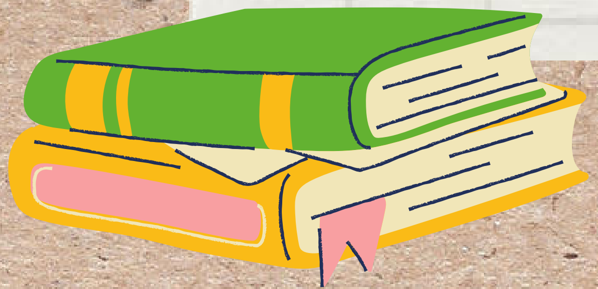

ארכימדס
בכיון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472
כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק ב'
הוצאת ארכימדס
שאלון 472
המכפלה הסקלרית של
וקטורים בהצגה אלגברית

הוצאת ארכימדס
שאלון 472

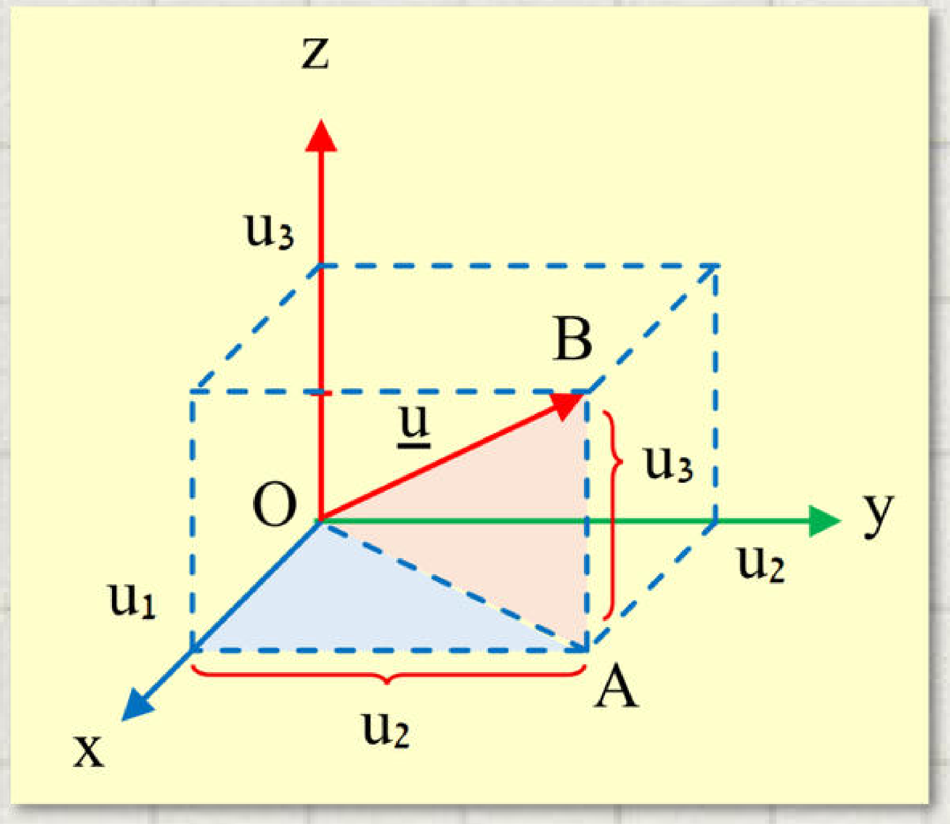
המכפלה הסקלרית של וקטורים בהצגה אלגברית

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

לאחר שעסקנו במכפלה סקלרית של וקטורים גיאומטריים,
נעסוק כעת במכפלה סקלרית של וקטורים בהצגה אלגברית.
תחילה נעסוק בחישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית.



חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

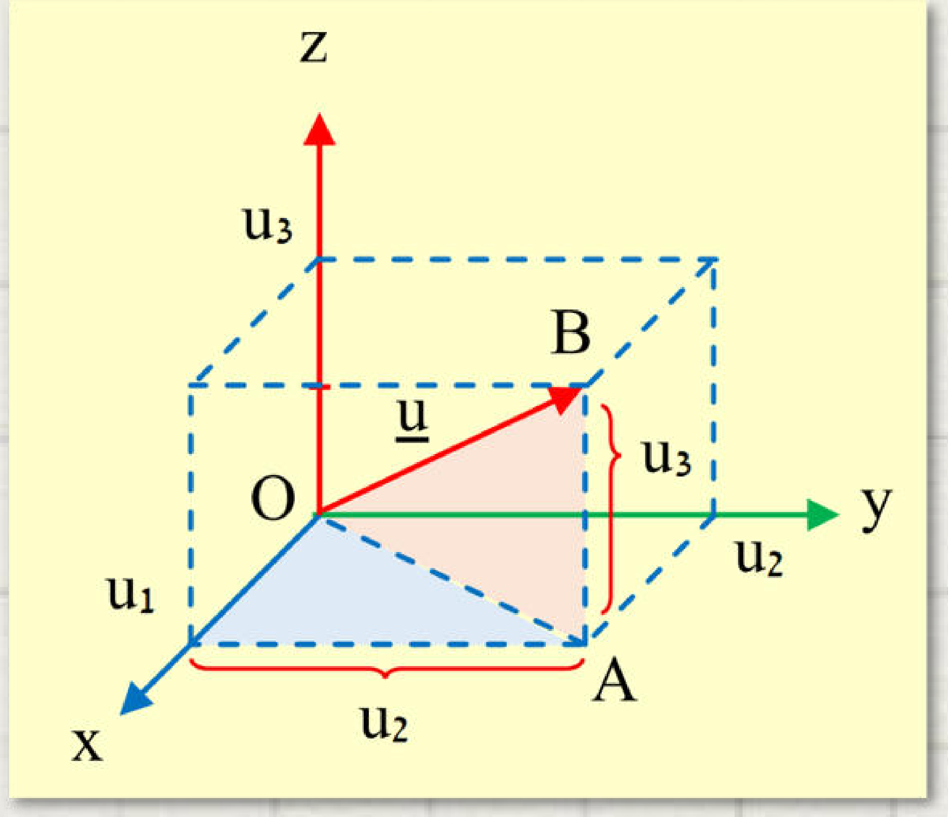


במערכת הצירים משמאל מופיע הווקטור $\underline{u}=(u_1,u_2,u_3)$ שנקודת המוצא שלו היא ראשית הצירים O ונקודת הסוף שלו היא הנקודה $B\left(u_1,u_2,u_3\right)$.

כעת ניעזר בכלים גיאומטריים כדי למצוא את הנוסחה לחישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית.

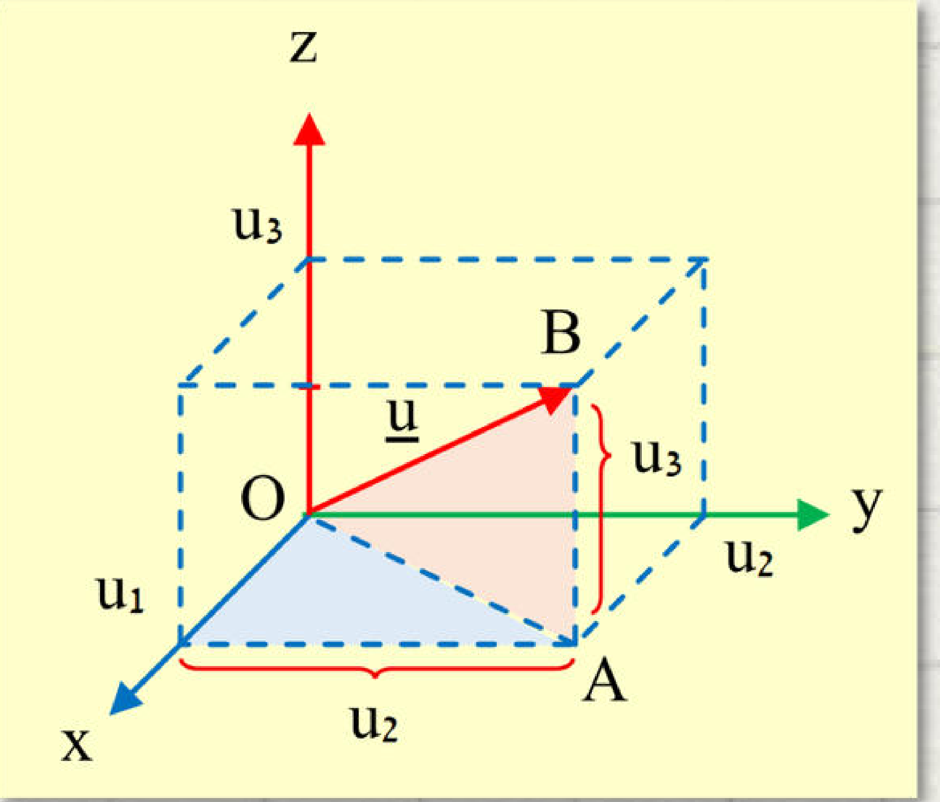
כדי לפשט את ההסבר, נתייחס במהלכו לנקודה B ששיעוריה חיוביים, אך הנוסחה שנוכיח נכונה עבור כל נקודה במרחב.

