הערכה מסכמת 3 - פתרון מלא

שאלה 1:

נתונות שלוש פונקציות:

$h(x)=(x+3)\cdot(x-4)\cdot(x+8)$, $g(x)=-(x+3)\cdot(x-4)\cdot(x-8)$, $f(x)=(x-3)\cdot(x-8)\cdot(x+4)$

א. בכדי למצוא את שיעורי נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה-x נשווה כל אחת מהן לאפס.
נזכור שאם מכפלה שווה לאפס אז בהכרח אחד הגורמים שווה לאפס ולכן:

$f(x)=0 \rightarrow (x-3)\cdot(x-8)\cdot(x+4)=0 \rightarrow x_1=3 , x_2=8 , x_3=-4$

לכן נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה-x הן: $(-4,0)$, $(8,0)$, $(3,0)$.

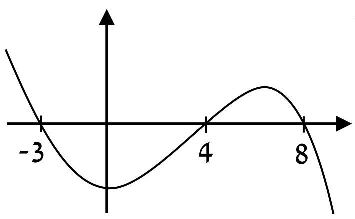
$g(x)=0 \rightarrow -(x+3)\cdot(x-4)\cdot(x-8)=0 \rightarrow x_1=-3 , x_2=4 , x_3=8$

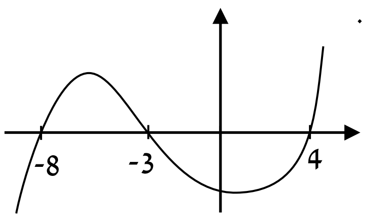
לכן נקודות החיתוך של $g(x)$ עם ציר ה-x הן: $(8,0)$, $(4,0)$, $(-3,0)$.

$h(x)=0 \rightarrow (x+3)\cdot(x-4)\cdot(x+8)=0 \rightarrow x_1=-3 , x_2=4 , x_3=-8$

לכן נקודות החיתוך של $h(x)$ עם ציר ה-x הן: $(-8,0)$, $(4,0)$, $(-3,0)$.

ב. נתונים גרפים של שתי פונקציות: I. II.





ניעזר בסעיף א' ונראה ש:

נקודות החיתוך של גרף I עם ציר ה-x הן: $(8,0)$, $(4,0)$, $(-3,0)$ ולכן גרף I מתאים לפונקציה g(x).

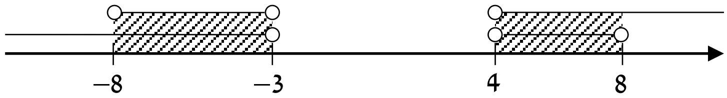
נקודות החיתוך של גרף II עם ציר ה-x הן: $(-8,0)$, $(4,0)$, $(-3,0)$ ולכן גרף II מתאים לפונקציה h(x).

ג. אנו מתבקשים לפתור את אי השוויון $0<(x+3)\cdot(x-4)\cdot(x+8)$.
ניתן לראות כי אגף ימין הוא למעשה הפונקציה $h(x)$. כלומר, פתרון אי השוויון הוא תחום החיוביות של הפונקציה $h(x)$. נפתור את אי השוויון בעזרת גרף II שהוא גרף הפונקציה $h(x)$.
ניתן לראות כי הפונקציה $h(x)$ חיובית בתחום: $4<x$ או $-8<x<-3$.
לסיכום, הפתרון אי השוויון הוא: $4<x$ או $-8<x<-3$.

ד. בסעיף ג' מצאנו שהפונקציה $h(x)$ חיובית בתחום: $x > 4$ או $-8 < x < -3$.

לפי גרף I של הפונקציה $g(x)$ ניתן להסיק כי הפונקציה $g(x)$ חיובית בתחום: $4 < x < 8$ או $x < -3$.

נמצא בעזרת שרטוט על ציר ה-x את החיתוך של שני התחומים הללו:

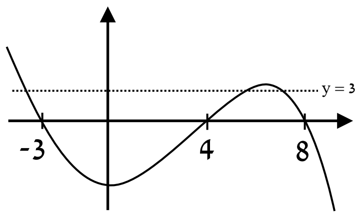


מכאן שהתחום המשותף בו **שתי הפונקציה הן חיוביות** הוא: $4 < x < 8$ או $-8 < x < -3$.

ה. נתון שלמשוואה $g(x) = 3$ יש שלושה פתרונות.

