الفصل 10 - الزوايا

مقدّمة في الزوايا

ما هي الهندسة؟

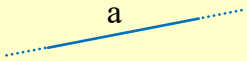
الهندسة هي فرع مركزيّ في الرياضيات يبحث في مواضيع، من بينها، النقاط، المستقيمات، الأشكال في المستوى والفراغ، وفي العلاقات بينها. يعود أصل كلمة هندسة (Geometry) إلى اليونانيّة القديمة، وتتكوّن من كلمتين: geo - وتعني الأرض، وَ metry - تعني القياس. لقد تطوّرت الهندسة في الأصل كأداة عمليّة لقياس الأراضي وأبعاد الأشياء، وتحوّلت على مرّ الأجيال إلى مجال رياضيّ واسع.



الهندسة الكلاسيكيّة، التي تُدرَّس اليوم في المدارس حول العالم، تعتمد في معظمها على المؤلّفات القديمة لعالم الرياضيّات اليونانيّ إقليدس الإسكندريّ (325 ق.م - 265 ق.م)، وهو أحد أعظم علماء الرياضيّات في التاريخ.
بل إنّها تُسمّى على اسمه – "هندسة إقليديّة". تمثّلت مساهمتُه الهائلة في تنظيم الكثير من المعارف الرياضيّة التي كانت معروفة بالفعل قبل عصره، وعَرَضَها في كتابه "الأصول" (العناصر)، والذي يُعتبر أحد أكثر الكتب العلميّة تأثيرًا في التاريخ.

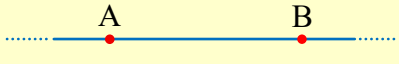
في الهندسة، تمّ تحديد **مفاهيم أساسيّة**، مثل النقطة، الخطّ المستقيم والمستوى، والتي لا نُعرّفها باستخدام مفاهيم أكثر بساطة وهي تُشكّل الأساس لتعريف مفاهيم أخرى كذلك. تمّ في الهندسة تحديد قواعد أساسيّة تُسمى **بديهيّات**، والتي تصف العلاقات بين هذه المفاهيم الأساسيّة. البديهيّة هي قاعدة نفرض أنّها صحيحة، دون أن نبرهن صحّتها. على سبيل المثال، إحدى البديهيّات في الهندسة الإقليديّة هي القاعدة: "عَبْر كلّ نقطتين يمرّ مستقيم واحد ووحيد".

الخطّ المستقيم هو مفهوم أساسيّ لا نُعرّفه. في المرحلة الإعداديّة والثانوية سنتناول الهندسة الإقليدية، وفي هذا السياق يمكننا تخيّله بشكل حدسيّ كخطّ بدون سُمك وهو عبارة عن مجموعة لانهائيّة من النقاط المتلاصقة بعضها ببعض، لا ينحني ولا يلتوي، ويمتدّ بلا نهاية في كلا الاتّجاهين.

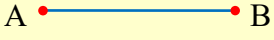


لنتمعّن في المستقيم الذي يظهر على اليسار. الخطوط المتقطّعة على الجانبين تمثّل امتداده اللانهائيّ في كلا الطرفين، إذ لا يمكننا رسمه بالكامل. من المعتاد تسمية الخطوط المستقيمة بأحرف صغيرة، كما هو موضّح في الرسم، حيث تمّت تسميته بالحرف a.

بمساعدة النقطة والخطّ المستقيم، سنُعرّف مفاهيم إضافيّة:



القطعة المستقيمة هي جزء من مستقيم، محدود بين نقطتين.



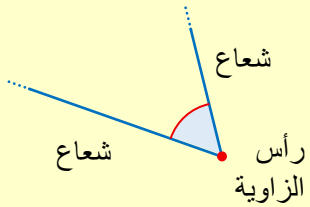
في الهندسة، من المعتاد تسمية النقاط باستخدام أحرف كبيرة.
على الخطّ المستقيم على اليسار، تمّ تحديد النقطتين A وَ B والتي هي أطراف قطعة يمكننا الرمز إليها وتسميتها القطعة AB أو القطعة BA. لا توجد أهميّة لترتيب الأحرف.

الشعاع هو جزء من مستقيم محدود من جهة واحدة بواسطة نقطة.

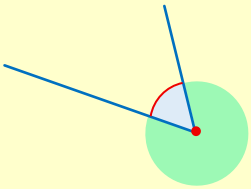
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

سنتناول في هذا الفصل موضوع الزوايا.

الزاوية هي شكل هندسيّ مكوّن من شعاعين
يخرجان من نقطة مشتركة تُسمّى **رأس الزاوية**.
يُسمّى الشعاعان **ساقي الزاوية أو ضلعي الزاوية**.
من هنا فصاعدًا، وللسهولة، سنرسم ساقَي الزوايا كقِطَع، وليس كأشعَّة.



انتبهوا! شعاعان يخرجان من نفس النقطة يصنعان **زاويتين**.
في الرسم على اليسار يصنع الشعاعان الزاويتين الملوّنتين- الزرقاء والخضراء.
من المتّبع الإشارة إلى الزاوية برسم قوس مُنحنٍ.

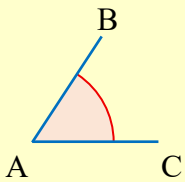


1. انسخوا الرسم الذي على اليسار في الدفتر.
   أ. علِّموا رؤوس الزوايا بلون **أزرق**.
   ب. علِّموا بلون **أحمر** كلّ القطع التي هي سيقان لزوايا.



تسمية الزوايا

المفهوم **"تسمية زوايا"** يشير إلى الطريقة التي من خلالها "نعطي اسمًا لزاوية بكتابة رياضيّة.
لنتمَعَّن في الزاوية على اليسار. النقطة A هي رأس الزاوية منها يخرج
الساقان AB وَ AC. نعرض الآن **إمكانيّتين** لتسمية الزاوية باستخدام رموز:

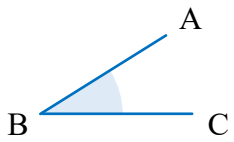


طريقة أ: تسمية الزاوية باستخدام الأحرف الثلاثة التي تظهر على ساقّي الزاوية.
في هذه التسمية، وهي الأكثر قبولًا، تظهر الأحرف الثلاثة بحيث يكون الحرف الذي يمثّل رأس الزاوية في الوسط، وعلى الجانبين تظهر الأحرف التي تمثّل أطراف الساقين. رأس الزاوية الظاهر في الرسم هو A، لذلك سيظهر الحرف A في الوسط، وعلى جانبيه الحرفان B وَ C. أي إنّه، يمكننا تسمية الزاوية الموجودة في الرسم بأحد الخيارين: ∢BAC أو ∢CAB.

طريقة ب: تسمية الزاوية باستخدام رأس الزاوية فقط.
رأس الزاوية هو A، وبناءً على ذلك، يمكننا الإشارة إلى الزاوية في الرسم على أنّها الزاوية A، ونضيف رمز الزاوية ∢. للتلخيص، الزاوية الظاهرة في الرسم هي ∢A.
في كلا الخيارين، سنرمز إلى الزوايا باستخدام أحرف إنجليزيّة **كبيرة**، مثل A، B، C، وَ D. وليس باستخدام أحرف صغيرة مثل a، b، c، وَ d. وكما سنرى لاحقًا، إنّ التسمية باستخدام حرف واحد لا تتناسب مع كلّ زاوية.

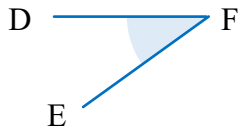
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

2. حدّدوا بأيّ من الخيارات التالية يمكن تسمية الزاوية الزرقاء:



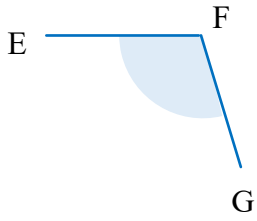
i. ∢ABC ii. ∢CBA iii. ∢CAB iv. ∢B v. ∢C

3. اقترحوا إمكانيّتين لتسمية الزاوية الزرقاء التي أمامكم باستخدام ثلاثة أحرف.

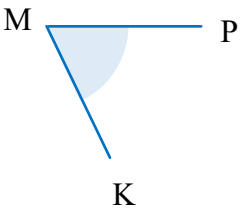


4. تظهر في كلّ بند زاوية زرقاء. اقترحوا إمكانيّتين لتسميتها:

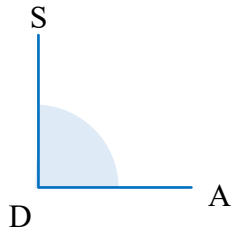
أ.



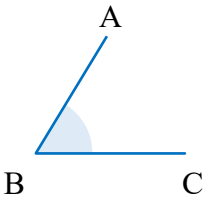
ب.



جـ.

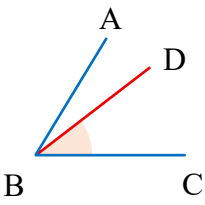


5. طُلِبَ من تلاميذ الصفّ أن يُسَمّوا الزاوية **الزرقاء** المرسومة على اليسار.



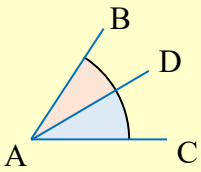
أ. اقترحت وداد: "نسمّي الزاوية، بـ∢ABC".
اقترح جلال: "نسمّي الزاوية، بـ∢B".
هل التسميتان (الرمزان) التي اقترحاها صحيحتان؟ أيّ منها كنتم ستختارون؟ علّلوا.

ب. بعد أن مرّروا القطعة BD، طُلِبَ من تلاميذ الصفّ تسمية الزاوية **الحمراء** على اليسار. اقترحت وداد: "نسمّي الزاوية بـ ∢DBC".
اقترح جلال: "نسمّي الزاوية بـ ∢B".
هل التسميتان (الرمزان) التي اقترحاها صحيحتان؟ أيّ منها كنتم تختارون؟ اشرحوا.



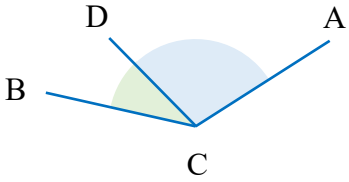
ج. في أيّ حالات، حسب رأيكم، يُفضّل استخدام كلّ طريقة من طرق التسمية التي اقترحها جلال ووداد؟

في السؤال السابق، تناولنا سلبيّات وإيجابيّات الطرق التي تعلّمناها لتسمية الزوايا.
في الرسم على اليسار الرأس A مشترك للزاويتين الزرقاء والحمراء.
لا يمكننا تسمية هاتين الزاويتين بنفس الاسم ∢A، لأنّ هذه التسمية لا تُمَكِّنُنا من التمييز بينهما. الحلّ هو التسمية باستخدام ثلاثة أحرف:
الزاوية الحمراء بـ ∢BAD أو بـ ∢DAB، والزاوية الزرقاء بـ ∢CAD أو بـ ∢DAC.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

6. في الرسم أمامكم، الرأس C مشترك لِعِدَّة زوايا.



أ. أيّ من التعابير التالية يمثّل الزاوية الزرقاء؟

i. ∢ACD ii. ∢ACB iii. ∢C iv. ∢DCA

ب. أيّ من التعابير التالية يمثّل الزاوية الخضراء؟

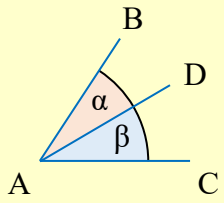
i. ∢DCB ii. ∢BCD iii. ∢C iv. ∢B

تسمية/ رمز مقدار الزاوية باستخدام الأحرف اليونانيّة

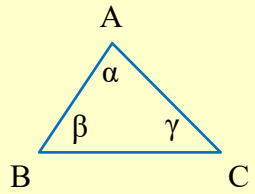
بعد أن عرضنا طرقًا مختلفة لتسمية زاوية، سنعرض الآن طريقة يمكننا من خلالها تسمية **مقدار** الزاوية. هذه التسمية تكون باستخدام أحرف يونانيّة:

على سبيل المثال، بمساعدة الأحرف ألفا α، بيتّا β، چاما γ، دِلتا δ.