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית



מהנקודה B נוריד אנך למישור [xy],
אשר חותך את המישור [xy] בנקודה A.
מהנקודה A נוריד אנכים לציר ה־x ולציר ה־y.
נתבונן במשולש ישר הזווית **הכחול** שהתקבל.
אורכי הניצבים במשולש זה הם u_1,
שהוא שיעור ה־x של הנקודה A ו־u_2 שהוא שיעור ה־y של הנקודה A.
כעת נשתמש במשפט פיתגורס במשולש זה, ונקבל שאורך היתר AO
הוא: $AO = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית



נתבונן במשולש $\triangle ABO$ **האדום**.

האנך AB מאונך למישור [xy],

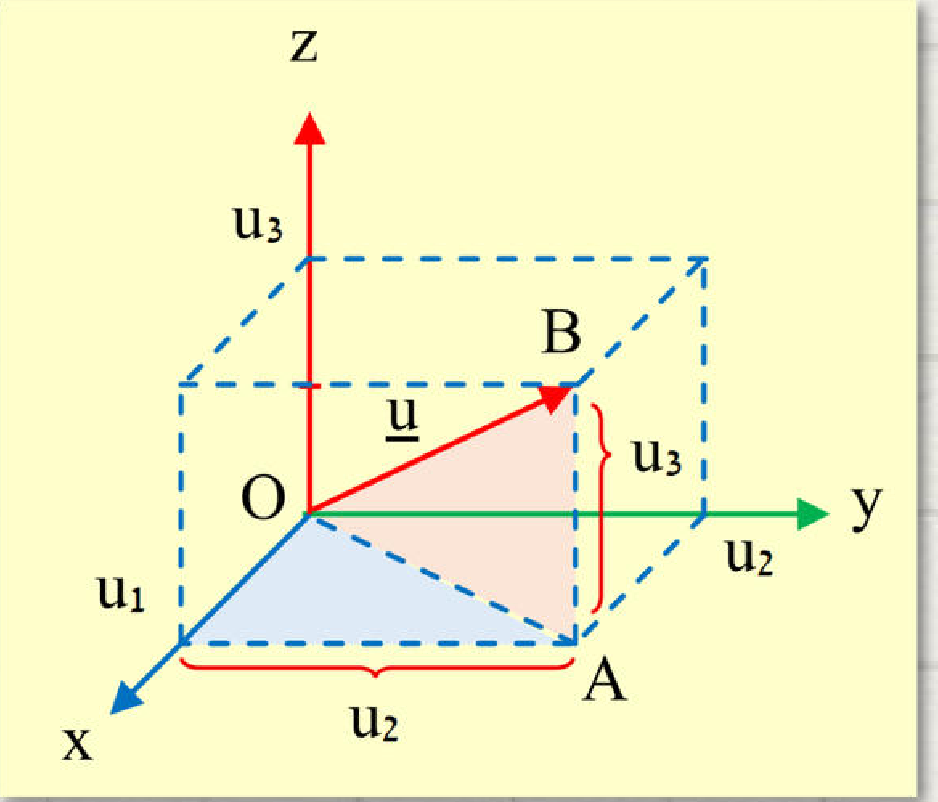
ומכאן שהוא מאונך גם לקטע AO.

כלומר, גם המשולש $\triangle ABO$ הוא ישר זווית.

במשולש זה אורך הניצב AB הוא u_3,

שהוא שיעור ה-Z של הנקודה B. אורך הניצב AO הוא: $AO=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$.