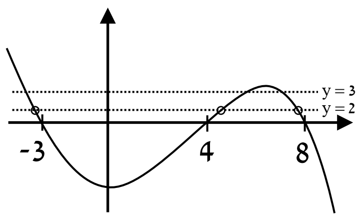
מנתון זה נסיק שקיימות 3 נקודות על גרף הפונקציה $g(x)$ ששיעור ה-y שלהן הוא $y = 3$.
אם נרצה להוסיף את הישר $y = 3$ למערכת הצירים בה מופיע גרף הפונקציה $g(x)$ עלינו לעשות זאת כך שיהיו 3 נקודות חיתוך בין הישר לבין גרף הפונקציה $g(x)$:

נשרטט את הישר $y = 3$ <u>מעל</u> ציר ה-x כיוון שערכו חיובי ו<u>מתחת</u> לנקודת המקסימום של הפונקציה אחרת יהיו 2 נקודות חיתוך לכל היותר, בסתירה לכך שקיימות 3 נקודות:



כעת ברצוננו לבדוק כמה פתרונות יש למשוואה: $g(x) = 2$.

לשם כך נוסיף לשרטוט את הישר $y = 2$. ישר זה נמצא <u>מעל</u> ציר ה-x כיוון שערכו חיובי ו<u>מתחת</u> לישר $y = 3$ כיוון שערכו נמוך ממנו:



ניתן לראות שבין הישר $y = 2$ וגרף הפונקציה $g(x)$ יש 3 נקודות חיתוך ולכן למשוואה $g(x) = 2$ יש 3 פתרונות.

לסיכום, <u>הטענה "למשוואה $g(x)=2$ יש שלושה פתרונות" נכונה ולכן ליאל צודקת</u>.

שאלה 2:

א. משוואת הפרבולה היא: $f(x)=-\frac{1}{2}\cdot(x+8)^2+18$ ולכן שיעורי הקדקוד שלה הם: $M(-8,18)$.

לפי השרטוט הפרבולה "בוכה" ולכן היא עולה לכל ערך x שקטן מהקדקוד ויורדת לכל ערך x שגדול ממנו.
לכן תחום העלייה של הפרבולה הוא: $x<-8$ ותחום הירידה של הפרבולה הוא: $-8<x$.

ב. הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של הפרבולה $f(x)=-\frac{1}{2}\cdot(x+8)^2+18$ והישר $y=10$.

נשווה בין שתי המשוואות ונמצא את שיעורי שתי נקודות החיתוך:

$$-\frac{1}{2}\cdot(x+8)^2+18=10 \quad /\cdot 2 \quad \rightarrow \quad -(x+8)^2+36=20 \quad \rightarrow \quad -x^2-16x-64+36=20$$

נעביר אגפים ונקבל את המשוואה: $x^2+16x+48=0$.

נפתור את המשוואה הריבועית בעזרת נוסחת השורשים $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$x_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot1\cdot48}}{2\cdot1} \rightarrow x_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{64}}{2} \rightarrow x_{1,2}=\frac{-16\pm8}{2} \rightarrow x_2=-4 \quad , \quad x_1=-12$$

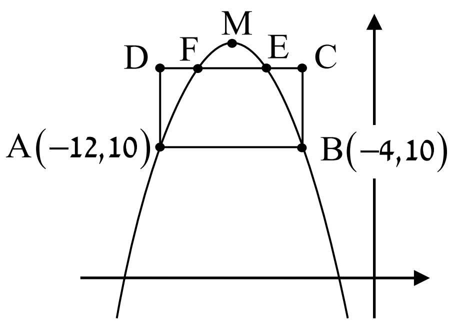
שיעור ה-y של שתי הנקודות הוא 10 ולכן שיעוריהן הם: $A(-12,10)$ ו- $B(-4,10)$.

הקטע AB מקביל לציר ה-x ולכן אורכו שווה להפרש בין שיעורי ה-x של שתי הנקודות:

$AB=-4-(-12)=$ **8 יח' אורך**

ג.1. נתון כי שטח המלבן ABCD הוא 48 יח"ר. בסעיף הקודם מצאנו כי $AB=$ 8 יח' אורך.

ניעזר בנתון ונמצא את אורך הצלע BC: $8\cdot BC=48 \rightarrow BC=$ 6 יח' אורך.



הצלע BC מקבילה לציר ה-y ולכן אורכה שווה להפרש שיעורי ה-y של הנקודות B ו-C. כיוון ששיעור ה-y של הנקודה B הוא 10 נקבל כי שיעור ה-y של הנקודה C הוא 16.

הישר CD עובר בנקודה C ומקביל לציר ה-x ולכן משוואתו: $y=16$.