في الرسم مقدار الزاوية الحمراء سُمّيَ أو رُمِز له بـ α، ومقدار الزاوية الزرقاء بـ β.



عندما نرمز بأحرف يونانيّة **لا نضيف** الإشارة ∢ ، على سبيل المثال، نكتب α ولا نكتب ∢α . يمكن استخدام الأحرف اليونانيّة كرُموز لمقادير زوايا في مضلّعات مختلفة. على سبيل المثال، من المُتَّبَع تسمية زوايا المثلّث باستخدام الأحرف α، β وَ γ كما هو موصوف في الرسم.

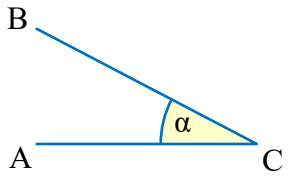


7. يظهر في كلّ بند رسم واحد وأربعة تعابير.

حدّدوا أيًّا من التعابير **يُمثّل** الزاوية التي مقدارها α، واشرحوا لماذا كلّ واحد من التعابير الأخرى لا يمثّلها:

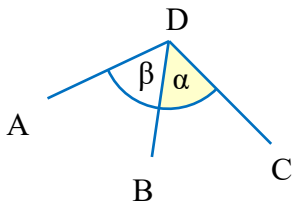
أ. الرسم على اليسار. التعابير:

i. ∢C ii. ∢B iii. ∢CBA iv. ∢ACB



ب. الرسم على اليسار. التعابير:

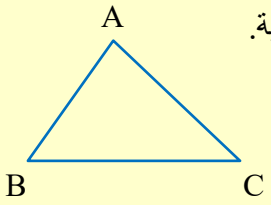
i. ∢D ii. ∢CDB iii. ∢CBD iv. ∢BDC



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

تسمية المثلّث

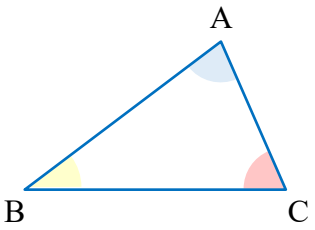
المفهوم **"تسمية المثلّث"** يشير إلى الطريقة التي فيها "نعطي اسمًا" للمثلّث بكتابة رياضيّة.



من المُتّبع تمثيل رؤوس مضلّع – مثلّث، شكل رباعيّ، مخمّس وما إلى ذلك – بواسطة أحرف لاتينيّة كبيرة. يظهر على اليسار مثلّث رؤوسه A، B، وَ C.

بناءً على ذلك، يمكننا تسمية المثلّث الظاهر على اليسار بـالمثلّث ABC بإضافة الرمز Δ على النحو التالي: ΔABC. إذ إنّ ترتيب الأحرف في تسمية المثلّث **ليس مهمًّا**، لذلك يمكننا تسمية المثلّث الظاهر في الرسم أيضًا بأيّ من الخيارات التالية: ΔACB، ΔBAC، ΔBCA، ΔCAB، ΔCBA.

8. أمامكم مثلّث.



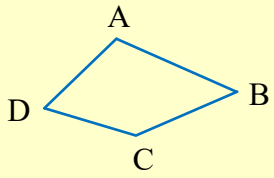
أ. اقترحوا **إمكانيّتين** لتسمية المثلّث.

ب. اقترحوا **إمكانيّتين** لتسمية الزاوية.

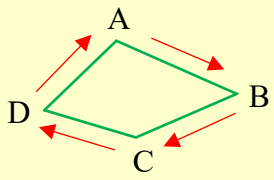
1. الزرقاء. 2. الصفراء. 3. الحمراء.

تسمية الشكل الرباعيّ

يظهر على اليسار شكل رباعيّ رؤوسه A، B، C وَ D. عندما نعطي اسمًا لشكل رباعيّ **هناك أهمّيّة للترتيب** الذي تظهر فيه الرؤوس. نعرض طريقتين للتسمية:



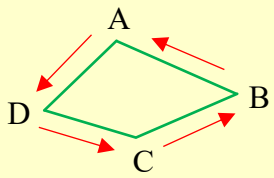
طريقة أ: كتابة الرؤوس بترتيب يوافق اتّجاه عقارب الساعة.



نختار أيّ رأس لنبدأ منه كتابة الأحرف ونستمرّ في كتابة الأحرف التالية وفقًا لترتيب ظهورها مع اتّجاه عقارب الساعة. الحرف الذي يمثّل الرأس الأوّل الذي اخترناه سيظهر في جهة **اليسار**.

على سبيل المثال، إذا بدأنا من الرأس A، الحرف التالي في الكتابة سيكون B، C، ثمّ D، فنحصل على ABCD. بشكل مشابه، يمكننا تسمية الشكل الرباعيّ الذي يظهر على اليسار بـ BCDA، CDAB أو DABC.

طريقة ب: كتابة الرؤوس بترتيب معاكس لاتّجاه عقارب الساعة.



يمكننا تسمية الشكل الرباعيّ الذي يظهر على اليسار بـ ADCB ولكن أيضًا بـ: BADC، CBAD أو DCBA.

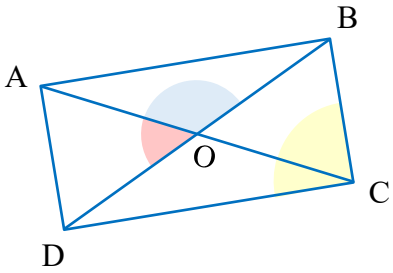
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

انتبهوا!

يجب التأكّد من أنّ ترتيب الأحرف في تسمية الشكل الرباعيّ يطابق ترتيب الرؤوس. على سبيل المثال، لا يمكننا تسمية الشكل الرباعيّ بـ ACBD لأن الرأس **B** **لا يقع** بين الرأسين **C** وَ **D** في الرسم.

نشير إلى أنّه باستخدام هاتين الطريقتين من المُتَّبَع كتابة ترتيب الرؤوس في المضلّعات الأخرى أيضًا.

9. أقطار المستطيل على اليسار تتقاطع في النقطة O.



أ. اقترحوا **طريقتين** لتسمية المستطيل.

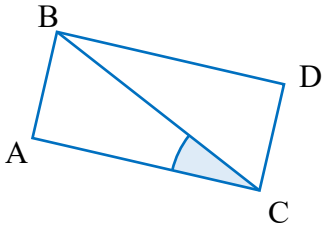
ب. اقترحوا **تسمية ممكنة** للزاوية الزرقاء وللزاوية الحمراء.

ج. اقترحوا **طريقتين** لتسمية الزاوية الصفراء.

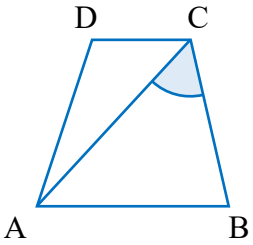
10. أ. في كلّ رسم يمكن تحديد شكل رباعيّ. اقترحوا **إمكانيّتين** لتسميته.

ب. في كلّ بند، اقترحوا **تسميتين ممكنتين** للزاوية الزرقاء.

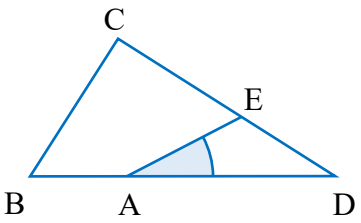
I.



II.



III.



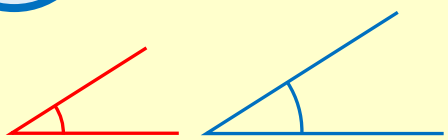
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

مقارنة مقادير زوايا

زوايا متساوية في المقدار

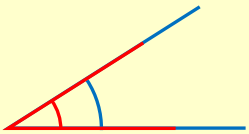
تمعّنوا في الزاويتين اللتين تظهران على اليسار.

سنحاول وضع الزاوية الحمراء على الزاوية الزرقاء بحيث:



1. يتّحد رأسا الزاويتين.
2. تتّحد ساقا الزاويتين.

إذا تحقّق الشرطان، نستنتج أنّ الزاويتين متساويتان.



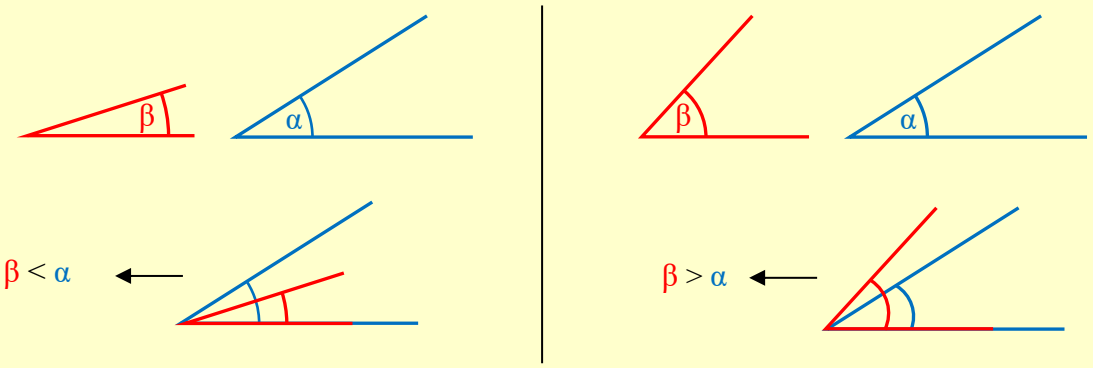
انتبهوا! الزاويتان متساويتان في المقدار، رغم أنّ ساقَي الزاوية الزرقاء أطول من ساقي الزاوية الحمراء. أي إنّ، **مقدار الزاوية لا يتعلّق بطول الساقين.**

زوايا مختلفة في المقدار

نتمعّن في الزاوية الزرقاء التي مقدارها α وفي الحمراء التي مقدارها β. نضع الزاوية الحمراء على الزاوية الزرقاء بحيث يتّحد الرأسان، وإحدى ساقي الزاوية الحمراء تتّحد مع إحدى ساقي الزاوية الزرقاء.

وإذا لم تتّحد الساقان الأخريان، نستنتج أنّ الزاويتين **مختلفتان**.

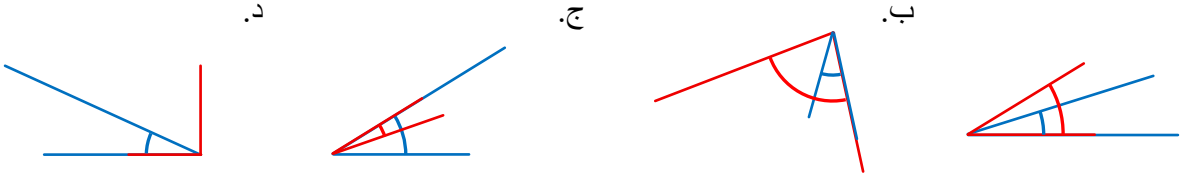
في المثال الأيمن الزاوية الحمراء أكبرمن الزاوية الزرقاء. في المثال الأيسر الزاوية الزرقاء هي الأكبر.



ادخلوا الفعّالية الرقميّة (الديجيتاليّة) التي تظهر في الأعلى على اليسار، وقارنوا بين مقادير الزوايا.