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית



כדי לחשב את אורך הקטע OB,
שהוא אורך הווקטור <u>u</u> ניעזר במשפט פיתגורס
גם במשולש **האדום** $\triangle ABO$ ונקבל:

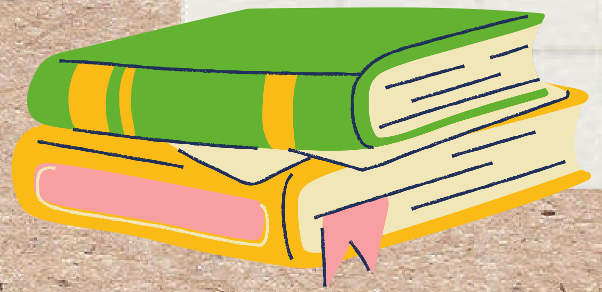
$$OB^2=\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2}\right)^2+u_3^2 \;\rightarrow\; OB^2=u_1^2+u_2^2+u_3^2 \;\rightarrow\; OB=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}=|\underline{u}|$$

לסיכום, אורך הווקטור $\underline{u}=(u_1,u_2,u_3)$ ניתן לחישוב בעזרת הנוסחה:

$$|\underline{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$$

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

שימו לב! נוכל להשתמש בנוסחה $|\underline{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
גם עבור וקטור שנקודת המוצא שלו **אינה בראשית הצירים**.
במקרה זה, כפי שנראה בדוגמה ב' בהמשך, תחילה נמצא את ההצגה האלגברית של הווקטור, ואז ניעזר בנוסחה לחישוב אורכו.



חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

דוגמה א': חשבו את אורכי הווקטורים $\underline{u}=(3,12,4)$ ו־$\underline{v}=(1,-2,5)$.

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

דוגמה א': חשבו את אורכי הווקטורים $\underline{u}=(3,12,4)$ ו־$\underline{v}=(1,-2,5)$.

פתרון: אורך הווקטור $\underline{u}=(3,12,4)$ הוא: $|\underline{u}|=\sqrt{3^2+12^2+4^2}=\sqrt{169}=13$.

אורך הווקטור $\underline{v}=(1,-2,5)$ הוא: $|\underline{v}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+5^2}=\sqrt{30}$.

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

דוגמה ב': נתונות הנקודות $A\ (2\,,4\,,5)$ ו־$B\ (0\,,7\,,3)$. חשבו את $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

דוגמה ב': נתונות הנקודות $A\ (2\,,4\,,5)$ ו־$B\ (0\,,7\,,3)$. חשבו את $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

פתרון: נמצא את ההצגה האלגברית של הווקטור $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=(0-2,7-4,3-5)=(-2,3,-2)$.

כעת נחשב את אורכו : $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$.

לאחר ההסברים, המצגת מפנה לתרגול בכרך ב׳ של הספר בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472:

כעת נוכל לפתור את תרגילים 1-4 בעמודים 107-108.

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

כעת נעסוק במכפלה סקלרית של וקטורים בהצגה אלגברית בעזרת הווקטורים $\underline{\mathbf{u}}=(u_1,u_2,u_3)$ ו־ $\underline{\mathbf{v}}=(v_1,v_2,v_3)$.

תחילה, נציג את שניהם בעזרת וקטורי היחידה של הצירים:

$$\underline{v}=v_1\underline{e}_x+v_2\underline{e}_y+v_3\underline{e}_z \quad , \quad \underline{u}=u_1\underline{e}_x+u_2\underline{e}_y+u_3\underline{e}_z$$

כעת נחשב את המכפלה הסקלרית:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=(u_1\underline{e}_x+u_2\underline{e}_y+u_3\underline{e}_z)\cdot(v_1\underline{e}_x+v_2\underline{e}_y+v_3\underline{e}_z)$$

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

נזכיר שווקטורי היחידה מאונכים זה לזה, ולכן המכפלה הסקלרית בין כל שניים מהם שווה ל־0.

לאחר שנפתח את הסוגריים, ונציב את המכפלות הסקלריות:

$$\underline{e}_x \cdot \underline{e}_y = 0 \qquad \underline{e}_x \cdot \underline{e}_z = 0 \qquad \underline{e}_y \cdot \underline{e}_z = 0$$

נקבל: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u}_1 \cdot \underline{v}_1 \cdot \underline{e}_x^2 + \underline{u}_2 \cdot \underline{v}_2 \cdot \underline{e}_y^2 + \underline{u}_3 \cdot \underline{v}_3 \cdot \underline{e}_z^2$

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

נזכיר שהאורך של כל אחד מווקטורי היחידה הוא 1.