2. הנקודות F ו- E הן נקודות החיתוך של הישר CD והפרבולה.

נשווה בין משוואת הישר למשוואת הפרבולה ונמצא את שיעורי שתי הנקודות:

$$-\frac{1}{2}\cdot(x+8)^2+18=16 \quad /\cdot 2 \rightarrow -(x+8)^2+36=32 \rightarrow -x^2-16x-64+36=32$$

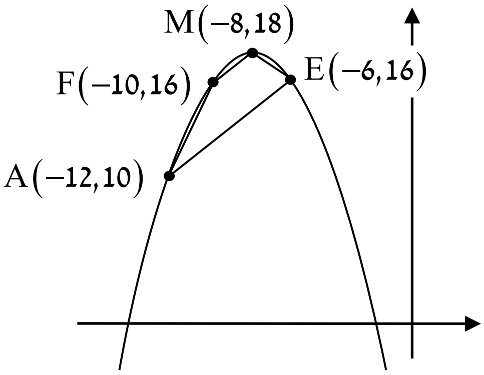
נעביר אגפים ונקבל את המשוואה: $x^2+16x+60=0$.

נפתור את המשוואה הריבועית בעזרת נוסחת השורשים $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$x_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot1\cdot60}}{2\cdot1} \rightarrow x_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{16}}{2} \rightarrow x_{1,2}=\frac{-16\pm4}{2} \rightarrow x_2=-6 \quad , \quad x_1=-10$$

שיעור ה-y של שתי הנקודות הוא 16 ולכן שיעוריהן הם : $E(-6,16)$ ו-$F(-10,16)$.

ד. כדי לקבוע האם המרובע AEMF הוא טרפז נסתכל על שיפועי צלעותיו :



$$m_{MF}=\frac{y_M-y_F}{x_M-x_F}=\frac{18-16}{-8-(-10)}=\frac{2}{2} \rightarrow m_{MF}=1$$

$$m_{AE}=\frac{y_A-y_E}{x_A-x_E}=\frac{10-16}{-12-(-6)}=\frac{-6}{-6} \rightarrow m_{AE}=1$$

$$m_{AF}=\frac{y_A-y_F}{x_A-x_F}=\frac{10-16}{-12-(-10)}=\frac{-6}{-2} \rightarrow m_{AF}=3$$

$$m_{ME}=\frac{y_M-y_E}{x_M-x_E}=\frac{18-16}{-8-(-6)}=\frac{2}{-2} \rightarrow m_{ME}=-1$$

מצאנו ששיפועי הישרים MF ו-AE שווים ולכן הישרים מקבילים ואילו שיפועי הישרים AF ו-ME אינם שווים ולכן הישרים אינם מקבילים.

מכאן שבמרובע AEMF זוג צלעות מקבילות וזוג נוסף שאינן מקבילות ולכן המרובע AEMF הוא טרפז.

שאלה 3:

א. כדי למצוא את תחום ההצבה של כל ביטוי, נדרוש שהמכנה שלו יהיה שונה מ-0:

בביטוי $x=\frac{a^2-4a+3}{a-3}$ יש לוודא שהמכנה לא מתאפס: $a-3\neq 0$ ולאחר העברת אגף: $a\neq 3$.

בביטוי $y=\frac{a^2+8a+7}{a+7}$ יש לוודא שהמכנה לא מתאפס: $a+7\neq 0$ ולאחר העברת אגף: $a\neq -7$.

בביטוי $z=\frac{a^3-4a^2}{a^2}$ יש לוודא שהמכנה לא מתאפס: $a^2\neq 0$ ולאחר הוצאת שורש משני האגפים: $a\neq 0$.

ב. תחילה נפרק כל ביטוי לגורמים ונצמצם במידת האפשר:

במונה של הביטוי $x=\frac{a^2-4a+3}{a-3}$ מופיע הטרינום: a^2-4a+3.

כדי לפרק את הטרינום נחפש שני מספרים שמכפלתם שווה ל- 3 וסכומם שווה ל- (-4):

$$\_\_\_\cdot\_\_\_=3$$
$$\_\_\_+\_\_\_=-4$$

ניתן לראות ששני המספרים המתאימים הם (-3) ו- (-1) כיוון שמתקיים:

$$(-1)\cdot(-3)=3$$
$$(-1)+(-3)=-4$$

מכאן שפירוק הטרינום a^2-4a+3 הוא: $(a-1)(a-3)$ והביטוי כולו הוא: $x=\frac{(a-1)(a-3)}{a-3}$.

