

## חקירת פונקציה אי-רציונאלית - פונקציית שורש ריבועי

פונקציית שורש ריבועי היא פונקציה בה המשתנה  $x$  מופיע בתוך שורש ריבועי.

### תחום ההגדרה

פונקציית שורש מוגדרת רק כאשר הביטוי שבתוך השורש הוא אי שלילי. כלומר, כדי למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה, נבדוק מתי הביטוי שבתוך השורש גדול או שווה לאפס.

**דוגמא:** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

**פתרון:** הפונקציה מוגדרת כאשר  $0 \leq x^2 - 9$  ולכן:

$$x^2 - 9 \geq 0 \rightarrow \boxed{x \leq -3 \text{ או } 3 \leq x}$$

**דוגמא:** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

**פתרון:** במקרה זה נשים לב כי השורש מופיע במכנה ולכן אינו יכול להתאפס. הפונקציה מוגדרת כאשר:

$$0 < 4 - x^2 \rightarrow \boxed{-2 < x < 2}$$

**לסיכום:** אם השורש מופיע במכנה, אסור לביטוי בשורש להתאפס ולכן תחום ההגדרה הוא: " $>$ " או " $<$ ".  
בשאר המקרים, יש לוודא כי הביטוי שבשורש גדול או שווה לאפס ולכן תחום ההגדרה הוא: " $\geq$ " או " $\leq$ ".

### נקודות החיתוך עם הצירים

נדגים על הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{x-2}$

**חיתוך עם ציר ה-y:**

נציב  $x = 0$  ונקבל:  $f(0) = \sqrt{0-2}$ . אין שורש למספר שלילי ולכן לפונקציה אין נקודת חיתוך עם ציר ה-y.

**חיתוך עם ציר ה-x:**

נציב  $y = 0$  ונקבל:  $\sqrt{x-2} = 0 \rightarrow x-2 = 0 \rightarrow x = 2$ , ומכאן שנקודת החיתוך עם ציר ה-x היא:  $(2, 0)$ .

**נגזרת ונקודות קיצון** הנגזרת של הפונקציה  $\sqrt{f(x)}$  היא:  $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

כלומר הנגזרת של הפונקציה היא: הנגזרת של הביטוי שבתוך השורש, חלקי פעמיים השורש המקורי.

**לדוגמא:** הנגזרת של הפונקציה  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  היא:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}$$

בכדי למצוא את נקודות הקיצון, נשווה את הנגזרת ל-0:

$$\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \rightarrow -x = 0 \rightarrow x = 0$$

הנקודה החשודה כקיצון היא:  $x = 0$ , אך כיוון שתחום ההגדרה של הפונקציה:  $-2 \leq x \leq 2$  כולל גם את הקצוות, נציב בטבלת העלייה וירידה את הנקודה הפנימית  $x = 0$  וכן את נקודות הקצה:  $x = -2$  ו-  $x = 2$ :

תחום x	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$
נציב בנגזרת	קיצון	$x = 1$		$x = 3$	קיצון
סימן הנגזרת		חיובי		שלילי	
הפונקציה עולה/יורדת	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min

נציב את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון בפונקציה  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  ונקבל כי שיעורי נקודות הקיצון הם: נקודת הקיצון הפנימית:  $\max(0, 2)$  ונקודות הקיצון בקצה התחום:  $\min(-2, 0)$  ו-  $\min(2, 0)$ .

מציאת **אסימפטוטות אופקיות ואנכיות** בפונקציות שורש שהיא גם פונקציית מנה, דומה למציאתן בפונקציית מנה.

## חקירת פונקציות שורש ריבועי - תרגול



בפרק זה ניתן לצפות בחינם בפתרונות מוסרטים לשאלות 1 ו-7 באתר 'מתמטיקורס' בסריקת הברקוד:  
ניתן לרכוש פתרון לשאלות נוספות לבחירתך.

1. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x - 15}$ .

א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

3. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים. 4. תחומי העלייה והירידה.

ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. מצא עבור אילו ערכי  $k$ , הישר  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

2. נתונה הפונקציה  $y = x \cdot \sqrt{3-x}$ .

א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

3. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים. 4. תחומי העלייה והירידה.

ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. הגדירו פונקציה:  $g(x) = 3 \cdot f(x)$ . מצא את שיעורי נקודות הקיצון של גרף  $g(x)$  ואת סוגן.

3. לפונקציה  $f(x) = x \cdot \sqrt{p-x}$  יש נקודת קיצון פנימית ששיעור ה- $x$  שלה הוא  $x = 4$ .

א. מצא את  $p$ .

ב. הצב  $p = 6$  ועבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

3. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים. 4. תחומי העלייה והירידה.

ג. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ד. הגדירו פונקציה חדשה:  $g(x) = -f(x)$ .

מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודת הקיצון הפנימית שלה.

4. לפונקציה  $f(x) = x^2 - b \cdot \sqrt{x}$  יש נקודת קיצון פנימית הנמצאת על הישר  $x = 1$ .