11. في كلّ بند، تظهر زاوية حمراء وزاوية زرقاء وُضِعت إحداهما على الأخرى، بحيث أنّ لهما رأسًا مشتركًا وساقًا مشتركة. حدّدوا أيّ الزاويتين - الحمراء أم الزرقاء - هي الأكبر:

أ. ب. ج. د.



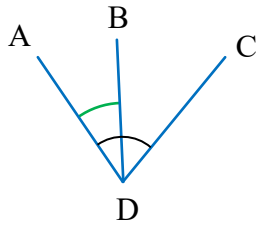
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

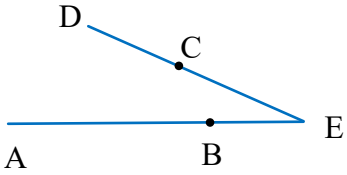
12. استعينوا بالرسم، وأكملوا في الدفتر بإحدى الإشارات > ، = ، < :

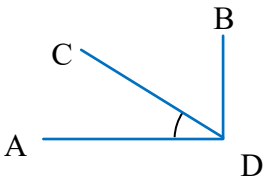
أ. ∢ADB ☐ ∢ADC

ب. ∢CEB ☐ ∢AED

ج. ∢CDA ☐ ∢ADB





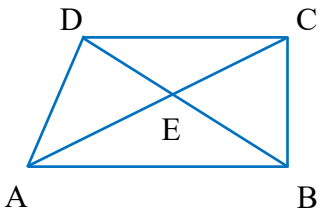


13. القطعتان AC وَ BD تتقاطعان في النقطة E كما هو موصوف في الرسم. أكملوا بإحدى الإشارات > ، = ، <:

أ. ∢ADB ☐ ∢ADC

ب. ∢ABC ☐ ∢ABD

ج. ∢ACB ☐ ∢BCE



الزاوية القائمة



في دراستنا لموضوع الرياضيّات تناولنا الزاوية القائمة.
من المعتاد الإشارة للزاوية القائمة بشكل مربّع، كما هو موصوف على اليسار،
وليس بواسطة قوس.



سنوضّح ما هي الزاوية القائمة بالاستعانة بالصورة التي على اليسار،
والتي وضع فيها قلم على الطاولة. القلم يقف ثابتًا ولا يميل جانبًا.
الزاوية التي يُشكِّلها مع الطاولة هي زاوية قائمة، كما هو موصوف في الصورة.

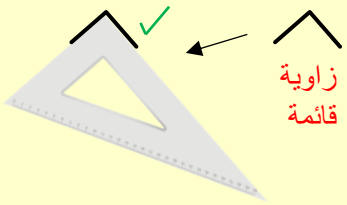


الزاوية القائمة منتشرة جدًّا في المحيط القريب منّا،
كما نلاحظ في الصورة التي على اليسار، ولها أيضًا
أهميّة كبيرة في علوم مختلفة - في الهندسة، الجرافيك،
الفيزياء، علوم الحاسوب، الهندسة المعماريّة، وغيرها.
انظروا حولكم جيّدًا. أين يمكن أن تجدوا زوايا قائمة؟

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

كيف يمكننا رسم زاوية قائمة أو التحديد بشكل دقيق، ما إذا كانت زاوية معطاة هي زاوية قائمة؟

من أجل التحقّق من أنّ زاوية معطاة هي قائمة، نستعين بزاوية أخرى نعلم أنّها قائمة، ونفحص هل الزاويتان متساويتان. يمكننا الاستعانة بالمسطرة المثلّثة (مثلّث الرسم). نحاول أن نضع الزاوية القائمة في المسطرة المثلّثة على الزاوية التي نريد فحصها بحيث:

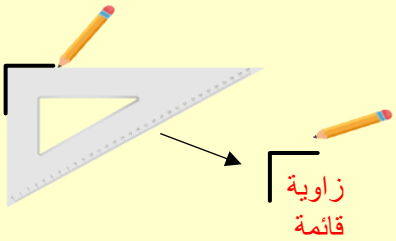


1. يتطابق رأسا الزاويتين.
2. تتطابق ساقا الزاويتين.

إذا تحقّق كلا الشرطين معًا، نستنتج أنّ الزاويتين متساويتان،
وأنّ الزاوية التي فحصناها هي بالفعل زاوية قائمة.

انتبهوا! الزاويتان متساويتان في المقدار، على الرغم من أنّ ساقي المسطرة أطول من ساقي الزاوية التي فحصناها. أي أنّ **طول الساقين ليس له علاقة بمقدار الزاوية**.

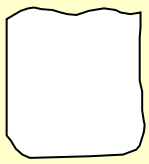
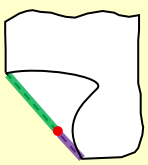
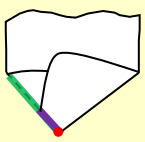
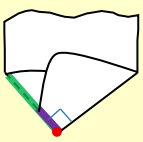
باستخدام نفس المبدأ، يمكننا أيضًا رسم زاوية قائمة.
نضع المسطرة على الورقة، ونرسم ساقي الزاوية ورأسها،
وفقًا لرأس وساقي المسطرة، كما هو موضّح في الرسم على اليسار.
بهذه الطريقة، نكون قد رسمنا زاوية مساوية لزاوية المسطرة،
وبالتالي هي أيضًا قائمة.



يمكننا رسم زاوية قائمة أو التحقق ممّا إذا كانت زاوية معطاة أنّها زاوية قائمة،
أيضًا بمساعدة أي جسم صلب فيه زاوية قائمة.
على سبيل المثال، يمكننا استخدام مسطرة مستطيلة عاديّة أو دفتر مستطيل الشكل.



يمكننا أيضًا إنشاء زاوية قائمة باستخدام أيّ ورقة، حتّى لو لم تكن مستطيلة الشكل.

خذوا ورقة.	اطووا **أينما شِئتم**. لا أهميّة لمكان الطيّ.	اختاروا نقطة ما على خطّ الطيّ.	اطووا **أحد أجزاء** خطّ الطيّ على **جزئِه الآخر** بحيث يتطابق الجزءان.	حصلنا على زاوية **قائمة!**
				

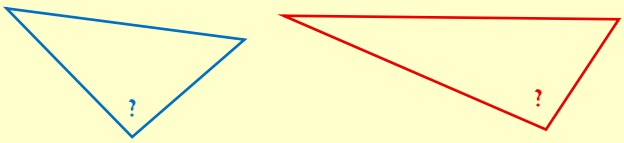
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

مثال:

أُشيرَ في كلّ مثلّث إلى إحدى الزوايا.

استعينوا بإحدى الطرق التي عرضناها،

وافحصوا هل الزوايا المشار إليها هي زوايا قائمة.

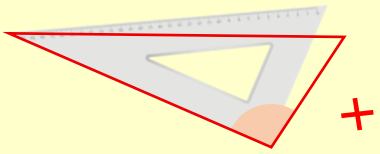


مثلّث I مثلّث II

الحلّ:

نفحص المثلّث I بمساعدة الزاوية القائمة في المسطرة المثلّثة.

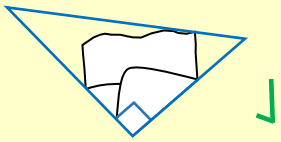
يمكن رؤية أنّ أضلاع المسطرة المثلّثة لا تنطبق على ساقي الزاوية، ومن ذلك نستنتج أنّ **الزاوية ليست قائمة**.



نفحص المثلّث II بواسطة طيّ الورقة.

يمكن رؤية أنّ أضلاع الورقة المطويّة تنطبق على ساقي الزاوية،

ومن ذلك نستنتج أنّ **الزاوية قائمة**.



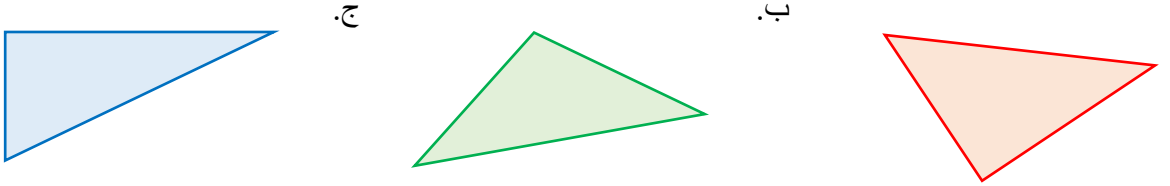
14. استعينوا بإحدى الطرق التي عرضناها، وحدّدوا ما إذا كانت زاوية فتح المقصّ قائمة:

أ. ب. ج. د. هـ.

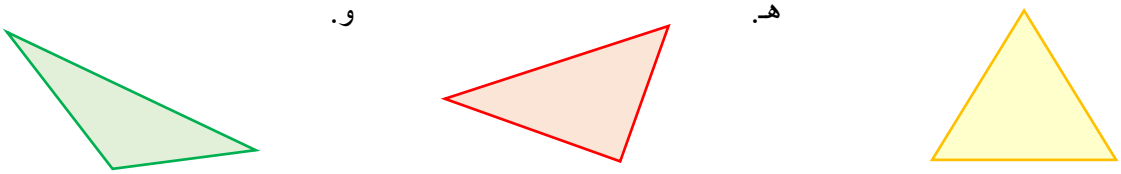


15. استعينوا بطريقة أو بأكثر من الطرق التي عرضناها، وحدّدوا في كلّ بند هل توجد في المثلّث زاوية قائمة:

أ. ب. ج.



د. هـ. و.



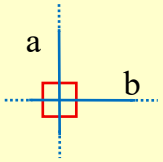
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

مستقيمات متعامدة

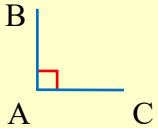
نُذكِّر أنّه عندما تتشكّل زاوية $a \perp b$ قائمة بين مستقيمات أو قطع، نقول إنّها **متعامدة**.

يُشار للمستقيمات أو القطع المتعامدة بالرمز $\perp$.

يظهر في الرسم المستقيمان المتعامدان a وَ b. نكتب بكتابة رياضيّة: $a \perp b$

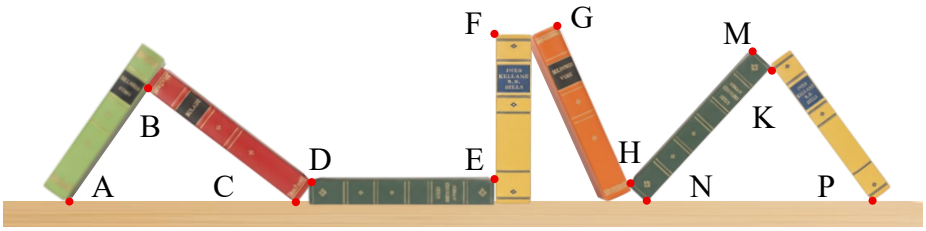


في هذا الرسم تظهر القطعتان المتعامدتان AB وَ AC. نكتب بكتابة رياضيّة: $AB \perp AC$.



انتبهوا! عندما يتقاطع مستقيمان ويتعامدان، تنتج أربع زوايا قائمة.

16. أمامكم كتب موضوعة على رفّ. استعينوا بإحدى الطرق التي تعلّمناها، وحدّدوا أيّ الادّعاءات صحيحة:



i. $AB \perp BC$ ii. $DE \perp EF$ iii. $GH \perp MH$ iv. $NK \perp KP$

17. أمامكم أجزاء من خريطتين لمدينتي تلّ أبيب ونيو يورك أُخِذت من موقع Google Maps:

تلّ أبيب



نيو يورك



أ. جدوا في خارطة تلّ أبيب شارعين: 1. متعامدين. 2. غير متعامدين.

ب. جدوا في خارطة نيويورك شارعين: 1. متعامدين. 2. غير متعامدين.