לאחר צמצום המונה והמכנה נקבל את הביטוי הפשוט: $x=\frac{(a-1)\cancel{(a-3)}}{\cancel{a-3}}\ \rightarrow\ x=a-1$

במונה של הביטוי $y=\frac{a^2+8a+7}{a+7}$ מופיע הטרינום: a^2+8a+7.

כדי לפרק את הטרינום נחפש שני מספרים שמכפלתם שווה ל- 7 וסכומם שווה ל- 8:

$$\_\_\_\cdot\_\_\_=7$$
$$\_\_\_+\_\_\_=8$$

ניתן לראות ששני המספרים המתאימים הם 7 ו-1 כיוון שמתקיים:

$$(7)\cdot(1)=7$$
$$(7)+(1)=8$$

מכאן שפירוק הטרינום a^2+8a+7 הוא: $(a+7)(a+1)$, והביטוי כולו הוא: $y=\frac{(a+7)(a+1)}{a+7}$.

לאחר צמצום המונה והמכנה נקבל את הביטוי הפשוט: $y=\frac{\cancel{(a+7)}(a+1)}{\cancel{a+7}}\ \rightarrow\ y=a+1$

נוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר במונה של הביטוי $z=\frac{a^3-4a^2}{a^2}$ ונקבל: $z=\frac{a^2(a-4)}{a^2}$.

לאחר צמצום המונה והמכנה נקבל את הביטוי הפשוט: $z=\frac{\cancel{a^2}(a-4)}{\cancel{a^2}} \rightarrow z=a-4$

ג. 1. שגויה. נציב במשוואה $z=x\cdot y$ את הביטויים שמצאנו בסעיף ב׳:

$$a-4=(a-1)(a+1) \rightarrow a-4=a^2-1 \rightarrow a^2-a+3=0 \rightarrow a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}$$

$\rightarrow a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2} \rightarrow a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2} \rightarrow$ שורש שלילי ולכן אין פתרון

נסיק שלא קיימים ערכי a עבורם מתקיימת המשוואה: $z=x\cdot y$ ולכן הטענה שגויה.

2. נכונה. לכל a מתקיים אי השוויון: $a-4<a-1<a+1$ ולכן: $z<x<y$ והטענה נכונה.

שאלה 4:

א. נתון כי יוסי מכר x תמונות וכי הכנסתו הכוללת מהמכירה הייתה 54 ש"ח. ניעזר בטבלה הבאה:

	כמות	מחיר ליחידה	הכנסה כוללת
יוסי	x		54

נזכור את הקשר:

כמות * **מחיר ליחידה** = **הכנסה כוללת** ולאחר סידור נקבל: **מחיר ליחידה** = $\frac{\textbf{הכנסה כוללת}}{\textbf{כמות}}$.

נציב את הנתונים מהטבלה ונקבל כי מחירה של כל תמונה שמכר יוסי הוא: $\frac{54}{x}$.

ב. זוהר מכרה את התמונות במחיר הנמוך ב-3 ש"ח ליחידה מהמחיר בו יוסי מכר ולכן המחיר הוא: $\frac{54}{x}-3$.

נתון כי כמות התמונות שמכרה זוהר גדולה ב-50% מכמות התמונות שמכר יוסי.

למעשה, זוהר מכרה 150% מכמות התמונות שמכר יוסי (x). כדי להביע את כמות התמונות שזוהר מכרה, נכפיל את האחוז (150%) בכמות המקורית (x) ונקבל: $\left(\frac{100+50}{100}\right)\cdot x=\left(\frac{150}{100}\right)\cdot x=1.5x$.

נתון כי גם הכנסתה הכוללת של זוהר הייתה 54 ש"ח. נמלא את הנתונים של זוהר בטבלה:

	כמות	מחיר ליחידה	הכנסה כוללת
זוהר	$1.5x$	$\frac{54}{x}-3$	54

ניעזר בקשר: **כמות** * **מחיר ליחידה** = **הכנסה כוללת** ונקבל את המשוואה: $54=\left(\frac{54}{x}-3\right)\cdot 1.5x$.

כלומר, התשובה הנכונה היא **4**.

