשבונית. עם זאת, כל האיברים במקומות הזוגיים הם סדרה חשבונית, וכל האיברים במקומות האי זוגיים הם סדרה חשבונית בעלת סימנים הפוכים. נחשב <u>בנפרד</u> את כל אחד מהסכומים, ונחבר אותם:

סכום n האיברים במקומות הזוגיים:

<u>האיבר הראשון</u>: $a_2 = 5$, <u>ההפרש</u>: $2d = 4$, <u>מספר האיברים</u>: n. נביע את הסכום:

$$S = \frac{n}{2}\left(2\cdot 5+4(n-1)\right) = \frac{n}{2}(4n+6) = \frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}}(2n+3) \rightarrow \boxed{S = 2n^2+3n}$$

סכום n האיברים במקומות האי זוגיים בעלי הסימנים ההפוכים:

<u>האיבר הראשון</u>: $-a_1 = -3$, <u>ההפרש</u>: $-2d = -4$, <u>מספר האיברים</u>: n. נביע את הסכום:

$$S = \frac{n}{2}\left(2\cdot(-3)-4(n-1)\right) = \frac{n}{2}(-4n-2) = \frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}}(-2n-1) \rightarrow \boxed{S = -2n^2-n}$$

סכום הסדרה B_{2n} כולה הוא חיבור של שני הסכומים שמצאנו:

$$S_{B_{2n}} = 2n^2+3n-2n^2-n = \boxed{2n}$$

ג. נתבונן בסכומי כל אחת מהסדרות <u>לאחר</u> השינוי המתואר בשאלה:

לכל אחד מאיברי הסדרה B_n הוסיפו m, מכאן שסכום הסדרה B_{2m} הוא:

$$S_{B2m} = (B_1+m)+(B_2+m)+(B_3+m)+.....+(B_{2m}+m)$$

לאחר סידור, נראה כי הסכום הוא גם:

$$S_{B2m} = \underbrace{(B_1+B_2+B_3+....+B_{2m})}_{\text{סכום הסדרה המקורית}} + \underbrace{(m+m+m+....+m)}_{2m \text{ פעמים}}$$

כלומר, סכום הסדרה B_{2m} הוא:

$$S_{B2m} = 2m+2m^2 \rightarrow \boxed{S_{B2m} = 2m(m+1)}$$

את כל אחד מאיברי הסדרה A_n הכפילו פי-m, מכאן שסכום הסדרה A_{2m} הוא:

$$S_{A2m} = A_1\cdot m + A_2\cdot m + A_3\cdot m+....+A_{2m}\cdot m$$

לאחר הוצאת גורם משותף נקבל כי הסכום הוא:

$$S_{A2m} = m\cdot\underbrace{(A_1+A_2+A_3+....+A_{2m})}_{\text{סכום הסדרה המקורית}}$$

כלומר, סכום הסדרה A_{2m} הוא:

$$S_{A2m} = m\cdot\left(2m(2m+2)\right) \rightarrow \boxed{S_{A2m} = 4m^2(m+1)}$$

לפי הנתון, סכום הסדרה A_{2m} גדול פי שמונה מסכום הסדרה B_{2m} (m הוא מספר טבעי) ולכן:

$$S_{A2m} = 8S_{B2m} \rightarrow \cancel{4}m^{\cancel{2}}\cancel{(m+1)} = \cancel{8}\cdot 2\cancel{m}\cancel{(m+1)} \rightarrow \boxed{m=4}$$

שאלה 3: * שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)

א. עופר מגיש מועמדות לשבעה מקומות עבודה סך הכל - שלושה באינטרנט וארבעה טלפונית.
עלינו לחשב את ההסתברות שיקבל תשובה חיובית משישה מקומות מתוך השבעה.
קיימים רק שני תרחישים אפשריים שבהם יקבל שש תשובות חיוביות:

תרחיש 1: עופר יקבל תשובה חיובית מארבע הפניות הטלפוניות וגם משתי פניות באינטרנט.
או
תרחיש 2: עופר יקבל תשובה חיובית משלוש פניות טלפוניות וגם משלוש הפניות באינטרנט.