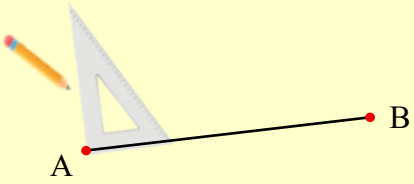
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

بناء زاوية قائمة على قطعة معطاة

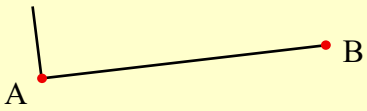
تظهرعلى اليسار القطعة AB.



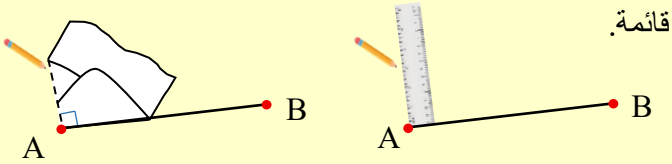
سنعرض طريقة بناء زاوية قائمة رأسها في النقطة A،
وإحدى ساقيها موضوعة على القطعة AB.
نضع رأس الزاوية القائمة للمسطرة المثلّثة على النقطة A،
بحيث تتّحد إحدى ساقي الزاوية القائمة في المسطرة مع القطعة AB.



الآن نرسم بقلم رصاص خطًّا على طول الساق الثانية للزاوية
حتّى نصل إلى النقطة A. بهذه الطريقة نحصل على زاوية قائمة.

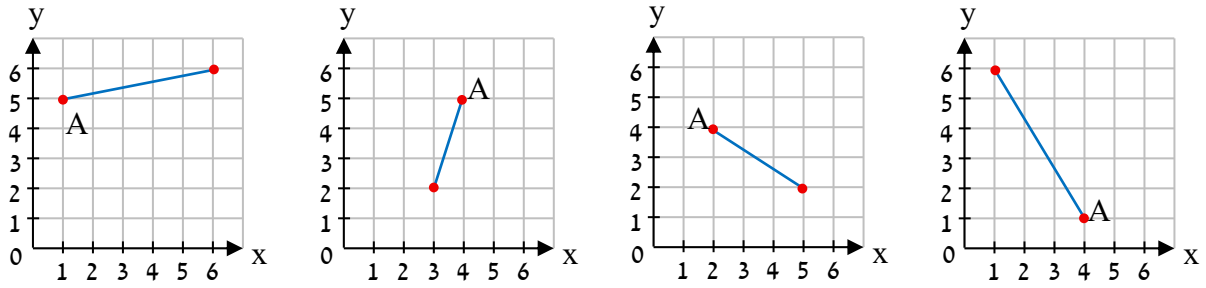


يمكننا رسم زاوية قائمة بالاستعانة بجميع الأدوات التي استعنّا بها
حتى الآن لكي نفحص ما إذا كانت زاوية ما هي زاوية قائمة.
يظهرعلى اليسارمثال يوضّح طريقة الرسم بواسطة
مسطرة عاديّة، أو بواسطة طيّ ورقة.



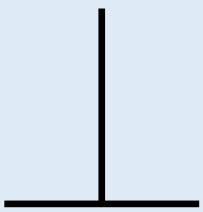
18. في كلّ بند، انسخوا الرسم، وأكملوه لتحصلوا على زاوية قائمة، بحيث تكون النقطة A رأسًا للزاوية:

أ. ب. ج. د.



أيّ قطعة هي الأطول؟

أمامكم قِطعتان متعامدتان. تمعّنوا فيهما، وحاولوا التحديد
بدون قياس أيّ القطعتين أطول. بعد ذلك، افحصوا بمساعدة مسطرة.



هل تفاجأتم؟ تُسمى هذه الخدعة: "الخدعة العموديّة-الأفقيّة"، وقد تمّ عرضها
في سنة 1855 على يد الرياضيّ الفيزيائيّ الألمانيّ يوهان جوزيف أوبل.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

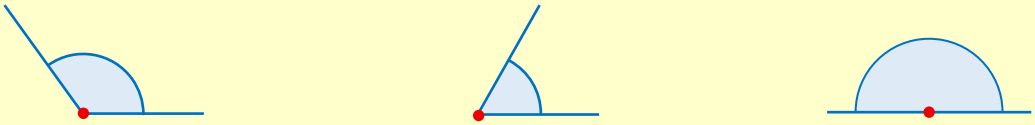
أنواع زوايا أخرى

في دراسة الرياضيّات، تناولنا أنواعًا أخرى من الزوايا:

زاوية مستقيمة هي زاوية ساقاها يشكّلان خطًّا مستقيمًا.

زاوية حادّة هي زاوية **أصغر** من زاوية قائمة.

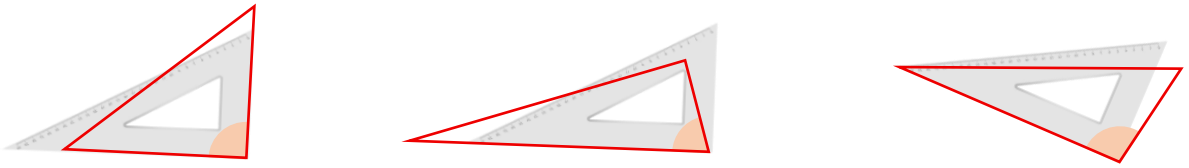
زاوية منفرجة هي زاوية أكبر من زاوية قائمة **وأصغر** من زاوية مستقيمة.



يمكننا مقارنة زوايا مختلفة بزاوية قائمة وبذلك نستنتج ما إذا كانت الزاوية أكبر من زاوية قائمة (منفرجة أو مستقيمة) أو أصغر منها (زاوية حادة).

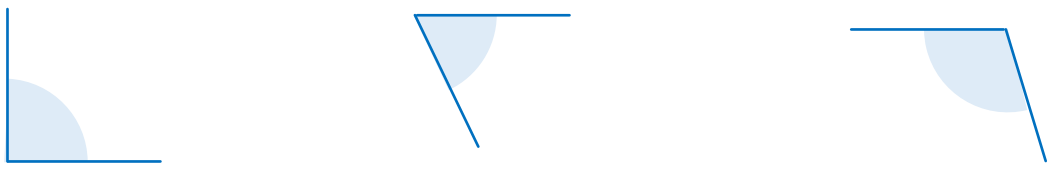
19. في كلّ بند، تمّ وضع مسطرة مثلّث على زاوية حمراء. حدّدوا ما إذا كانت الزاوية الحمراء حادّة، قائمة أم منفرجة.

أ. ب. ج.



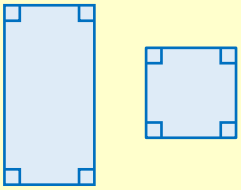
20. في كلّ بند، استعينوا بالمسطرة، وافحصوا ما إذا كانت الزاوية الزرقاء حادّة، قائمة أم منفرجة.

أ. ب. ج.

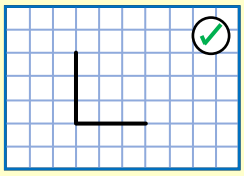


© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

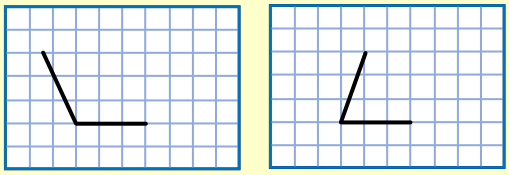
يمكننا تمييز (تحديد) أو رسم زوايا مختلفة أيضًا بالاستعانة بتربيعات الدّفتر



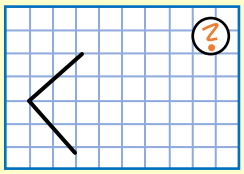
التربيعات في الدفتر هي مربّعات. نُذَكّر أنّه في المربّع والمستطيل **الزوايا الأربع هي زوايا قائمة**. من هذا نستنتج أنّ الزوايا بين الخطوط الأفقيّة والعموديّة في ورقة التربيعات هي زوايا قائمة. يمكننا الاستعانة بها كي نرسم زاوية قائمة، أو كي نفحص ما إذا كانت زاوية معطاة هي قائمة.



في الرسم الذي على اليسار تظهر زاوية رأسها يقع في رأس تربيعة **وساقاها** متّحدتان مع خطوط التربيعة.
في مثل هذه الحالة، يمكننا التحديد أنّ الزاوية **قائمة**.



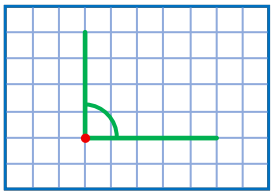
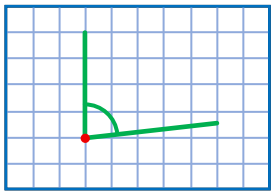
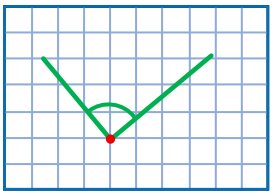
في الرسوم التي على اليسار تظهر زوايا رأسها يقع على رأس تربيعة لكن **ساقًا واحدة فقط** من ساقي الزاوية متّحدة مع خطوط التربيعات.
في مثل هذه الحالات يمكننا التحديد أنّ الزاوية **ليست قائمة**.
يمكننا التمييز أنّ الزاوية اليمنى **حادّة**، والزاوية اليسرى **منفرجة**.



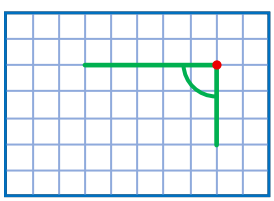
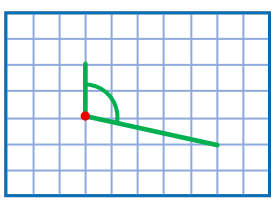
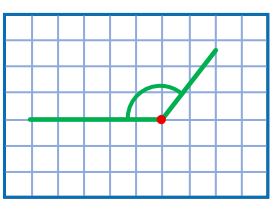
في الرسم الذي على اليسار، شُعاعا (ساقا) الزاوية لا ينطبقان على خطوط التربيعات، لذلك في هذه الحالة **لا يمكننا تحديد نوع الزاوية اعتمادًا على التربيعات فقط**.
يمكننا استعمال إحدى **الطرق الأخرى** التي تعلمناها من أجل ذلك.

21. استعينوا بالتربيعات **فقط** وحدّدوا ما إذا كانت الزاوية حادّة، قائمة أو منفرجة. إذا لم يكن ذلك ممكنًا، اذكروا ذلك:

أ. ب. ج.

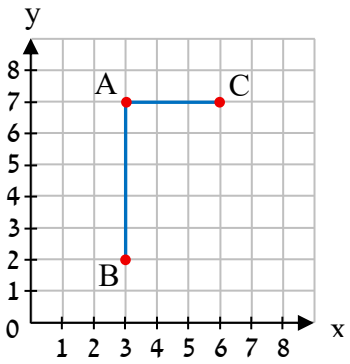




د. هـ. و.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

22. في هيئة المحاور ضلعان متجاوران لشكل رباعيّ قد مُحِيَ منه ضلعان من أضلاعه.

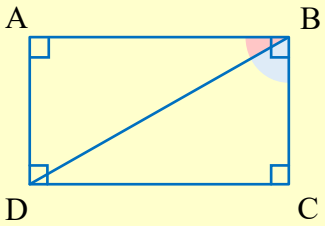


أ. اقترحوا إحداثيّات لنقطة D بها تحصلون على شكل رباعيّ، بحيث يكون:

1. فيه زاوية قائمة **واحدة** فقط.
2. فيه **زاويتان** قائمتان فقط.
3. فيه الزوايا **الأربع** قائمة.

ب. هل توجد نقطة D بها يتكوّن شكل رباعيّ له ثلاث زوايا قائمة **فقط**؟ علّلوا.

مثال: في المستطيل ABCD يظهر القطر BD.