א. מצא את  $b$ .

ב. הצב  $b = 4$  ועבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

3. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים. 4. תחומי העלייה והירידה.

ג. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ד. מצא באיזה תחום מתקיים:  $f'(x) > 0$  וגם  $f(x) < 0$ . נמק.

ה. נתונה הפונקציה:  $g(x) = f(x) + t$ . שתחום הגדרתה הוא תחום ההגדרה של  $f(x)$ .

$t$  הוא פרמטר. מצא את ערכי  $t$  שבעבורם הפונקציה  $g(x)$  חיובית בכל תחום הגדרתה.

5. שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x - m\sqrt{x}$  בנקודה שבה  $x = 4$  הוא  $-1$ .  
 א. מצא את  $m$ .

ב. הצב  $m = 8$  ועבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

3. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים. 4. תחומי העלייה והירידה.

ג. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ד. נקודת הקיצון הפנימית ושתי נקודות החיתוך של הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים יוצרות משולש. קבע האם משולש זה הוא ישר זווית. נמק.

6. נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{7-x}$ .

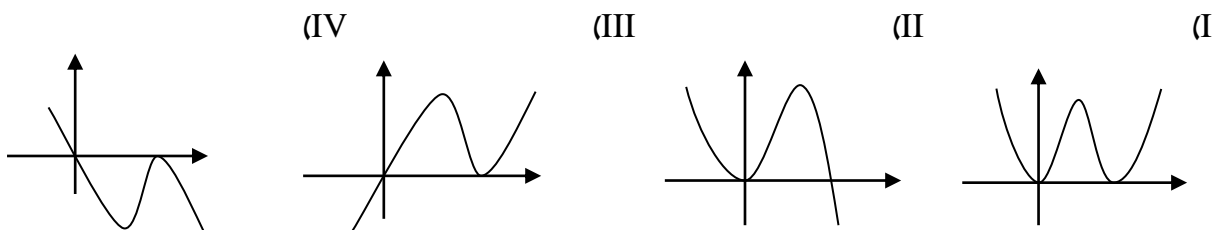
א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

3. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים. 4. תחומי העלייה והירידה.

ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. קבע איזה מהשרטוטים הבאים עשוי להיות גרף הנגזרת  $f'(x)$ .



7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$ .

א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.

3. שיעורי נקודת החיתוך עם הצירים. 4. תחומי העלייה והירידה.

ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. מצא עבור אילו ערכי  $x$  מתקיים:  $0 < f'(x)$  וגם  $f(x) < 0$ .

8. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$ .

א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

3. תחומי העלייה והירידה. 4. שיעורי נקודת החיתוך עם הצירים.

ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. מצא עבור אילו ערכי  $k$  חותך הישר  $y = k$  את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

9. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+9}{\sqrt{x}}$

- א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:
1. תחום ההגדרה.
  2. שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.
  3. תחומי העלייה והירידה.
  4. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש כאלו.
  5. האסימפטוטה האנכית.
- ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. מבלי לפתור ישירות את אי השוויון הוכח כי עבור כל  $x$  חיובי מתקיים:  $6 \leq \frac{x+9}{\sqrt{x}}$

10. הישר המשיק לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-a}$  בנקודה בה  $x=4$  מקביל לישר:  $y = -\frac{3}{8}x + 10$

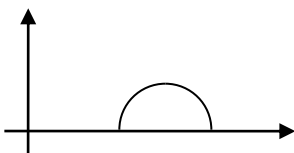
- א. מצא את  $a$  (מספר שלם).
- ב. הצב  $a=2$  ועבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:
1. תחום ההגדרה.
  2. שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.
  3. שיעורי נקודת החיתוך עם הצירים.
  4. האסימפטוטה האנכית.
  5. תחומי העלייה והירידה.
- ג. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ד. מצא עבור אילו ערכי  $p$ , למשוואה  $f(x) = p$  אין פתרון.

11. (\*) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-2}$

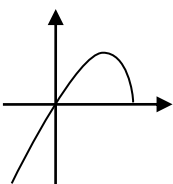
- א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$  מצא את:
1. תחום ההגדרה.
  2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.
  3. שיעורי נקודת החיתוך עם הצירים.
  4. האסימפטוטה האנכית.
  5. תחומי העלייה והירידה.
- ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. מצא עבור אילו ערכי  $x$ , מתקיים:  $8 < f(x)$ . נמק.

\* לסיכום התרגול בנושא חקירת פונקציית שורש, מומלץ לפתור את השאלה המסכמת בעמוד 112.

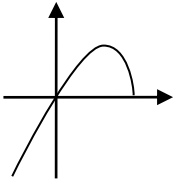
תשובות:



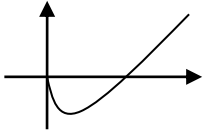
- (1) א. 1.  $3 \leq x \leq 5$ . 2. פנימית:  $\max(4, 1)$ , קצה:  $\min(3, 0), \min(5, 0)$ .
3.  $(3, 0), (5, 0)$ . 4. עולה:  $3 < x < 4$ ; יורדת:  $4 < x < 5$ .
- ב. השרטוט משמאל. ג.  $0 \leq k < 1$ .