מכיוון ששני התרחישים אפשריים נחשב את ההסתברות של כל אחד בנפרד ונחבר אותן:

תרחיש 1: עופר יקבל תשובה חיובית מארבע הפניות הטלפוניות וגם משתי פניות באינטרנט
שימו לב! במקרים בהם אנו מעוניינים למצוא הסתברות למאורע אחד וגם למאורע אחר, כאשר האירועים בלתי תלויים זה בזה, עלינו לכפול בין ההסתברויות של כל אחד מהמאורעות:

פניות טלפוניות: n=4, k=4, p=0.4 : $\binom{4}{4}(0.4)^4(0.6)^0 = 0.0256$

פניות באינטרנט: n=3, k=2, p=0.2 : $\binom{3}{2}(0.2)^2(0.8)^1 = 0.096$

לכן, ההסתברות לקבל תשובה חיובית מארבע הפניות הטלפוניות וגם משתי פניות באינטרנט היא:

$0.0256 \cdot 0.096 = \boxed{0.0024576}$.

תרחיש 2: עופר יקבל תשובה חיובית משלוש פניות טלפוניות וגם משלוש הפניות באינטרנט

פניות טלפוניות: n=4, k=3, p=0.4 : $\binom{4}{3}(0.4)^3(0.6)^1 = 0.1536$

פניות באינטרנט: n=3, k=3, p=0.2 : $\binom{3}{3}(0.2)^3(0.8)^0 = 0.008$

לכן, ההסתברות לקבל תשובה חיובית משלוש פניות טלפוניות וגם משלוש פניות באינטרנט היא:

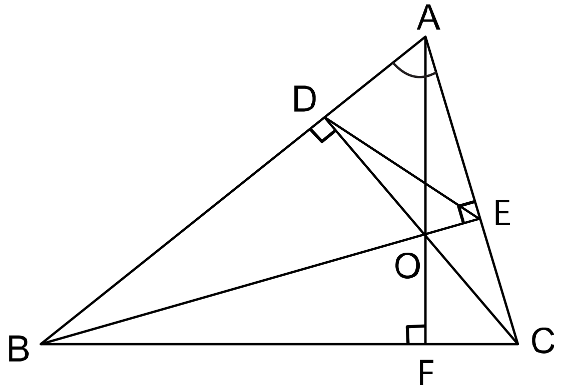
$0.1536 \cdot 0.008 = \boxed{0.0012288}$.

מחיבור ההסתברויות של שני התרחישים האפשריים נקבל את ההסתברות הכללית להצלחתו של עופר:
$0.0024576 + 0.0012288 = \boxed{0.0036864}$.

ב. סעיף זה מתחיל בביטוי "ידוע ש". אשר מעיד על ה**סתברות מותנית**, ולכן עלינו לחשב את ההסתברות למאורע הרצוי מתוך ההסתברות הכללית של "העולם החדש". במקרה זה:
"העולם החדש" כולל את כל המקרים בהם עופר קיבלת תשובה חיובית בדיוק משישה מקומות עבודה.
המאורע הרצוי הוא שכל הפניות הטלפוניות נענו בחיוב.
חשוב לשים לב שבתרגיל זה, בדומה לתרגילי הסתברות רבים אחרים, סעיף ב' נסמך על סעיף א', אשר בו כבר מצאנו את ההסתברות למאורע הרצוי (0.0024576) ואת ההסתברות הכוללת של "העולם החדש" (0.0036864).

כל שנותר לנו לעשות הוא לחלק ביניהן ולקבל: $\frac{0.0024576}{0.0036864} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

שאלה 4 * שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)



א.

1)	$\angle ADC = \angle AEB = 90^{\circ}$	BE, CD גבהים במשולש (נתון)
2)	$\angle BAC = \angle DAC^{\circ}$	זווית משותפת
3)	$\Downarrow$ $\boxed{\Delta AEB \sim \Delta ADC}$ **מש"ל א'**	לפי משפט הדמיון השני ז.ז.

ב. ראשית, נוסיף את הישר DE לשרטוט. שנית, נבחן את המשולשים בהם אנו מעוניינים להוכיח דמיון. בכל אחד מהם יש שתי צלעות אשר הופיעו בדמיון שמצאנו בסעיף א': במשולש ΔADE הופיעו הצלעות AE ו-AD, ובמשולש ΔABC הופיעו הצלעות AB ו-AC. הדבר מרמז לנו שנוכל להיעזר ביחס הדמיון שמצאנו בסעיף א' כדי להוכיח את הדמיון השני.