أ. في أيّ إجابة يظهر رمز (اسم) صحيح للزاوية الزرقاء؟

i. ∢CBD ii. ∢ABD iii. ∢ABC iv. ∢B

ب. في أيّ إجابة يظهر رمز (اسم) صحيح للزاوية الحمراء؟

i. ∢AD ii. ∢ADB iii. ∢B iv. ∢ABD

ج. هل يمكن التحديد بأنّ الزوايا التي تناولناها في البندين (أ) وَ (ب) هي زوايا حادّة؟ علّلوا.

الحلّ:

أ. الإجابة الصحيحة هي i. في الإجابة ii تظهر أحرف تمثّل أطراف ساقَي زاوية أخرى. الإجابة iii تمثّل زاوية قائمة في المستطيل، من طريقة التسمية في الإجابة iv لا يمكن تحديد أيّ زاوية من بين الزوايا الثلاث التي رأس كلّ منها هو الرأس B هي الزاوية المقصودة.

ب. الإجابة الصحيحة هي iv. الكتابة في i تعرض رأسين فقط بدلًا من ثلاثة أو واحد. في الإجابة ii عُرِضت زاوية أخرى رأسها هو D. في الإجابة iii لا يمكن تحديد الزاوية المقصودة من بين الزوايا الثلاث التي رأس كلّ منها هو الرأس B.

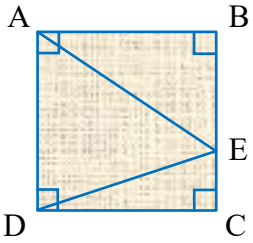
ج. نعم. لكلّ من الزاويتين الزرقاء والحمراء رأس مشترك وساق مشتركة مع الزاوية القائمة ∢ABC.
يمكن تمييز أنّ كلتيهما أصغر منها، ولذلك نستنتج أنّ كلتيهما زاويتان حادّتان.

23. أمامكم السجادة المربّعة ABCD.

النقطة E تقع على الضّلع BC.

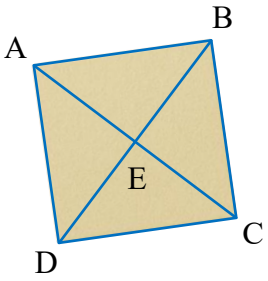
حدّدوا ثلاث زوايا يمكن الجزم بأنّها حادّة بالتأكيد.

اشرحوا.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

24. أمامكم بلاطة مطبخ شكلها مستطيل ABCD أقطاره تتقاطع في النقطة E.



لكلّ زاوية، حدّدوا ما إذا كانت حادّة أم قائمة. إذا **لم يكن التحديد ممكنًا**، اذكروا ذلك:

أ. $\sphericalangle ADC$ ب. $\sphericalangle ACD$ ج. $\sphericalangle AEB$

د. $\sphericalangle ABE$ هـ. $\sphericalangle BEC$ و. $\sphericalangle CBA$

25. ارسموا مستطيلًا، وارسموا أحد أقطاره.

أ. في كلّ بند، عيّنوا الزاوية المطلوبة. إذا **لم يكن ذلك ممكنًا**، اذكروا ذلك:

1. زاوية قائمة. 2. زاوية حادّة. 3. زاوية منفرجة.

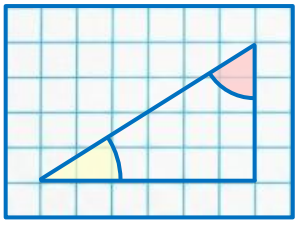
ب. عيّنت لينا زاوية معيّنة، ساقاها هما القطر وأحد أضلاع المستطيل.

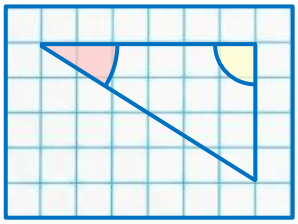
هل هذه الزاوية حادّة، قائمة أم منفرجة؟ اشرحوا.

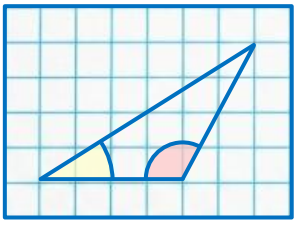
26. في المثلّثات المرسومة على ورقة مربّعات، تمّ تعيين زاوية صفراء وزاوية حمراء.

حدّدوا لكلّ زاوية ما إذا كانت حادّة، قائمة أم منفرجة.

أ. ب. ج.





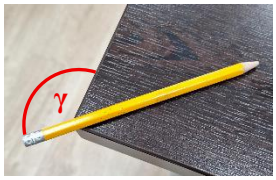


27. أمامكم قلم رصاص موضوع على زاوية طاولة مستطيلة.

أ. حدّدوا ما هو نوع كلّ زاوية من الزوايا المُشار إلى مقدارها بـ α، β وَ γ:





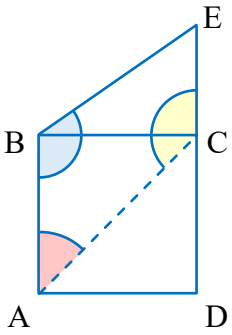


ب. حدّدوا لكلّ ادّعاء ما إذا كان صحيحًا، خطأ أو لا يمكن التحديد:

i. $\gamma < \alpha$ ii. $\beta < \gamma$ iii. $\beta < \alpha$

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

28. أمامكم شكل مركّب من مرّبع ABCD ومثلّث قائم الزاوية ΔBCE



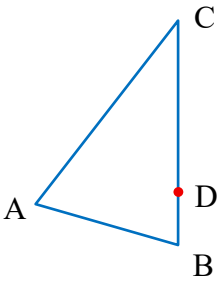
حيث ∢BCE قائمة. النقاط E، C وَ D تقع على مستقيم واحد.

أ. اقترحوا رمزًا للزاوية الزرقاء الكاملة. هل هي حادّة، قائمة أم منفرجة؟

ب. اقترحوا رمزًا للزاوية الحمراء. هل هي حادّة، قائمة أم منفرجة؟

ج. اقترحوا رمزًا للزاوية الصفراء الكاملة. هل هي حادة، قائمة أم منفرجة؟

29. في ΔABC النقطة D تقع على الضلع BC.



حدّدوا أيّ ادّعاء صحيح، واشرحوا:

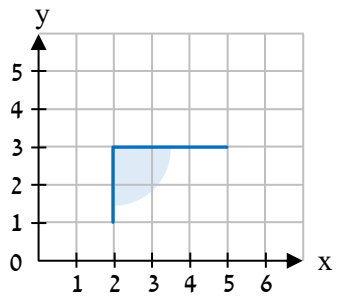
i. كلّما قرّبنا النقطة D إلى الرأس C، فإنّ ∢ABD تكبر.

ii. كلّما قرّبنا النقطة D إلى الراس C، فإنّ ∢ABD تصغر.

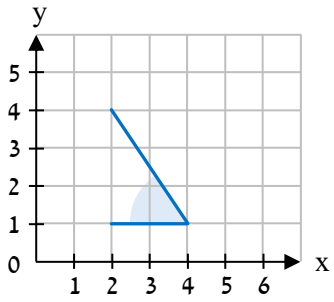
iii. موقع النقطة D على الضلع BC لا يؤثّر على مقدار ∢ABD.

30. في كلّ بند تظهر زاوية في هيئة المحاور. استعينوا بالتربيعات، وحدّدوا هل هي حادّة، قائمة أم منفرجة.

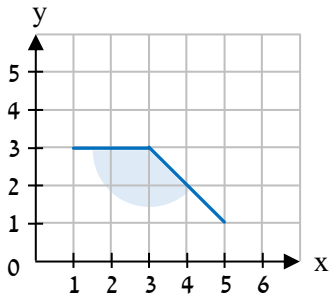
أ.



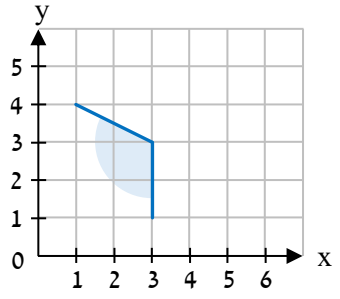
ب.



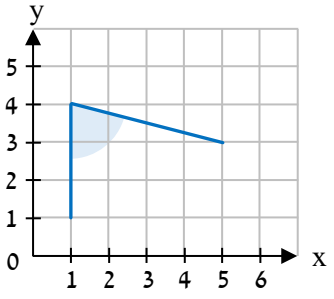
ج.



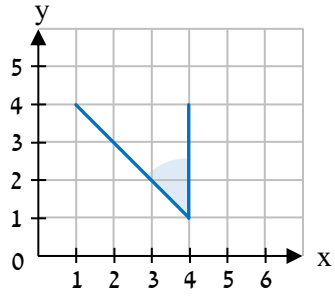
د.



هـ.

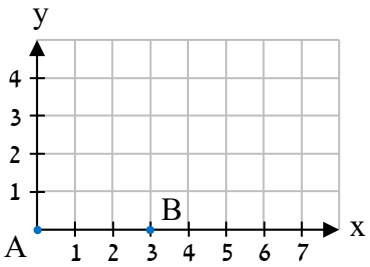


و.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

31. في هيئة المحاور التي أمامكم معطاة النقاط A (0 , 0) وَ B (3 , 0).



أ. 1. اقترحوا إحداثيّات لنقطة C **من اختياركم** بحيث تكون ABC∢ زاوية قائمة.

2. هل توجد نقاط أخرى كهذه؟ اشرحوا.

ب. 1. اقترحوا إحداثيّات لنقطة D **من اختياركم** بحيث تكون ABD∢ زاوية حادّة.

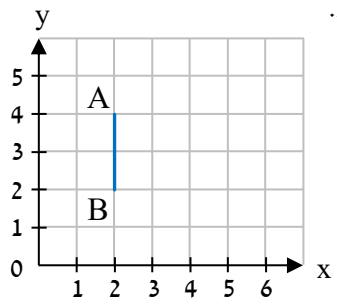
2. هل توجد نقاط أخرى كهذه؟ اشرحوا.

ج. 1. اقترحوا إحداثيّات لنقطة E **من اختياركم** بحيث تكون ABE∢ زاوية منفرجة.

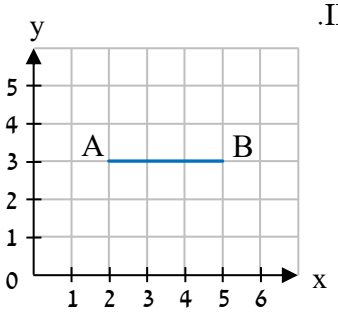
2. هل توجد نقاط أخرى كهذه؟ اشرحوا.

32. في الرسمين I وَ II تظهر القطعة AB في هيئة محاور.

I.



II.



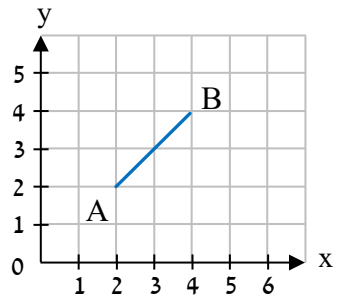
لكلّ رسم من الرسوم، اقترحوا إحداثيّات نقطة وفقًا للمطلوب في البند، وارسموا الزاوية الناتجة:

أ. نقطة C **من اختياركم** بحيث تكون ABC∢ زاوية قائمة.

ب. نقطة D **من اختياركم** بحيث تكون ABD∢ زاوية حادّة.

ج. نقطة E **من اختياركم** بحيث تكون ABE∢ زاوية منفرجة.

33. أمامكم القطعة AB في هيئة المحاور.



أ. 1. جدوا إحداثيّات نقطة C بحيث تكون ABC∢ زاوية حادّة.