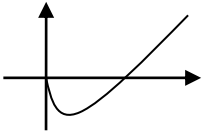
- (2) א. 1.  $x \leq 3$ . 2. פנימית:  $\max(2, 2)$ , קצה:  $\min(3, 0)$ . 3.  $(3, 0), (0, 0)$ .
4. עולה:  $x < 2$ ; יורדת:  $2 < x < 3$ . ב. השרטוט משמאל.
- ג.  $\min(3, 0), \max(2, 6)$ .



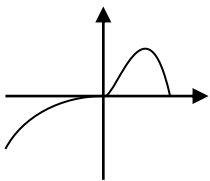
- (3) א.  $p = 6$ . ב. תחום ההגדרה:  $x \leq 6$ . 2. פנימית:  $\max(4, 5.65)$ , קצה:  $\min(6, 0)$ .  
 3.  $(0,0), (6,0)$ . 4. עולה:  $x < 4$ ; יורדת:  $4 < x < 6$ .  
 ג. השרטוט משמאל. ד.  $y = -5.65$ .



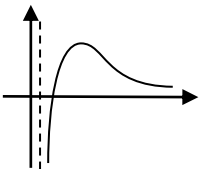
- (4) א.  $b = 4$ . ב. תחום ההגדרה:  $0 \leq x$ . 2. פנימיות:  $\min(1, -3)$ .  
 קצה:  $\max(0, 0)$ . 3.  $(0,0), (2.52, 0)$ . 4. עולה:  $1 < x$ .  
 יורדת:  $0 < x < 1$ . ג. השרטוט משמאל. ד.  $1 < x < 2.52$ . ה.  $3 < t$ .



- (5) א.  $m = 8$ . ב. תחום ההגדרה:  $0 \leq x$ . 2. פנימיות:  $\min(16, -16)$ ,  
 קצה:  $\max(0, 0)$ . 3.  $(0,0), (64,0)$ . 4. עולה:  $16 < x$ .  
 יורדת:  $0 < x < 16$ . ג. השרטוט משמאל. ד. המשולש אינו ישר זווית.



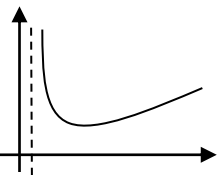
- (6) א.  $x \leq 7$ . 1. פנימית:  $\max(6, 216)$ . בקצה התחום:  $\min(7, 0)$ .  
 3.  $(0,0), (7,0)$ . 4. עולה:  $x < 6$ ; יורדת:  $6 < x < 7$ .  
 ב. השרטוט משמאל. ג. גרף II.



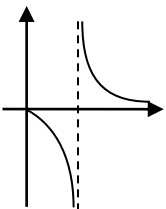
- (7) א.  $0 < x$ . 1.  $\max(4, 0.25)$ . 2.  $(1,0)$ . 3.  
 4. עולה:  $0 < x < 4$ ; יורדת:  $4 < x$ .  
 ב. השרטוט משמאל. ג.  $0 < x < 1$ .



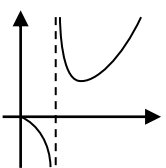
- (8) א.  $0 \leq x$ . 1. פנימית:  $\max(4, 0.25)$ . בקצה התחום:  $\min(0, 0)$ .  
 3. עולה:  $0 < x < 4$ ; יורדת:  $4 < x$ . 4.  $(0,0)$ .  
 ב. השרטוט משמאל. ג.  $k = 0$  או  $k = 0.25$ .



- (9) א.  $0 < x$ . 1. פנימית:  $\min(9, 6)$ . אין בקצה התחום.  
 3. יורדת:  $0 < x < 9$ ; עולה:  $9 < x$ . 4. אין.  
 5.  $x = 0$ . ב. השרטוט משמאל.



- (10) א.  $a = 2$ . ב.  $0 \leq x < 2$  או  $2 < x$ . 1. פנימית: אין. קצה:  $\max(0, 0)$ .  
 3.  $(0,0)$ . 4.  $x = 2$ . 5. עולה: אף  $x$ ; יורדת:  $2 < x$  או  $0 < x < 2$ .  
 ג. השרטוט משמאל. ד. אף  $p$ .



- (11) א. תחום ההגדרה:  $0 \leq x < 4$  או  $4 < x$ . 1. פנימית:  $\min(16, 8)$ . קצה:  $\max(0, 0)$ .  
 3.  $(0,0)$ . 4.  $x = 4$ . 5. עולה:  $16 < x$ ; יורדת:  $4 < x < 16$  או  $0 < x < 4$ .  
 ב. השרטוט משמאל. ג.  $4 < x < 16$  או  $16 < x$ .