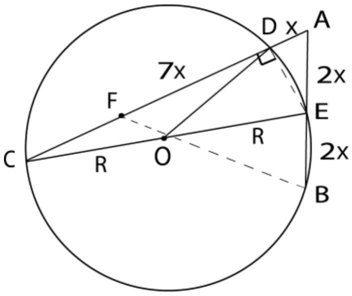
4)	$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$	לפי הדמיון שמצאנו בסעיף א'.
5)	$\angle BAC = \angle DAE$	זווית משותפת
6)	$\Downarrow$ $\boxed{\Delta ADE \sim \Delta ACB}$ **מש"ל ב'**	לפי משפט הדמיון הראשון צ.ז.צ

ג. גם כאן אנו רואים שהנתונים בנוגע לאורכי הצלעות שקיבלנו בסעיף זה תואמים לצלעות המשולשים שהוכחנו עבורם דמיון בסעיף ב. נציב את הנתונים ביחס הדמיון:

7)	$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{4}{AB} = \frac{2}{6} \rightarrow AB =$ 12 ס"מ	
8)	$DB = AB - AD = 12 - 2 \Rightarrow$ $\boxed{DB = \text{10 ס"מ}}$ **מש"ל ג'**	

ד. כדי לחשב את אורך הצלע BC, נשתמש פעמיים במשפט פיתגורס:

$AB^2 = AE^2 + BE^2 \rightarrow 12^2 = 4^2 + BE^2 \rightarrow BE = \sqrt{128}$	משפט פיתגורס במשולש ΔABE
$BC^2 = CE^2 + BE^2 \rightarrow BC^2 = 2^2 + \sqrt{128}^2 \rightarrow \boxed{BC = 11.49}$	משפט פיתגורס במשולש ΔCBE



שאלה 5

א.

(1	$AE = BE$	נתון E אמצע AB
(2	$CO = OE = OD = R$	נתון
(3	$AD = x \rightarrow CD = 7x$	נתון + סימון
(4	$AD \cdot AC = AE \cdot AB \rightarrow x \cdot 8x = 2AE^2 \rightarrow AE = 2x$	שני חותכים למעגל היוצאים מאותה נקודה, מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני
	נעביר את בניית העזר - הקטע ED. ניצור את המשולש ישר הזווית ΔCDE בכדי להביע את x באמצעות R :	
(5	$\prec CDE = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- 90°
(6	$\prec ADE = 90^\circ$	זוויות צמודות משלימות ל- 180°
(7	$DE^2 = AE^2 - AD^2 = 4x^2 - x^2 \rightarrow DE = \sqrt{3}x$	משפט פיתגורס במשולש ΔADE
(8	$CE = 2R$	קוטר, נובע מ-(2)
(9	$CE^2 = CD^2 + DE^2 \rightarrow 4R^2 = 49x^2 + 3x^2 \rightarrow x = 0.277R$	משפט פיתגורס במשולש ΔCDE
(10	$AE = BE = 2x \rightarrow \boxed{BE = 0.55R}$	נובע מ-(1) ו-(9). **מ.ש.ל**
	ב. ניתן לחסום מעגל בתוך מרובע, רק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות האחרות.	
(11	$DE = 0.479R \; , CD = 1.939R$	נובע מ-(3), (7) ו-(9)
(12	$\prec EBC = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר
(13	$BC = \sqrt{CE^2 - BE^2} \rightarrow \sqrt{4R^2 - 0.3025R^2} \rightarrow BC = 1.922R$	משפט פיתגורס במשולש ΔBCE
	נבדוק האם סכום צלעות נגדיות במרובע $BCDE$ שווה לסכום הצלעות הנגדיות השני :	
(14	$BE + CD = 0.55R + 1.939R = 2.489R$	חיבור קטעים
(15	$DE + BC = 0.479R + 1.922R = 2.041R$	חיבור קטעים
(16	**לא ניתן לחסום מעגל בתוך המרובע CDEB**	נובע מ-(14) ו-(15) **מ.ש.ל**
	ג. כדי לחשב את R נשתמש במשפט הקוסינוסים במשולש ΔBCF. תחילה נחשב את צלעות המשולש ואת הזווית $\prec DCB$.	
(17	$CF =$ 1 ס"מ	נתון
(18	$BF + DE = DF + BE$	סכום צלעות נגדיות במרובע החוסם מעגל שווה לסכום הצלעות הנגדיות השני
(19	$DF = CD - CF \rightarrow DF = 1.939R - 1$	חיסור קטעים. נובע מ-(11)
(20	$BF + 0.479R = 1.939 - 1 + 0.55R \rightarrow BF = 2R - 1$	נובע מ-(10), (11), (18) ו-(19)
(21	$\sin \prec DCE = \frac{DE}{CE} \rightarrow \frac{0.479R}{2R} = 0.239 \rightarrow \prec DCE = 13.857^\circ$	טריגו במשולש ישר הזווית ΔCDE
(22	$\tan \prec ECB = \frac{BE}{BC} \rightarrow \frac{0.55R}{1.922R} = 0.286 \rightarrow \prec ECB = 15.96^\circ$	טריגו במשולש ישר הזווית ΔCBE
(23	$\prec DCB = 29.817^\circ$	נובע מ-(21) ו-(24). סכום זוויות