2. هل توجد إمكانيّات أخرى للنّقطة C؟ اشرحوا.

ب. 1. جدوا إحداثيّات نقطة D بحيث تكون ADB∢ زاوية قائمة.

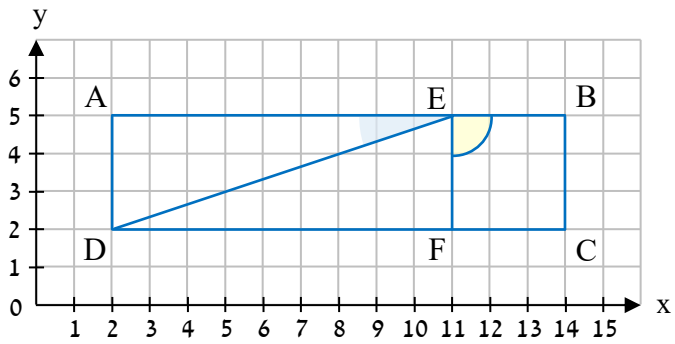
2. جدوا إمكانيّة أخرى لموقع النقطة D.

ج. 1. جدوا إحداثيّات نقطة E بحيث تكون ABE∢ زاوية منفرجة.

2. هل توجد إمكانيات أخرى للنّقطة E؟ اشرحوا.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

34. في هيئة المحاور التي أمامكم الضّلع EF هو ضلع مشترك للمربّع BCFE وللمستطيل AEFD.



طُلب من التلميذات تحديد أيّ زاوية من الزوايا التالية هي الأكبر:

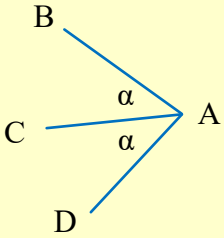
الزاوية الزرقاء $\sphericalangle AED$ أم الزاوية الصّفراء $\sphericalangle BEF$.

ادّعت ليلى: "$\sphericalangle AED$ هي الأكبر، لأنّ ساقيها AE وَ DE أطول من الساقين BE وَ EF".

ادّعت راوية: "$\sphericalangle BEF$ هي الأكبر لأنّها قائمة، و $\sphericalangle AED$ حادّة".

أيّ منهما على حقّ؟ اشرحوا.

انتبهوا!



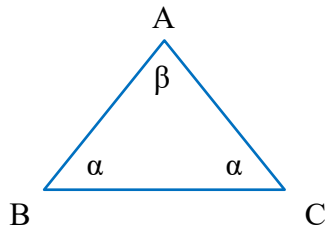
عندما تناولنا تسمية الزوايا بواسطة الأحرف اليونانيّة، ذكرنا أنّ الحرف اليونانيّ، يمثّل **مقدار** الزاوية. عندما تظهر في الرسم زوايا متساوية في المقدار، يمكن أن نرمز لها جميعًا بنفس الحرف اليونانيّ، كما هو موصوف في الرسم.

عندما يظهر في الرسم عدّة زوايا رُمِز لها بنفس الحرف اليونانيّ، يمكننا الاستنتاج بأنّ هذه الزوايا متساوية فيما بينها في المقدار.

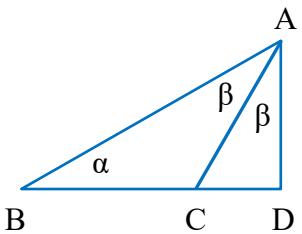
على سبيل المثال، في الرسم على اليسار يمكن أن نستنتج أنّ $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAC$.

35. حدّدوا بمساعدة الأحرف اليونانيّة أيّ زوايا متساوية، واعرضوا التساوي بواسطة الأحرف التي تمثّل الرؤوس:

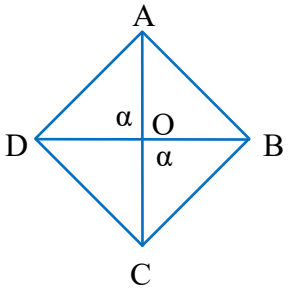
أ.



ب.

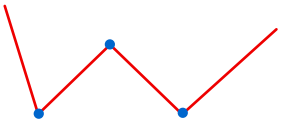


ج.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

الإجابات:



1) **أ.** في الرسم على اليسار. **ب.** في الرسم على اليسار.

2) i، ii، iv.

3) ∢DFE، ∢EFD.

4) إجابات ممكنة: أ. ∢EFG، ∢GFE، ∢F. **ب.** ∢KMP، ∢PMK، ∢M.

ج. ∢SDA، ∢ADS، ∢D.

5) أ. كلاهما اقترحا رموزًا (أسماءً) صحيحة. لكنّ جلالًا اقترح رمزًا أقصر وأبسط.

ب. الرمز الذي اقترحه جلال غير مناسب، لأنّه لا يتيح التمييز بين الزوايا الثلاث المختلفة في الرسم.

(∢ABC,∢CBD,∢ABD) رؤوسها B. الرمز الذي اقترحته وداد ملائم.

6) أ. i، iv. **ب.** i، ii.

7) أ. i، iv؛ رأس الزاويّة التي مقدارها α هو C، والتعبيرين ii وَ iii غير ملائمين لأنّهما يمثّلان زاوية رأسها في النقطة B. **ب.** ii، iv؛ التعبير i يمثل رأس زاوية مشترك لـ 3 زوايا بحيث لا يمكن التمييز بينها. في التعبير iii النقطة B هي رأس الزاوية، بينما رأس الزاوية هو D.

8) إجابات ممكنة: أ. ΔABC، ΔCBA، ΔBCA.

ب. 1. ∢BAC، ∢CAB، ∢A. **2.** ∢ABC، ∢CBA، ∢B. **3.** ∢ACB، ∢BCA، ∢C.

9) إجابات ممكنة: أ. ABCD، BCDA، CBAD، ADCB. **ب.** الزرقاء: ∢AOB، ∢BOA؛ الحمراء: ∢AOD، ∢DOA. **جـ.** ∢BCD، ∢DCB، ∢C.

10) إجابات ممكنة: أ. **I.** ABDC، CDBA. **II.** ABCD، CBAD. **III.** ABCE، BAEC.

ب. I. ∢ACB، ∢BCA. **II.** ∢ACB، ∢BCA. **III.** ∢DAE، ∢EAD.

11) أ. الحمراء. **ب.** الحمراء. **ج.** الزرقاء. **د.** الحمراء.

12) أ. >. **ب.** =. **ج.** >.

13) أ. >. **ب.** <. **ج.** =.

14) أ. قائمة. **ب.** ليست قائمة. **ج.** ليست قائمة. **د.** قائمة. **هـ.** ليست قائمة.

15) أ. توجد زاوية قائمة. **ب.** لا توجد زاوية قائمة. **ج.** توجد زاوية قائمة **د.** لا توجد زاوية قائمة.

هـ. توجد زاوية قائمة. **و.** لا توجد زاوية قائمة.

16) i، ii.

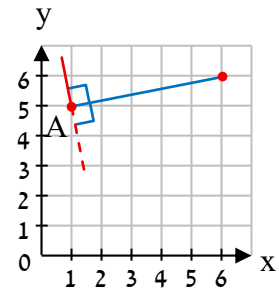
17) إجابات ممكنة: أ. **1.** شارع چوردون وشارع هيرمان هَكوهين. **2.** شارع فريشمان وشارع هيرمان هكوهين.

ب. 1. شارع 6th Ave وشارع W 38th St. **2.** شارع Broadway وشارع W 37th St.

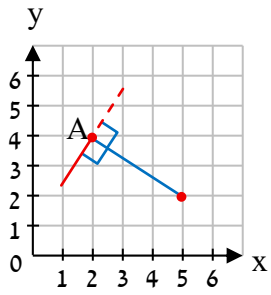
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

18) إمكانيّات الإكمال تظهر في كلّ رسم، إحداها بخطّ أحمر متواصل والأخرى بخطّ أحمر متقطّع:

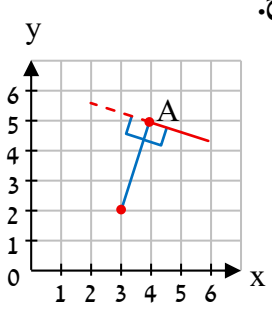
أ.



ب.



ج.

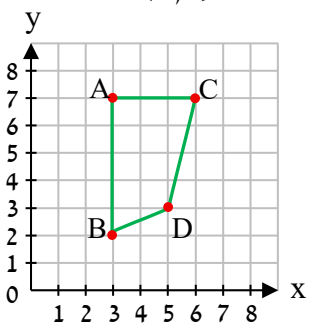


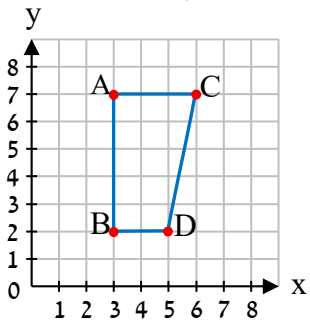
د.

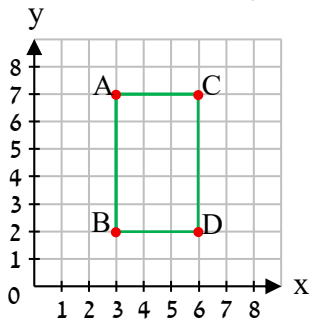
19) **أ.** منفرجة. **ب.** حادّة. **ج.** قائمة. **20)** **أ.** منفرجة. **ب.** حادّة. **ج.** قائمة.

21) **أ.** قائمة. **ب.** حادّة. **ج.** لا يمكن التحديد بدون وسائل مساعدة إضافيّة. **د.** قائمة. **هـ.** منفرجة. **و.** منفرجة.

22) **أ. 1.** مثلًا: D (5 , 3). **2.** مثلًا: D (5 , 2). **3.** D (6 , 2).





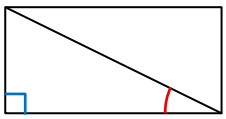


ب. لا توجد. كما تعلّمنا سابقًا، كلّ شكل رباعيّ فيه ثلاث زوايا قائمة هو مستطيل، ولذلك ستكون الزاوية الرابعة قائمة أيضًا.

23) إجابات ممكنة: ∢BAE، ∢DAE، ∢ADE، ∢CDE. لكلّ الزوايا المكتوبة توجد ساق مشتركة ورأس مشترك مع زاوية قائمة. يمكن المقارنة والتمييز بأنّ كلًّا منها أصغر من الزاوية القائمة، لذلك حادّة.

24) **أ.** قائمة. **ب.** حادّة. **ج.** لا يمكن التحديد. **د.** حادّة. **هـ.** لا يمكن التحديد. **و.** قائمة.

25) **أ.** إجابات ممكنة في الرسم على اليسار. **1.** الزاوية الزرقاء. **2.** الزاوية الحمراء.



3. لا توجد زاوية منفرجة في الرسم. **ب.** حادّة. لكلّ زاوية تختارها لينا يوجد رأس مشترك وساق مشاركة مع زاوية قائمة، ويمكن التمييز بأنّها أصغر منها.

26) **أ.** الزاويتان الصفراء والحمراء حادّتان. **ب.** الزاوية الصفراء قائمة، والحمراء حادّة.

ج. الزاوية الصّفراء حادّة، والزاوية الحمراء منفرجة.

27) **أ.** الزوايا التي مقدارها α وَ β حادّة؛ والزاوية التي مقدارها γ منفرجة. **ب. i.** خطأ. **ii.** صحيح. **iii.** لا يمكن التحديد.

28) إجابات ممكنة: **أ.** ∢ABE، منفرجة. **ب.** ∢BAC، حادّة. **ج.** ∢ACE، منفرجة.

29) iii.