ג. נפתור את המשוואה שקיבלנו בסעיף הקודם:

$$54=\left(\frac{54}{x}-3\right)\cdot 1.5x \rightarrow 54=54\cdot 1.5-3\cdot 1.5x \rightarrow 54=81-4.5x \rightarrow 4.5x=27 \rightarrow x=6$$

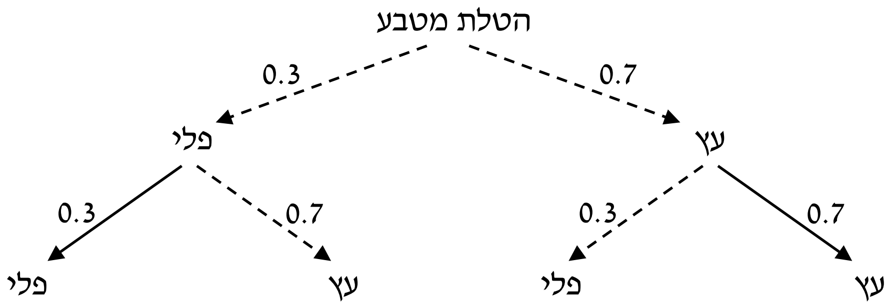
שאלה 5:

א. לפי הנתון, מתוך 400 הטלות מטבע, דימיטרי קיבל 280 פעמים עץ. מכאן שקיבל 120 פעמים פלי.

בהסתמך על ממצא זה, נוכל להעריך כי ההסתברות לקבל פלי במטבע זה היא: $\frac{120}{400} = 0.3$.

ב. בהתאם לסעיף א', ההסתברות לקבל עץ בכל הטלה היא: 0.7 ולקבל פלי היא: 0.3.

דימיטרי הטיל את המטבע פעמיים. ניעזר בשרטוט הבא:



כעת נחשב את ההסתברות שמתוך שתי הטלות יתקבל עץ פעם אחת בלבד:

דימיטרי הטיל את המטבע פעמיים. כלומר מדובר בשני אירועים בלתי תלויים שהתבצעו האחד אחר השני.

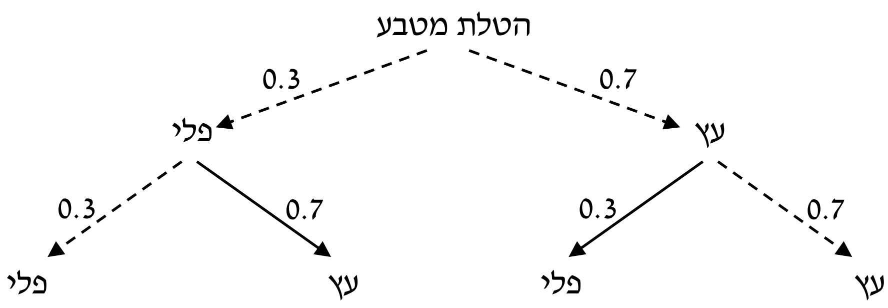
כזכור, כדי לחשב הסתברות של שני אירועים בלתי תלויים, נכפיל את ההסתברויות שלהם.

כדי לחשב את ההסתברות שקיבל <u>עץ בהטלה הראשונה</u> ופלי בהטלה השנייה, נכפיל את שתי ההסתברויות בענף המתאים (הענף המקווקו הימני): $0.7 \cdot 0.3 = 0.21$.

כדי לחשב את ההסתברות שקיבל פלי בהטלה הראשונה <u>ועץ בהטלה השנייה</u>, נכפיל את שתי ההסתברויות בענף המתאים (הענף המקווקו השמאלי): $0.3 \cdot 0.7 = 0.21$.

אנו מעוניינים לדעת מהי ההסתברות שהתרחש אחד מבין שני אלו. כיוון שמדובר על שני <u>מאורעות זרים</u> (שאינם יכולים להתרחש בו זמנית) כדי לחשב את האיחוד שלהם נחבר את ההסתברויות שחישבנו ונקבל שההסתברות המבוקשת היא: $0.7 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.7 = \boxed{0.42}$.

ג. כדי לחשב את ההסתברות שהמטבע ייפול פעמיים על אותו צד ניעזר בשרטוט הבא:



כדי לחשב את ההסתברות שיתקבל <u>עץ בשתי ההטלות</u> נכפיל את שתי ההסתברויות בענף המתאים (הענף המקווקו הימני): $0.7 \cdot 0.7 = 0.49$.