לאחר שמצאנו את הצלעות והזוויות במשולש ΔBCF, נשתמש במשפט הקוסינוסים כדי למצוא את R :

$$BF^2 = CF^2 + BC^2 - 2 \cdot CF \cdot BC \cdot \cos \prec FCB \rightarrow (2R-1)^2 = 1^2 + (1.922R)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1.922R \cdot \cos \prec 29.817^\circ$$

בזהירות רבה, נצמצם, נכנס איברים, נוציא R כגורם משותף ונקבל: $R =$ 2.18 ס"מ **מ.ש.ל.**

שאלה 6 * **שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)**

א. נתון כי לגרף הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x^2-mx}{x^2-10x+4m}$ יש אסימפטוטה אנכית <u>אחת</u> בלבד, אך המכנה שלה מתאפס <u>בשתי</u> נקודות שונות. כלומר, בנוסף לאסימפטוטה האנכית, יש מאפס נוסף שאינו אסימפטוטה ולכן הוא <u>בהכרח</u> מצטמצם עם המונה וזוהי למעשה נקודת אי רציפות סליקה ("חור"). נוציא גורם משותף במונה ונקבל:

$$f(x)=\frac{x(x-m)}{x^2-10x+4m}$$

כדי שניתן יהיה לצמצם את אחד מכופלי המכנה עם המונה, מוכרח להופיע במכנה הביטוי: $(x-m)$.

משמעות הדבר היא ש: $x=m$ <u>בהכרח</u> מאפס את המכנה. נציב $x=m$ במכנה ונשווה אותו ל-0:

$$m^2-10m+4m=0\rightarrow m^2-6m=0\rightarrow m(m-6)=0\rightarrow \boxed{m=0}\ \boxed{\text{או}\ m=6}$$

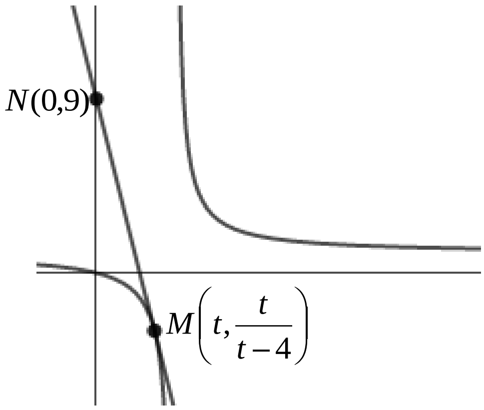
ב. לפי הנתון, $m=6$, ומכאן שהפונקציה היא: $f(x)=\dfrac{x^2-6x}{x^2-10x+24}$. נסדר את הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x(x-6)}{(x-6)(x-4)}$

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $\boxed{x\neq 4\ ,\ x\neq 6}$, ולאחר צמצום הפונקציה היא: $\boxed{f(x)=\dfrac{x}{x-4}}$.

כדי להראות שגרף הפונקציה $f(x)$ יורד בכל תחום ההגדרה, נגזור את הפונקציה:

$$f'(x)=\frac{x-4-x}{(x-4)^2}\rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{-4}{(x-4)^2}}\rightarrow \frac{(-)}{(+)}=(-)$$

ניתן לראות כי המכנה הוא ביטוי ריבועי <u>החיובי</u> לכל $x\neq 4$ והמונה הוא מספר <u>שלילי</u>. מכאן שהנגזרת שלילית לכל x וגרף הפונקציה יורד בכל תחום ההגדרה.



ג. מצורף שרטוט של נתוני השאלה לצורכי הסבר בלבד, אין צורך לשרטט את הפונקציה בשביל לפתור את השאלה.

הנקודה הנתונה $N(0,9)$ **אינה** על גרף הפונקציה $f(x)$, ולכן לא ניתן להשתמש בה ישירות. נסמן את נקודת ההשקה ש**כן נמצאת** על גרף הפונקציה באמצעות t: $M\left(t,\dfrac{t}{t-4}\right)$.