נציג זאת בכתיב מתמטי:

$$\underline{e}_z^2 = |\underline{e}_z|^2 = 1^2 = 1 \ , \ \underline{e}_y^2 = |\underline{e}_y|^2 = 1^2 = 1 \ , \ \underline{e}_x^2 = |\underline{e}_x|^2 = 1^2 = 1$$

נציב את האורכים האלו בנוסחה שקיבלנו, ונקבל:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u}_1 \cdot \underline{v}_1 + \underline{u}_2 \cdot \underline{v}_2 + \underline{u}_3 \cdot \underline{v}_3$$

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

לסיכום, נוכל לחשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים
$\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ו־ $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ בעזרת הנוסחה:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u}_1 \cdot \underline{v}_1 + \underline{u}_2 \cdot \underline{v}_2 + \underline{u}_3 \cdot \underline{v}_3$$

נשים לב ש**אין חשיבות** לסדר הכופלים במכפלה.
כלומר, מתקיים: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$.

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

דוגמה: נתונים הווקטורים $\underline{u}=(1,4,0)$ ו־$\underline{v}=(2,-1,5)$. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$.

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

דוגמה: נתונים הווקטורים $\underline{u}=(1,4,0)$ ו־$\underline{v}=(2,-1,5)$. חשבו את המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$.

פתרון: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(1,4,0)\cdot(2,-1,5)=1\cdot2+4\cdot(-1)+0\cdot5=2-4+0=-2$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 5 בעמוד 109.

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

דוגמה: נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,0,8)$ ו־$\underline{v}=(-1,5,1)$. חשבו את:

א. אורכי הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$. ב. המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$. ג. הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$.

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

דוגמה: נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,0,8)$ ו־$\underline{v}=(-1,5,1)$. חשבו את:

א. אורכי הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$. ב. המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$. ג. הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$.

פתרון: א. לפי נוסחת האורך שלמדנו, מתקיים:

$$|\underline{u}|=\sqrt{2^2+0^2+8^2}=\sqrt{4+0+64}=\sqrt{68}$$

$$|\underline{v}|=\sqrt{(-1)^2+5^2+1^2}=\sqrt{1+25+1}=\sqrt{27}$$

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

דוגמה: נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,0,8)$ ו־ $\underline{v}=(-1,5,1)$. חשבו את:

א. אורכי הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$. ב. המכפלה הסקלרית $\underline{v}\cdot\underline{u}$. ג. הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$.

פתרון: א. לפי נוסחת האורך שלמדנו, מתקיים:

$$|\underline{u}|=\sqrt{2^2+0^2+8^2}=\sqrt{4+0+64}=\sqrt{68}$$

$$|\underline{v}|=\sqrt{(-1)^2+5^2+1^2}=\sqrt{1+25+1}=\sqrt{27}$$

ב. לפי נוסחת המכפלה הסקלרית: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(2,0,8)\cdot(-1,5,1)=2\cdot(-1)+0\cdot5+8\cdot1=-2+0+8=6$.

חישוב אורך של וקטור בהצגה אלגברית

דוגמה: נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,0,8)$ ו־$\underline{v}=(-1,5,1)$. חשבו את:

א. אורכי הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$. ב. המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$. ג. הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$.

פתרון: א. לפי נוסחת האורך שלמדנו, מתקיים:

$$|\underline{u}|=\sqrt{2^2+0^2+8^2}=\sqrt{4+0+64}=\sqrt{68}$$

$$|\underline{v}|=\sqrt{(-1)^2+5^2+1^2}=\sqrt{1+25+1}=\sqrt{27}$$

ב. לפי נוסחת המכפלה הסקלרית: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(2,0,8)\cdot(-1,5,1)=2\cdot(-1)+0\cdot5+8\cdot1=-2+0+8=6$.