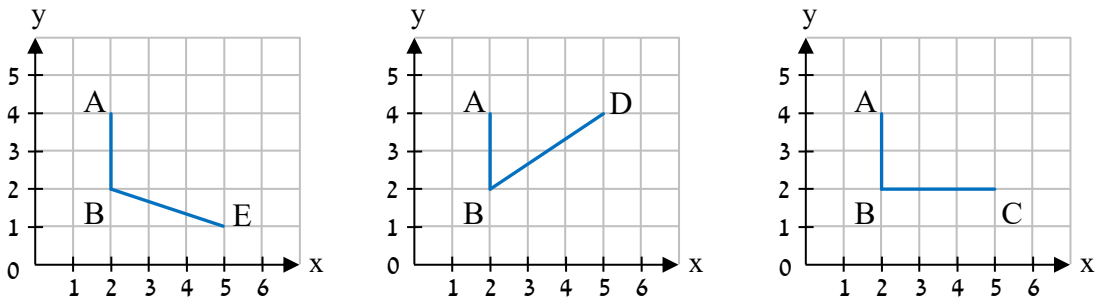
30) **أ.** قائمة. **ب.** حادّة. **ج.** منفرجة. **د.** منفرجة. **هـ.** حادّة. **و.** حادّة.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

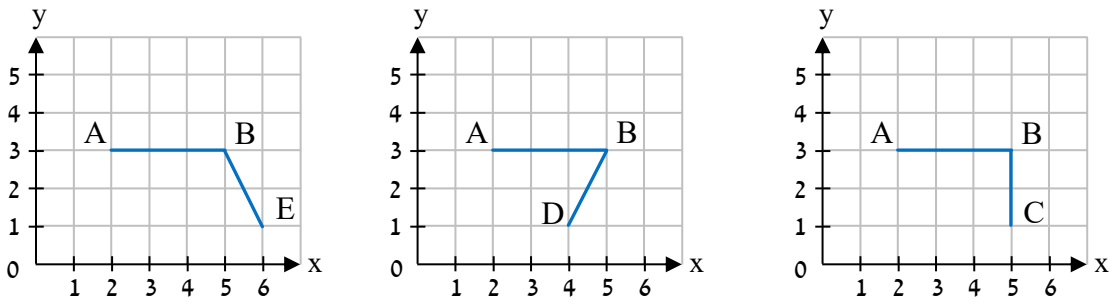
31) أ. 1. إجابة ممكنة: (3 , 2). **2.** نعم، يوجد عدد لا نهائيّ، من النقاط كهذه. مثلًا، كلّ النقاط التي إحداثيها الـ x هو 3، وإحداثيها الـ y أكبر من 0. **ب. 1.** إجابة ممكنة: (1 , 2). **2.** نعم، يوجد عدد لا نهائي من النقاط كهذه. مثلًا، كلّ النقاط التي إحداثيها الـ x هو 2، وإحداثيها الـ y أكبر من 0.

ج. 1. إجابة ممكنة: (3 , 4). **2.** نعم، يوجد عدد لا نهائي من النقاط كهذه. مثلًا، كلّ النقاط التي إحداثيها الـ x هو 4، وإحداثيها الـ y أكبر من 0.

32) الرسم **I**: أ. C (5 , 2) **ب.** D (5 , 4) **ج.** E (5 , 1)

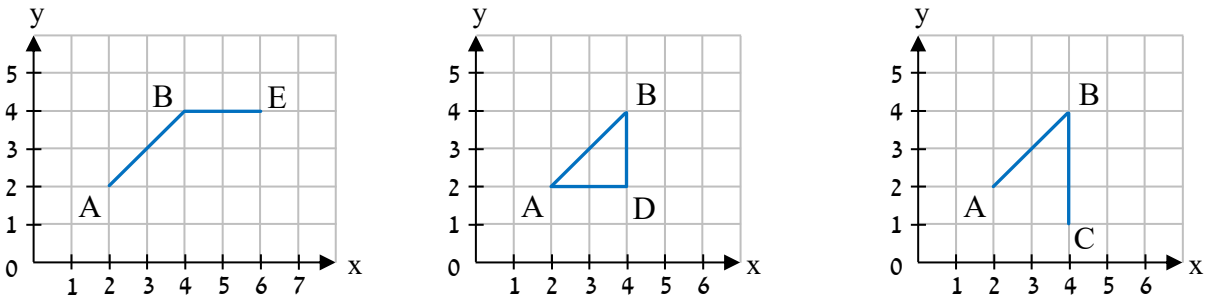


الرسم **II**: أ. C (5 , 1) **ب.** DC (4 , 1) **جـ.** E (6 , 1)



33) أ. 1. الرسم الأيمن في الأسفل. C (4 , 1). **2.** نعم، يوجد عدد لا نهائيّ من النقاط. مثلًا، كلّ النقاط التي فيها الإحداثيx هو 4، والإحداثي y أصغر من 4. **ب. 1.** الرسم الأوسط في الأسفل. D (4 , 2). **2.** D (2 , 4).

ج. 1. الرسم الأيسر. E (6 , 4). **2.** نعم، يوجد عدد لا نهائيّ من النقاط. مثلًا، كلّ النقاط التي إحداثيها الـ y هو 4، وإحداثيها الـ x أكبر من4.



34) راوية على حقّ. مقدار الزاوية لا يتعلّق بطول الساق.

35) أ. $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$. **ب.** $\measuredangle BAC = \measuredangle CAD$. **ج.** $\measuredangle AOD = \measuredangle BOC$.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

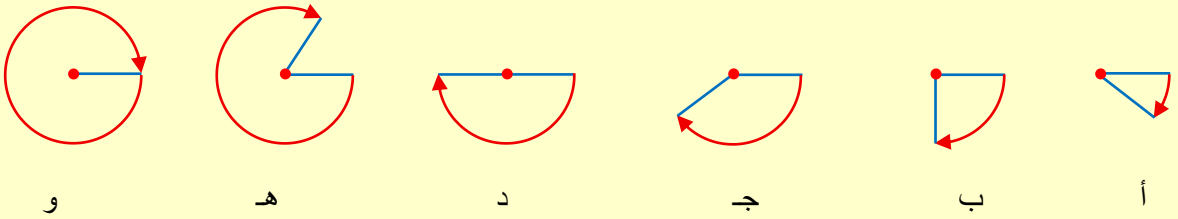
قياس مقدار زاوية

1. في مركز كعكة عيد الميلاد توجد شمعة، أُشير إليها بنقطة بيضاء. أمامكم صور تمّ التقاطها خلال الحفلة.
تظهر في كلّ صورة زاوية مُحدَّدة باللون الأصفر، يقع رأسها في النقطة البيضاء وساقاها هما خطّا قَطْعِ الكعكة:

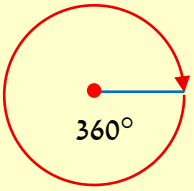


هل الزاوية المُحدَّدة تَكبُر أم تَصغُر مع مرور الوقت خلال الحفلة؟

في السؤال السابق، قُمْنَا بمقارنة مقادير الزوايا. سنناقش هذا الأمر بمساعدة الرسوم البيانيّة التالية.
في الرسم "أ "زاوية رأسها يقع في النقطة **الحمراء** ولون ساقيها **أزرق**.
سَنُبَاعِد بين ساقي الزاوية بشكل تدريجيّ حتّى تنطبق كلّ منهما على الأخرى، كما هو موضّح في الرسم التوضيحيّ "و":

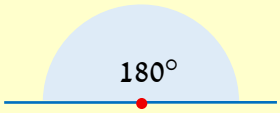


نُقَرِّر أنَّ مقدار الزاوية الناتجة عن "دورة كاملة "هو 360 وحدة، إذ إنَّ كلّ وحدة تُسمَّى **درجة**. الدرجات هي وحدات القياس التي سنقيس بها مقادير (قياسات) الزوايا.
يُرسم رمز الدرجة على شكل دائرة صغيرة فوق الرقم وإلى اليمين منه، ولذلك نكتب 360°.



من المعتاد القول: إنَّ مقدار (قياس) الزاوية يساوي عددًا معيّنًا من الدرجات.
على سبيل المثال، لزاوية يبلغ مقدارها 70° نقول: زاوية مقدارها 70 درجة.

في بداية الفصل، درسنا أنواع الزوايا، ومنها **الزاوية المستقيمة** التي يشكّلُ ساقاها خطًّا مستقيمًا، كما هو مبيّن في الرسم على اليسار.
مقدار الزاوية المستقيمة يعادل نصف 360°، لذلك مقدارها 180°.



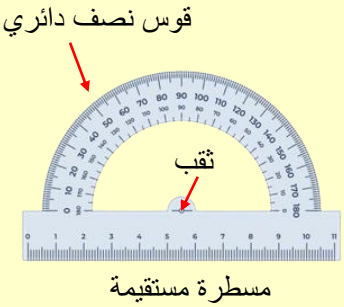
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

المنقلة

المنقلة هي أداة قياس بسيطة، يمكننا بواسطتها قياس مقدار الزوايا بالدرجات.

وهي تتكوّن من مسطرة مستقيمة وقوس نصف دائريّ متّصل بها.

يظهر على المسطرة المستقيمة محور أعداد يمكن بواسطته قياس أطوال.

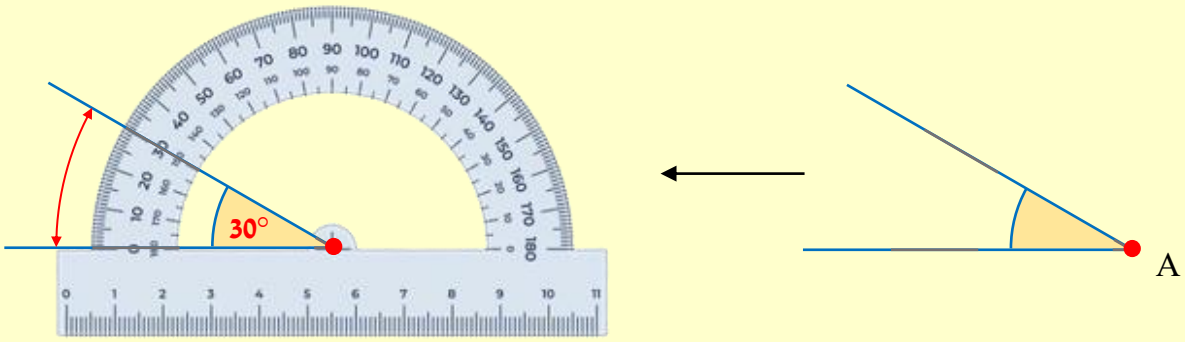


في مركز الجزء العلويّ من المسطرة المستقيمة توجد فتحة صغيرة.

في الجزء الخارجيّ من القوس الدائريّ تمّ تحديد 180 تدريجًا.

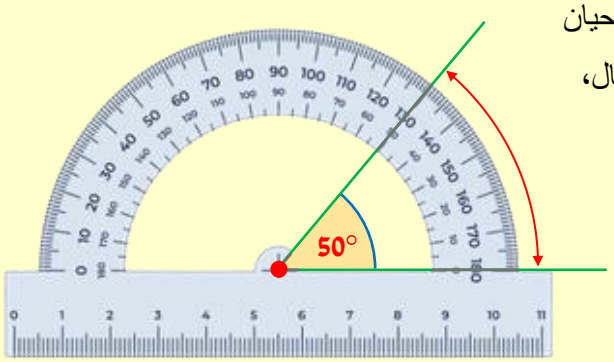
الزاوية التي مقدارها درجة واحدة هي الزاوية التي تتوافق مع تدريجين متجاورين.