כעת ניתן להביע את שיפוע המשיק בשני אופנים שונים ולהשוות ביניהם.

תחילה נביע את שיפוע המשיק באמצעות שתי הנקודות N ו- M:

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_1}=\frac{\frac{t}{t-4}-9}{t-0}\rightarrow m=\frac{\frac{t-9(t-4)}{t-4}}{t}\rightarrow m=\frac{36-8t}{t(t-4)}\rightarrow \boxed{m=\frac{4(9-2t)}{t(t-4)}}$$

כעת נביע את שיפוע המשיק באמצעות הצבת שיעור ה-x של נקודת ההשקה $\left(t,\dfrac{t}{t-4}\right)$ בנגזרת $f'(x)$:

$$\boxed{f'(t)=\frac{-4}{(t-4)^2}}$$

שני הביטויים מתארים את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה היוצא מהנקודה $(0,9)$, ולכן נשווה ביניהם:

$$\frac{\cancel{4}(9-2t)}{t\cancel{(t-4)}}=\frac{-\cancel{4}}{(t-4)^{\cancel{2}}}\rightarrow (9-2t)(t-4)=-t\rightarrow 9t-36-2t^2+8t+t=0\rightarrow t^2-9t+18=0$$

פתרונות המשוואה הם: $t=3$ ו- $\cancel{t=6}$. עם זאת, הנקודה $t=6$ היא כאמור נקודת אי רציפות סליקה ("חור") בפונקציה, ומכאן שנקודת ההשקה היחידה היא $\boxed{M(3,-3)}$.

ד. לפונקציה $g(x)=\dfrac{x^2-ax+b}{x-c}$ אין אסימפטוטה אנכית והיא אינה מוגדרת <u>רק</u> בנקודה $M\left(3,-3\right)$. כלומר הנקודה M היא בהכרח נקודת אי רציפות סליקה ("חור" בפונקציה). כלומר $x=3$ בהכרח מאפס את המכנה ולכן:

$3-c=0\rightarrow \boxed{c=3}$

כיוון שהנקודה M היא נקודת אי רציפות סליקה, הרי שמוכרח להיות ביטוי במונה המצטמצם עם אותו הביטוי במכנה. בכדי שהמכנה $x-3$ יצטמצם עם המונה x^2-ax+b, המונה חייב להיות מהצורה: $(x-3)(x-k)$.

כלומר, ניתן לכתוב את הפונקציה $g(x)$ כך: $g(x)=\dfrac{(x-3)(x-k)}{x-3}$, ולאחר צמצום: $g(x)=x-k$.

נציב בפונקציה $g(x)$ את שיעורי נקודת אי הרציפות הסליקה $M\left(3,-3\right)$ ונקבל: $-3=3-k\rightarrow \boxed{k=6}$

כעת ניתן להביע את הפונקציה $g(x)$ ללא פרמטרים: $g(x)=\dfrac{(x-3)(x-6)}{x-3}$, ולאחר פתיחת סוגריים:

$$g(x)=\frac{x^2-9x+18}{x-3}$$

מכאן ש: $\boxed{a=9}$, $\boxed{b=18}$ וכמו שמצאנו: $\boxed{c=3}$.

שאלה 7　　　* שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)

א. 1) הפונקציה מוגדרת כאשר הביטוי שבתוך השורש $\sqrt{-\sin x}$ הוא אי שלילי: $-\sin x \geq 0 \to \boxed{\sin x \leq 0}$
באמצעות מעגל היחידה אנו יודעים כי $\sin x$ שלילי ברביעים השלישי והרביעי, כלומר, בתחום $0 < x < 3\pi$ מתקיים:
$\sin x \leq 0$ כאשר $180° \leq x \leq 360°$ וברדיאנים: $\boxed{\pi \leq x \leq 2\pi}$.