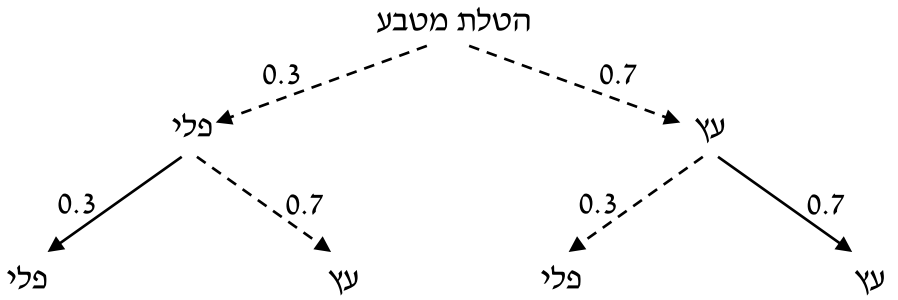
כדי לחשב את ההסתברות שיתקבל <u>פלי בשתי ההטלות</u>, נכפיל את שתי ההסתברויות בענף המתאים (הענף המקווקו השמאלי): $0.3 \cdot 0.3 = 0.09$.

בדומה לסעיף הקודם מדובר על מאורעות זרים ולכן נחבר את ההסתברויות שחישבנו ונמצא שההסתברות המבוקשת היא: $0.49 + 0.09 = 0.58$.

כדי לפתור את המשך השאלה, נוכל לבחור באחת משתי דרכים:

דרך א': באופן כללי, המטבע יכול ליפול פעמיים על אותו צד (עץ, עץ או פלי, פלי) או ליפול פעם אחת על עץ ופעם אחת על פלי. המאורע "ליפול על אותו צד" והמאורע "לקבל פלי רק פעם אחת" הם **מאורעות משלימים** שסכום ההסתברויות שלהם הוא 1. מצאנו שההסתברות למאורע "ליפול פעמיים על אותו צד" היא 0.58. בהתאם, ההסתברות למאורע "לקבל פלי רק פעם אחת" היא $1-0.58=0.42$.

דרך ב': כדי לחשב את ההסתברות לקבל פלי פעם אחת בלבד ניעזר בשרטוט הבא:



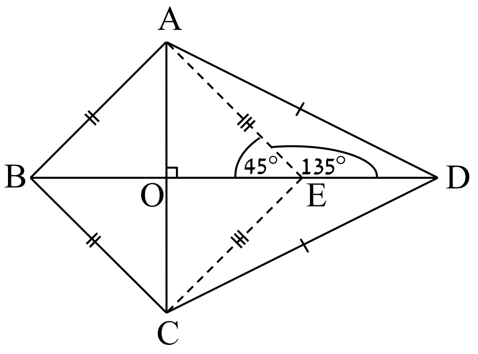
כדי לחשב את ההסתברות שיתקבל <u>פלי בהטלה הראשונה</u> ועץ בהטלה השנייה, נכפיל את שתי ההסתברויות בענף המתאים בעץ (הענף המקווקו השמאלי): $0.3\cdot0.7 = 0.21$.

כדי לחשב את ההסתברות שיתקבל עץ בהטלה הראשונה <u>ופלי בהטלה השנייה</u>, נכפיל את שתי ההסתברויות בענף המתאים בעץ (הענף המקווקו הימני): $0.7\cdot0.3 = 0.21$.

שוב מדובר על שני <u>מאורעות זרים</u> ולכן נחבר את ההסתברויות שחישבנו ונראה שההסתברות המבוקשת היא: $0.3\cdot0.7+0.7\cdot0.3=0.42$.

לסיכום, בשתי הדרכים מצאנו שההסתברות שהמטבע ייפול פעמיים על אותו צד (0.58) <u>גדולה</u> מההסתברות שיתקבל פלי פעם אחת בלבד (0.42) ולכן **<u>הטענה נכונה</u>**.

שאלה 6:



א. ראשית נוכיח שהמרובע ABCE הוא דלתון:

1)	ABCD דלתון	נתון
2)	$AB = BC$	נתון
3)	$AO = OC$	בדלתון ABCD האלכסון הראשי BD חוצה את האלכסון המשני AC
4)	$AC \perp BD$	אלכסוני הדלתון ABCD מאונכים זה לזה
5)	$\sphericalangle AOC = \sphericalangle COE = 90°$	מסקנה מ-(4)
6)	$OE = OE$	הקטע OE שווה לעצמו
7)	$\Delta AOE \cong \Delta COE$	משפט חפיפה צ.ז.צ לפי (3) + (5) + (6)
8)	$AE = CE$	צלעות מתאימות במשולשים חופפים לפי (7)
9)	המרובע ABCE הוא דלתון	מרובע בו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות הוא דלתון

הוכחנו שטענה i נכונה וכעת נבחן את שאר הטענות:

ii. המרובע ABCE הוא בהכרח מעוין: **שגוי**. לא ידוע מיקומה של הנקודה E על הקטע DO ולכן לא ניתן לקבוע שאורכי הצלעות AE ו-CE שווים לאורכי הצלעות AB ו-BC כנדרש עבור מעוין.

iii. המרובע ABCE הוא בהכרח ריבוע: **שגוי**. בדומה לטענה הקודמת, לא ניתן לקבוע בוודאות שאורכי כל צלעות המרובע שוות ולכן אין הכרח שמדובר על ריבוע.