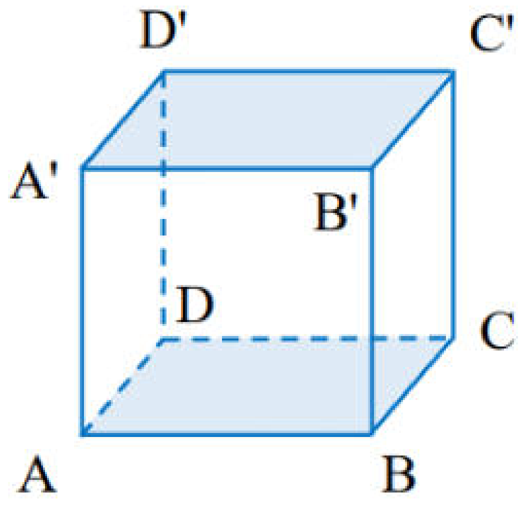
ג. לפי הנוסחה לחישוב זווית בין וקטורים: $\cos\alpha=\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}=\dfrac{6}{\sqrt{68}\cdot\sqrt{27}}=0.14 \rightarrow \alpha=81.95^\circ$.

הקשר בין אורכי הווקטורים לזווית שבינהם

קישור להמחשה של הקשר בין אורכי
הווקטורים לזווית שביניהם בהצגה אלגברית.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 6-8 בעמוד 109-110.

חישוב מכפלה סקלרית של וקטורים בהצגה אלגברית



9. במנסרה המרובעת שלפניכם נתונים שיעורי הקודקודים:
$A\ (1,0,2)$, $B\ (4,0,6)$ ו־$B'\ (4,5,6)$.

א. מצאו הצגה אלגברית של הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו־$\overrightarrow{B'B}$.

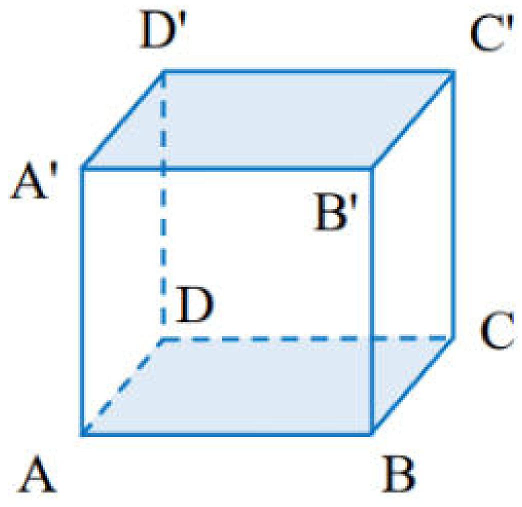
ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B'B}$.

ג. שרונה הזכירה:
"בעבר למדנו שאם $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$ אז הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$ מאונכים זה לזה."
היעזרו בטענה ובסעיף ב׳, והראו שמתקיים: $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B'B}$.

ד. נתון הקודקוד $C\ (8,0,3)$. מצאו הצגה אלגברית של הווקטור $\overrightarrow{CB}$.

ה. הראו שמתקיים: 1. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB}$ 2. $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{B'B}$

חישוב מכפלה סקלרית של וקטורים בהצגה אלגברית



9. במנסרה המרובעת שלפניכם נתונים שיעורי הקודקודים:
$A\,(1,0,2)$, $B\,(4,0,6)$ ו־$B'\,(4,5,6)$.

א. מצאו הצגה אלגברית של הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו־$\overrightarrow{B'B}$.

ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'B}$.

ג. שרונה הזכירה:
"בעבר למדנו שאם $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ אז הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$ מאונכים זה לזה."
היעזרו בטענה ובסעיף ב', והראו שמתקיים: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B'B}$.

ד. נתון הקודקוד $C\,(8,0,3)$. מצאו הצגה אלגברית של הווקטור $\overrightarrow{CB}$.

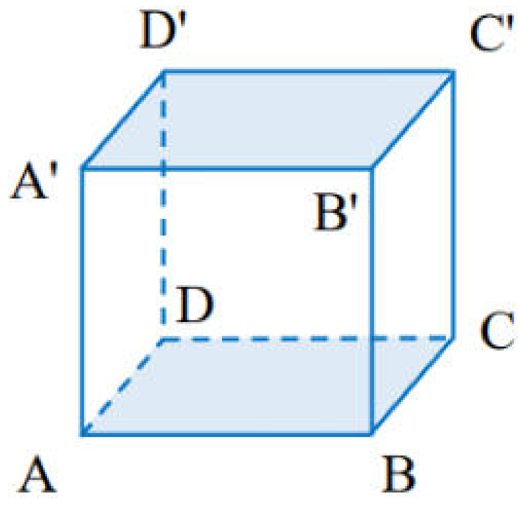
ה. הראו שמתקיים: 1. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$ 2. $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{B'B}$

תשובות: א. $\overrightarrow{AB} = (3,0,4)$, $\overrightarrow{B'B} = (0,-5,0)$.