2) נגזור את הפונקציה (כנגזרת של מכפלה) ונשווה את הנגזרת לאפס:

$$f'(x) = \frac{-\cos x\cdot(1+\cos x)}{2\sqrt{-\sin x}} - \sin x\cdot\sqrt{-\sin x} = 0 \to -\cos x\cdot(1+\cos x) - 2\sin x\cdot\left(\sqrt{-\sin x}\right)^2 = 0 \to$$

$$-\cos x - \cos^2 x + 2\sin^2 x = 0 \to -\cos x - \cos^2 x + 2\cdot(1-\cos^2 x) = 0 \to -\cos x - \cos^2 x + 2 - 2\cos^2 x = 0 \to$$

$$-3\cos^2 x - \cos x + 2 = 0$$

באמצעות נוסחת השורשים נקבל שתי אפשרויות: $\cos x = -1$ או $\cos x = \frac{2}{3}$. נפתור ונבדוק מי מהפתרונות נמצא בתחום $\pi \leq x \leq 2\pi$:

$\cos x = -1$:
$x = \pi + 2\pi k \to x = \pi$
או $x = -\pi + 2\pi k \to x = \pi$

$\cos x = \frac{2}{3}$:
$x = 0.27\pi + 2\pi k \to$ אין פתרון בתחום
או $x = -0.27\pi + 2\pi k \to \boxed{x = 1.73\pi}$

למעשה, ישנה נקודה פנימית אחת החשודה כקיצון: $x = 1.73\pi$, ובנוסף שתי נקודות קיצון קצה: $x = \pi$ ו- $x = 2\pi$.
ניעזר בטבלת עליה וירידה ונגלה את סוגן:

תחום x	$x=\pi$	$\pi < x < 1.73\pi$	$x = 1.73\pi$	$1.73\pi < x < 2\pi$	$x = 2\pi$
נציב בנגזרת	קיצון בקצה התחום	$x = 1.5\pi$	קיצון	$x = 1.8\pi$	קיצון בקצה התחום
סימן הנגזרת		חיובי		שלילי	
הפונקציה עולה/יורדת	Min	↗	Max	↘	Min

נציב את שלוש הנקודות בפונקציה $f(x)$ ונמצא את שיעורי ה-y שלהן:

$$f(\pi) = \sqrt{-\sin\pi}\cdot(1+\cos\pi) = 0 \to \boxed{\min\ (\pi,0)}$$

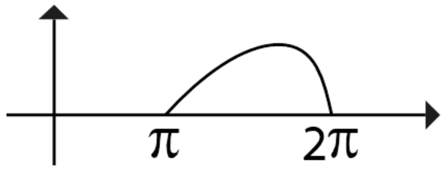
$$f(1.73\pi) = \sqrt{-\sin(1.73\pi)}\cdot(1+\cos(1.73\pi)) = 1.43 \to \boxed{\max\ (1.73\pi,1.439)}$$

$$f(2\pi) = \sqrt{-\sin 2\pi}\cdot(1+\cos 2\pi) = 0 \to \boxed{\min\ (2\pi,0)}$$

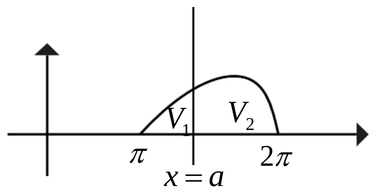
3) למעשה, אין צורך לחפש את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים מכיוון שכבר מצאנו אותן:
תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $\pi \leq x \leq 2\pi$ ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה-y. את שתי נקודות החיתוך עם ציר ה-x כבר מצאנו והן: $\boxed{(\pi,0)}$ ו- $\boxed{(2\pi,0)}$.

4) על סמך טבלת העליה והירידה נוכל לקבוע: **עליה**: $\boxed{\pi < x < 1.73\pi}$, **ירידה**: $\boxed{1.73\pi < x \leq 2\pi}$.

ב.



ג.



נביע את שני נפחי גוף הסיבוב: נעלה את הפונקציה בריבוע, נבצע את האינטגרל ולבסוף נכפיל ב- π :

$$V_1=\pi\int_{\pi}^{a}\left(\sqrt{-\sin x}\cdot(1+\cos x)\right)^2dx\rightarrow \boxed{V_1=\pi\int_{\pi}^{a}-\sin x\cdot(1+\cos x)^2dx}$$

$$V_2=\pi\int_{a}^{2\pi}\left(\sqrt{-\sin x}\cdot(1+\cos x)\right)^2dx\rightarrow \boxed{V_2=\pi\int_{a}^{2\pi}-\sin x\cdot(1+\cos x)^2dx}$$

למעשה, בכדי לחשב את האינטגרל $\int-\sin x\cdot(1+\cos x)^2dx$, ניעזר בשיטת ההצבה:

ראשית, נסמן: $u=1+\cos x$.

נגזור את שני אגפי המשוואה ונקבל: $\frac{du}{dx}=-\sin x$. נבודד את dx ונקבל: $\boxed{dx=\frac{du}{-\sin x}}$.