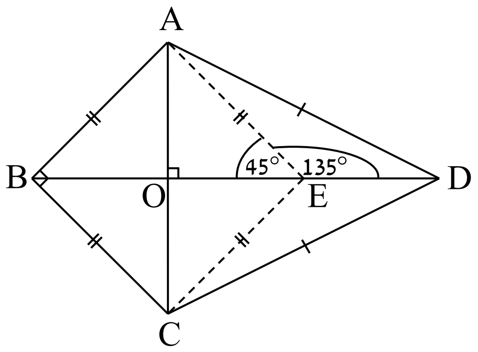
iv. יתכן שהמרובע ABCE הוא מעוין: **נכון**. אילו הצלעות AE ו-CE יהיו שוות באורכן לצלעות AB ו-BC המרובע ABCE יהיה מעוין.

לסיכום, <u>הטענות הנכונות הן: i ו-iv</u>.

ב. נוכיח ש: $AO = OE$.

10)	$\sphericalangle AED = 135°$	נתון
11)	$\sphericalangle AEO = 45°$	$\sphericalangle AED$ ו- $\sphericalangle AEO$ זוויות משלימות ל-180°
12)	$\sphericalangle EAO = 45°$	השלמה ל-180° במשולש ΔAOE
13)	המשולש ΔAOE שווה שוקיים	משולש בו זוויות הבסיס שוות הוא שווה שוקיים
14)	$AO = OE$	צלעות הבסיס במשולש שווה השוקיים ΔAOE שוות זו לזו

מש״ל ב׳



ג. נוכיח שהמרובע ABCE הוא ריבוע:

15)	$\sphericalangle ABO=45°$	נתון
16)	המשולש ΔABE שווה שוקיים	משולש בו זוויות הבסיס שוות הוא שווה שוקיים
17)	$AB=AE$	הצלעות מול זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות זו לזו
18)	$AB=AE=CE=BC$	לפי (2) + (8) + (17) + כלל המעבר
19)	המרובע ABCE הוא מעוין	מרובע בו כל הצלעות שוות הוא מעוין
20)	$\sphericalangle CBO=\sphericalangle ABO=45°$	אלכסון הראש בדלתון ABCD חוצה זווית + לפי (15)
21)	$\sphericalangle ABC=\sphericalangle ABO+\sphericalangle CBO=45°+45°$ $\rightarrow \sphericalangle ABC=90°$	סכום זוויות
22)	המרובע ABCE הוא ריבוע	מעוין בו אחת הזוויות ישרה הוא ריבוע

מש"ל ג'

ד. נסביר מדוע הקטע AE הוא תיכון במשולש ΔADO:

23)	$S_{\Delta ABO}=S_{\Delta ADE}$	נתון
24)	$S_{\Delta ABO}=S_{\Delta AOE}$	אלכסוני הריבוע ABCE מחלקים אותו ל-4 משולשים חופפים שווי שטח
25)	$S_{\Delta AEO}=S_{\Delta ADE}$	כלל המעבר לפי (23) + (24)

כעת נחשב את שטחי המשולשים $S_{\Delta AEO}$ ו- $S_{\Delta ADE}$:

במשולש ΔAOE ישר הזווית ניעזר בניצבים AO ו-OE ובמשולש קהה הזווית ΔAED ניעזר בבסיס DE ובגובה <u>החיצוני</u> AO:

$$S_{\Delta ADE}=\frac{DE\cdot AO}{2} \qquad S_{\Delta AEO}=\frac{OE\cdot AO}{2}$$

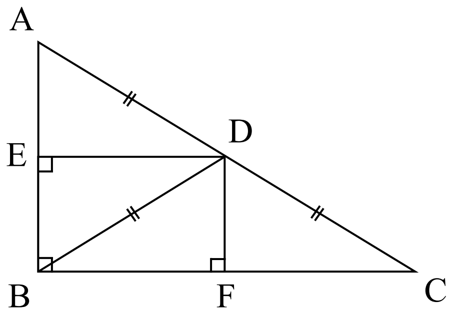
ולפי (25) השטחים שווים ולכן מתקיים:

$$S_{\Delta ADE}=S_{\Delta AEO} \rightarrow \frac{DE\cdot \cancel{AO}}{\cancel{2}}=\frac{OE\cdot \cancel{AO}}{\cancel{2}} \rightarrow DE=OE$$

מכאן שבמשולש ΔAOD הקטע AE יוצא מהקדקוד A וחוצה את הצלע DO ולכן <u>AE הוא תיכון במשולש</u>.