חישוב מכפלה סקלרית של וקטורים בהצגה אלגברית

9. במנסרה המרובעת שלפניכם נתונים שיעורי הקודקודים:

$A\ (1,0,2)$, $B\ (4,0,6)$ ו־$B'\ (4,5,6)$.



א. מצאו הצגה אלגברית של הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו־$\overrightarrow{B'B}$.

ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B'B}$.

ג. שרונה הזכירה:

"בעבר למדנו שאם $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$ אז הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$ מאונכים זה לזה."

היעזרו בטענה ובסעיף ב', והראו שמתקיים: $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B'B}$.

ד. נתון הקודקוד $C\ (8,0,3)$. מצאו הצגה אלגברית של הווקטור $\overrightarrow{CB}$.

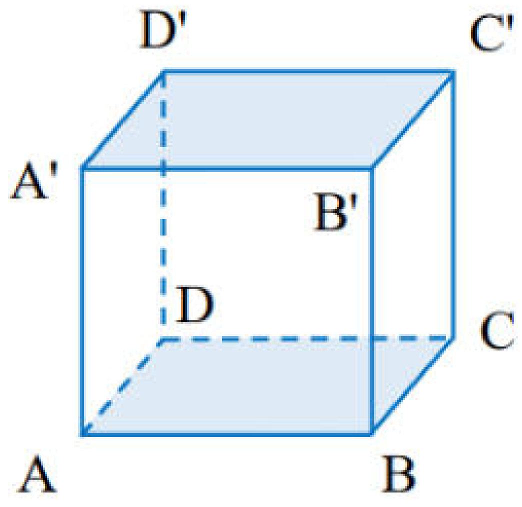
ה. הראו שמתקיים: 1. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB}$ 2. $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{B'B}$

תשובות: א. $\overrightarrow{AB}=(3,0,4)$, $\overrightarrow{B'B}=(0,-5,0)$. **ב.** 0.

חישוב מכפלה סקלרית של וקטורים בהצגה אלגברית

9. במנסרה המרובעת שלפניכם נתונים שיעורי הקודקודים:

$A\ (1,0,2)$, $B\ (4,0,6)$ ו־$B'\ (4,5,6)$.



א. מצאו הצגה אלגברית של הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו־$\overrightarrow{B'B}$.

ב. חשבו את המכפלה הסקלרית $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B'B}$.

ג. שרונה הזכירה:

"בעבר למדנו שאם $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$ אז הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$ מאונכים זה לזה."

היעזרו בטענה ובסעיף ב', והראו שמתקיים: $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B'B}$.

ד. נתון הקודקוד $C\ (8,0,3)$. מצאו הצגה אלגברית של הווקטור $\overrightarrow{CB}$.

ה. הראו שמתקיים: 1. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB}$ 2. $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{B'B}$

תשובות: א. $\overrightarrow{AB}=(3,0,4)$ **,** $\overrightarrow{B'B}=(0,-5,0)$. **ב.** 0. **ד.** $\overrightarrow{CB}=(-4,0,3)$.

הצגה אלגברית של וקטור שנקודת המוצא שלו אינה בראשית הצירים

בשאלה הקודמת נעזרנו בשיעורי הווקטורים בהצגה אלגברית כדי להראות שהם מאונכים זה לזה.

נדגים זאת כעת בעזרת הווקטורים: $\underline{u} = (2, 7, -6)$ ו- $\underline{v} = (3, 0, 1)$.

נציב בנוסחת המכפלה הסקלרית, ונקבל:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (2, 7, -6) \cdot (3, 0, 1) = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 0 + 1 \cdot -6 = 6 + 0 - 6 = 0$$

קיבלנו ש- $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ ומכך ניתן להסיק שהווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ מאונכים זה לזה.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 10-14 בעמוד 111-112.

למרחב ההוראה
לחצו כאן

במרחב ההוראה מאות דפי תרגול, ובינהם בחינות מתכונת. המרחב מיועד לצוותי הוראה במוסדות לימוד אשר רכשו את הספר.

למי לפנות?

לשאלות לארכימדס:

במספר 050-9074007 של הוצאת ארכימדס

להזמנות מרובזות - פונים ל-"יש הפצות":

טלפון 03-5595354 או ווטסאפ 054-7154211