נחזור לאינטגרל לאחר הצבת u: $\int-\sin x\cdot u^2dx$ ונציב בו: $dx=\frac{du}{-\sin x}$:

$$\int-\sin x\cdot u^2dx=\int\cancel{-\sin x}\cdot u^2\cdot\frac{du}{\cancel{-\sin x}}=\int u^2du$$

רק בשלב זה, לאחר סידור האינטגרל עבור u נבצע את האינטגרציה עצמה: $\int u^2du=\frac{u^3}{3}$

נציב בחזרה $u=1+\cos x$ ונקבל את האינטגרל הסופי של הביטוי $\int-\sin x\cdot(1+\cos x)^2dx$ והוא: $\frac{(1+\cos x)^3}{3}$.

כעת נחזור ונבצע את האינטגרלים במלואם:

$$V_1=\pi\int_{\pi}^{a}-\sin x\cdot(1+\cos x)^2dx\rightarrow V_1=\pi\cdot\left.\frac{(1+\cos x)^3}{3}\right|_{\pi}^{a}\rightarrow V_1=\pi\cdot\frac{(1+\cos a)^3}{3}$$

$$V_2=\pi\int_{a}^{2\pi}-\sin x\cdot(1+\cos x)^2dx\rightarrow V_2=\pi\cdot\left.\frac{(1+\cos x)^3}{3}\right|_{a}^{2\pi}\rightarrow V_2=\pi\cdot\frac{8-(1+\cos a)^3}{3}$$

לפי הנתון, $7V_1=V_2$ ולכן:

$$7\cancel{\pi}\cdot\frac{(1+\cos a)^3}{\cancel{3}}=\cancel{\pi}\cdot\frac{8-(1+\cos a)^3}{\cancel{3}}\rightarrow 7(1+\cos a)^3=8-(1+\cos a)^3\rightarrow 8(1+\cos a)^3=8\rightarrow$$

$$(1+\cos a)^3=1\rightarrow 1+\cos a=1\rightarrow \cos a=0\rightarrow a=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

הפתרון היחיד בתחום $\pi\le x\le 2\pi$ הוא: $\boxed{a=1.5\pi}$ (או במספרים: $\boxed{a=4.71}$).

שאלה 8 * שאלה זו קשה מהרגיל (שאלת אתגר)

א. נסדר את משוואת המשיק הנתון: $2y-x-6=0 \leftarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x+3}$ ונראה כי שיפועו $\frac{1}{2}$. לפי הנתון, הוא משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y, כלומר כאשר $x=0$. נשווה את הנגזרת $f'(x)$ לשיפוע המשיק ונציב $x=0$:
$$f'(0)=\frac{1}{2}\to\frac{1-0}{\sqrt{-0^2+2\cdot 0+a}}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\to\sqrt{a}=2\to\boxed{a=4}$$

כלומר: $f'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{-x^2+2x+4}}$. נציב במשוואת המשיק $x=0$, ונקבל גם כי נקודת ההשקה היא: $\boxed{(0,3)}$.

כעת, נבצע על הנגזרת $f'(x)$ אינטגרל למציאת פונקציה קדומה ונמצא את הפונקציה $f(x)$:
$$\int f'(x)dx=f(x)+c \quad\to\quad \int\frac{1-x}{\sqrt{-x^2+2x+4}}dx=f(x)+c$$

כדי לחשב את האינטגרל: $\int\frac{1-x}{\sqrt{-x^2+2x+4}}dx$, ניעזר בשיטת ההצבה: ראשית, נסמן: $u=-x^2+2x+4$.

נגזור את שני אגפי המשוואה ונקבל: $\frac{du}{dx}=-2x+2$. נבודד את dx ונקבל: $\boxed{dx=\frac{du}{2(1-x)}}$.