מש"ל ד'

שאלה 7:



א. נוכיח שהמשולש ΔABD הוא שווה שוקיים:

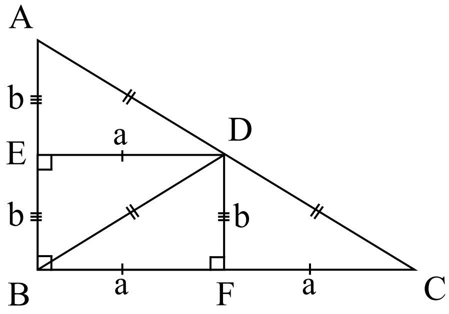
1)	$\sphericalangle ABC = 90^\circ$	נתון שהמשולש ΔABC ישר זווית
2)	$AD = \frac{1}{2}AC$	נתון שהקטע BD הוא תיכון במשולש ΔABC
3)	$BD = \frac{1}{2}AC$	במשולש ישר הזווית ΔABC התיכון ליתר שווה למחציתו
4)	$BD = AD$	כלל המעבר לפי (2) + (3)
5)	המשולש ΔABD הוא שווה שוקיים	מסקנה מ-(4)

מש"ל א'

ב. נוכיח שהמרובע DEBF הוא מלבן:

6)	DE הוא חוצה זווית במשולש ΔABD	נתון
7)	$DE \perp AB$	במשולש שווה השוקיים ΔADB חוצה הזווית DE מתלכד עם הגובה לבסיס
8)	$\sphericalangle DEB = 90^\circ$	מסקנה מ-(7)
9)	$DF \parallel AB$	נתון
10)	$\sphericalangle DFB = \sphericalangle ABC = 90^\circ$	זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים + לפי (1)
11)	המרובע DEBF הוא מלבן	מרובע בו 3 זוויות ישרות הוא מלבן

מש"ל ב'



ג. נסמן: $DE=a$, $DF=b$.

נבטא את שטח המשולש ΔABC באמצעות a ו-b:

12)	$AD=CD$	נתון ש-BD תיכון במשולש ΔABC
13)	$DF \parallel AB$, $DE \parallel BC$	צלעות נגדיות במלבן DEBF מקבילות זו לזו
14)	DE הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC	DE חוצה את הצלע AC ומקביל לבסיס BC
15)	$BC=2DE \rightarrow BC=2a$	אורך קטע אמצעים שווה למחצית אורך הבסיס
16)	DF הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC	DF חוצה את הצלע AC ומקביל לבסיס AB
17)	$AB=2DF \rightarrow AB=2b$	אורך קטע אמצעים שווה למחצית אורך הבסיס

נבטא את שטח המשולש ΔABC בעזרת הניצבים AB ו-BC:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2} \rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{2b\cdot \cancel{2}a}{\cancel{2}} \rightarrow S_{\Delta ABC}=2ab$$

לכן <u>התשובה הנכונה היא: iii</u>.

מש"ל ג'

ד. נתון: $CF=$ 12 ס"מ, $AD=$ 13 ס"מ. נחשב את היקף המשולש ΔABC:

18)	$BF=CF=12$	DF קטע אמצעים ולכן חוצה את הצלע BC
19)	$CD=AD=13$	DE קטע אמצעים ולכן חוצה את הצלע AC
20)	$BC=BF+CF=24$ $AC=AD+CD=26$	סכום צלעות לפי (18) ו-(19)
21)	$AB^2+BC^2=AC^2 \rightarrow AB^2+24^2=26^2$ $\rightarrow AB^2=100 \rightarrow AB=10$	משפט פיתגורס במשולש ישר הזווית ΔABC
22)	$P_{\Delta ABC}=AB+BC+AC$ $\rightarrow P_{\Delta ABC}=10+24+26$ $\rightarrow P_{\Delta ABC}=60$	הצבה לפי (20) + (21)

לכן, היקף המשולש ΔABC הוא: <u>60 ס"מ</u>.

מש"ל ד'