נחזור לאינטגרל לאחר הצבת u: $\int\frac{1-x}{\sqrt{u}}dx$ ונציב בו: $dx=\frac{du}{2(1-x)}$:
$$\int\frac{1-x}{\sqrt{u}}dx=\int\frac{\cancel{1-x}}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{2\cancel{(1-x)}}=\int\frac{1}{2\sqrt{u}}du$$

רק בשלב זה, <u>לאחר</u> סידור האינטגרל עבור u נבצע את האינטגרציה עצמה:
$$\int\frac{1}{2\sqrt{u}}du=\sqrt{u}+c$$

נציב בחזרה $u=-x^2+2x+4$ ונקבל את האינטגרל הסופי:
$$\int\frac{1-x}{\sqrt{-x^2+2x+4}}dx=\sqrt{-x^2+2x+4}+c$$

כלומר, הפונקציה הקדומה של $f'(x)$ היא: $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+4}+c$. בכדי למצוא את הפרמטר c, נציב בפונקציה את נקודת ההשקה שמצאנו: $(0,3)$ ונקבל:
$$3=\sqrt{-0^2+2\cdot 0+4}+c\to 3=2+c\to\boxed{c=1}$$

לסיכום: הפונקציה $f(x)$ היא: $\boxed{f(x)=\sqrt{-x^2+2x+4}+1}$.

ב. זוהי בעיית קיצון. פונקציית המטרה היא היקף המלבן. לאחר הרכבת הפונקציה, נגזור ונשווה את הנגזרת ל-0 בכדי למצוא את נקודת המקסימום.

תחילה, נסמן את שיעורי הנקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ באמצעות t: $A\left(t,\sqrt{-t^2+2t+4}+1\right)$.

מכיוון שצלעות המלבן ABCD מקבילות לצירים, ניתן לראות כי לנקודות A ו- B שיעור y זהה. כלומר שיעורי הנקודה B הם: $B\left(x_B,\sqrt{-t^2+2t+4}+1\right)$. נציב בפונקציה $f(x)$ ונמצא את שיעור ה-x של הנקודה B:
$$\sqrt{-t^2+2t+4}+\cancel{1}=\sqrt{-x_B^2+2x_B+4}+\cancel{1}\ \to\ -t^2+2t+\cancel{4}=-x_B^2+2x_B+\cancel{4}\ \to\ x_B^2-2x_B+2t-t^2=0$$

ניעזר בנוסחת השורשים בכדי להביע את x_B באמצעות t:
$$x_B=\frac{2\pm\sqrt{4-4(2t-t^2)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4-8t+4t^2}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{(2-2t)^2}}{2}=\frac{2\pm(2-2t)}{2}\to x_B=t,\ x_B=2-t$$

$x=t$ הוא כמובן שיעור ה-x של הנקודה A, ומכאן ששיעורי הנקודה B הם: $B\left(2-t,\sqrt{-t^2+2t+4}+1\right)$.

כאמור, צלעות המלבן ABCD מקבילות לצירים ולכן:

אורך הצלעות AD ו-BC הוא שיעור ה-y של הנקודות A ו-B: $AD = BC = \sqrt{-t^2+2t+4}+1$

אורך הצלעות AB ו-CD הוא הפרש שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B: $AB = CD = t-(2-t) = 2t-2$

כעת נוכל להביע את פונקציית המטרה המתארת את היקף המלבן:

$$P = 2AD + 2AB \to P(t) = 2\left(\sqrt{-t^2+2t+4}+1\right)+2(2t-2) \to \boxed{P(t) = 2\sqrt{-t^2+2t+4}+1+4t-2}$$

כדי למצוא את ערך t שעבורו היקף המלבן מקסימלי נגזור את הפונקציה $P(t)$:

$$P'(t) = \cancel{2}\cdot\frac{-2t+2}{\cancel{2}\sqrt{-t^2+2t+4}}+4$$

נשווה את הנגזרת ל-0:

$$\frac{-2t+2}{\sqrt{-t^2+2t+4}}+4=0 \to 2t-2 = 4\sqrt{-t^2+2t+4} \to 4t^2-8t+4 = -16t^2+32t+64 \to t^2-2t-3=0$$

פתרונות המשוואה הם: $t=3$ ו- $\cancel{t=-1}$. (הנקודה A נמצאת ברביע הראשון ולכן הפתרון המתאים הוא: $t=3$).

ניעזר בנגזרת שניה מקוצרת של P' לבדיקת **סוג** הקיצון של הנקודה $t=3$.

בנגזרת שניה מקוצרת ניעזר רק למציאת סוג הקיצון ונגזור רק את המונה: $P''_{\text{סימן}}(3) = -2 \ < 0 \ \to Max$

לבסוף נציב $t=3$ בפונקציה P המתארת את היקף המלבן: $P = 2\sqrt{-3^2+2\cdot3+4}+1+4\cdot3-2 \to \boxed{P = 12 \text{ יח'}}$

כלומר, היקפו המקסימלי של המלבן הוא 12 יחידות אורך.