سنوضّح طريقة استخدام المنقلة بالاستعانة بـ $\measuredangle A$ عن طريق قياس مقدارها. نضع الفتحة على رأس الزاوية، ونحرص على أن ينطبق الجزء العلويّ من المسطرة المستقيمة الخالي من الأعداد على إحدى ساقَي الزاوية.



في الجزء **الخارجيّ** من القوس تظهر مضاعفات العدد 10 حتّى 180 **من اليسار إلى اليمين**، وتشير إلى مقدار الزوايا بالدرجات. وبواسطتها يمكننا إيجاد مقدار $\measuredangle A$. يتحدّد مقدار الزاوية بناءً على التدريج الذي تمرّ عبره الساق الأخرى للزاوية $\measuredangle A$ التي في الرسم مقدارها 30°، ونكتب: $\measuredangle A = 30°$.

في الجزء الداخليّ من القوس تظهر مضاعفات العدد 10 حتّى 180 **من اليمين إلى اليسار**، وفي بعض الأحيان نفضّل الاستعانة في هذا الجزء من المنقلة. على سبيل المثال، لقياس الزاوية الخضراء التي في الرسم على اليسار، من الأسهل استخدام الجزء الداخليّ بحيث توضع الساق على المسطرة عن **يمين** الفتحة. نفحص عبر أيّ تدريج تمرّ الساق الأخرى. مقدار الزاوية في الرسم هو 50°.



ادخلوا النشاط الرقميّ الظاهر في الأعلى من جهة اليسار، وقيسوا مقدار الزوايا باستخدام المنقلة.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

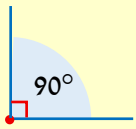
2. أمامكم مستطيل.



أ. ما هو نوع زوايا المستطيل؟

ب. استعينوا بالمنقلة وقيسوا مقادير الزوايا.

جـ. ماذا تستنتجون من السؤال عن مقدار الزاوية القائمة؟



في السؤال السابق، قمنا بقياس **زاوية قائمة** ووجدنا أنَّ مقدارها يساوي 90.

إذا قمنا بقياس زاوية ووجدنا أنّ مقدارها 90° يمكننا الاستنتاج أنّها قائمة.

3. قيسوا الزوايا التالية بواسطة منقلة. إذا كانت الزاوية قائمة، اذكروا ذلك:

أ. ب. جـ.



د. هـ. و.

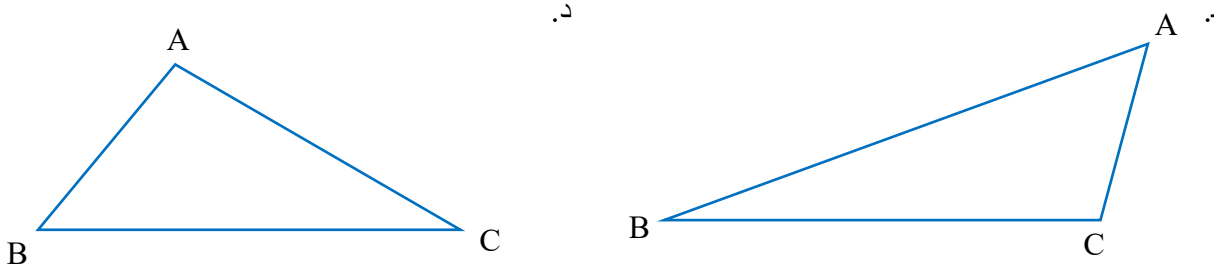


4. يظهر في كلّ بند ثلاث زوايا. قيسوها باستخدام المنقلة:

أ. ب.



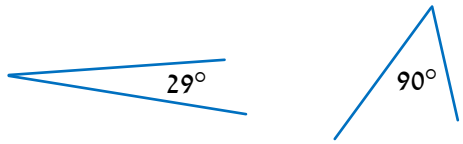
جـ. د.



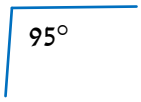
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

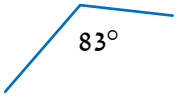
5. وقع خطأ في قياس زاويتين من الزوايا الآتية.

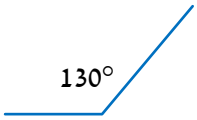
بالنظر بالعين المجرّدة، خمّنوا بأيّ من الزوايا وقع الخطأ، وافحصوا إجابتكم بواسطة المنقلة.

i. 

ii.

iii. 

iv. 

v. 

6. إحدى زوايا فتحة المقصّ مقدارها 60°. خمّنوا أيّ زاوية هي هذه الزّاوية، وافحصوا إجابتكم بالمنقلة:

i. 

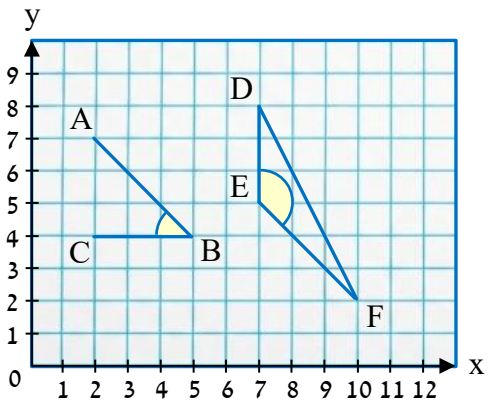
ii. 

iii. 

iv. 

v. 

7. في هيئة المحاور أمامكم تمّ تعيين زاويتين.



أ. أحد الخيارات الآتية يبيّن مقدار ∢B.

قدّروا ما هو المقدار الصحيح وافحصوا بواسطة المنقلة:

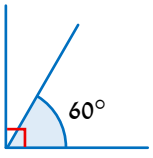
i. 15° ii. 45° iii. 70° iv. 97°

ب. أحد الخيارات الآتية يبيّن مقدار ∢E.

قدّروا ما هو المقدار الصحيح وافحصوا بواسطة المنقلة:

i. 80° ii. 92° iii. 135° iv. 175°

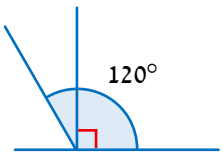
8. ادّعى نبيل: "الزاوية الحادّة أصغر من الزاوية القائمة، لذلك زاوية مقدارها 60° هي حادّة."



أ. تمّ عرض الرسم التوضيحيّ على اليسار. استعينوا به وحدّدوا ما إذا كان على صواب.

ب. اقترحوا مقدارًا **من اختياركم** لزاوية حادّة.

جـ. ادّعى نبيل: "الزاوية المنفرجة هي أكبر من الزاوية القائمة وأصغر من الزاوية المستقيمة، لذلك زاوية مقدارها 120° هي زاوية منفرجة".



عرض نبيل الرسم التوضيحيّ على اليسار. استعينوا به وحدّدوا ما إذا كان على صواب.

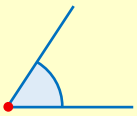
د. اقترحوا مقدارًا من **اختياركم** لزاوية منفرجة.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

في السؤال السابق، تناولنا مقادير لزوايا حادّة ولزوايا منفرجة:

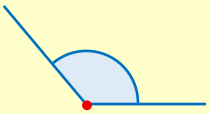
زاوية حادّة:

أكبر من 0° وأصغر من 90°



زاوية منفرجة:

أكبر من 90° وأصغرمن 180°

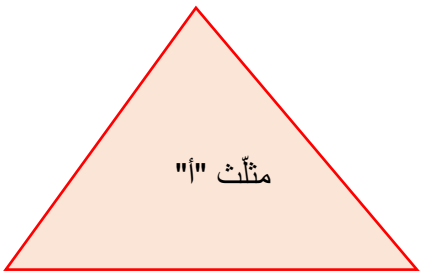


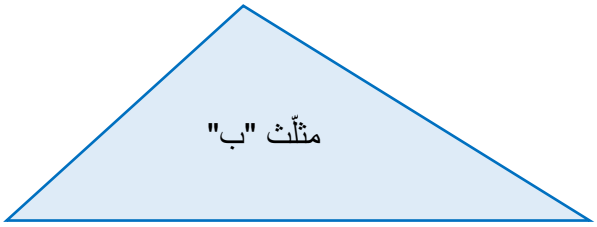
9. حدّدوا في أيّ البنود يظهر مقدار زاوية حادّة وفي أيّها يظهر مقدار زاوية منفرجة:

i. 50° ii. 100° iii. 118° iv. 8° v. 60° vi. 120°

10. أمامكم مثلّثان.

أ. قيسوا الزوايا الثلاث في كلّ مثلّث بواسطة المنقلة وحدّدوا نوع كلّ زاوية منها:





ب. احسبوا مجموع الزوايا في كلّ مثلّث.

11. طُلِب من بهاء أن يرسم زاوية أكبر من 88.5° وليست حادّة. أيّ من الزوايا التالية كان بإمكانه رسمها؟

i. ii. iii. iv.



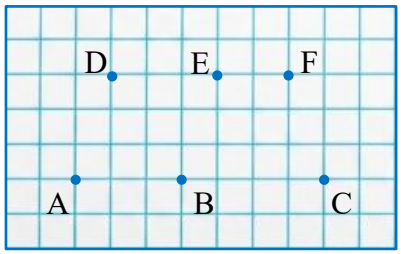


ادخلوا الفعّاليّة الرقميّة على اليسار. حرّكوا النقطة B وافحصوا مقدار الزاوية الناتجة.

بعد ذلك حرّكوا النقطتين D وَ E وافحصوا مقدار الزاوية إن تغيّر.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

12. أمامكم ورقة مربّعات.

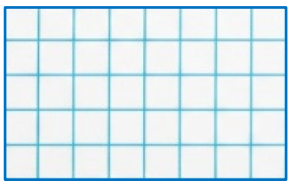


يمكن إنشاء زوايا بمساعدة الرسم.

أ. اقترحوا ثلاث زوايا حادّة وقيسوها بواسطة المنقلة.

ب. اقترحوا ثلاث زوايا منفرجة وقيسوها بواسطة المنقلة.

13. أمامكم ورقة مربّعات.



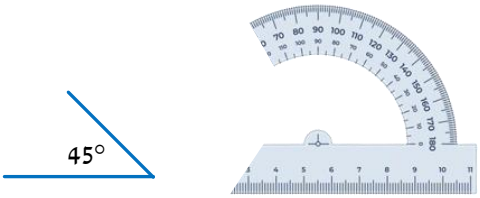
أ. بدون قياس، ارسموا زاويتين **حادّتين**.

افحصوا بواسطة المنقلة إن كنتم على صواب.

ب. بدون قياس، ارسموا زاويتين **منفرجتين**.

افحصوا بواسطة المنقلة إن كنتم على صواب.

14. يوجد في متجر المنقلة المكسورة الظاهرة على اليسار.



هل يمكن بواسطة هذه المنقلة قياس:

أ. زاوية قائمة.

ب. زاوية منفرجة.

جـ. الزاوية الظاهرة على اليسار.

15. ادّعى بشّار أنّه في ساعة العقارب التي تُشير إلى الساعة 3:00، يكون العقربان متعامدين.



أ. استعينوا بالساعة على اليسار وبالمنقلة، وتحقّقوا إن كان بشّار على حقّ.

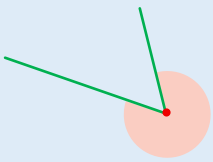
ب. استعينوا بالمنقلة، وجدوا ساعة أخرى يكون فيها العقربان متعامدين.

جـ. خرج بشّار من غرفة الصفّ الساعة 3:00، وعاد بعد ساعتين.

قيسوا الزاوية التي كانت بين عقرَبي الساعة عندما عاد بشّار.

د. جدوا ساعة كاملة تكون فيها الزاوية بين العقربين: 1. حادّة. 2. منفرجة.

هل تعلم ما هي الزاوية المنعكسة؟



الزاوية المنعكسة هي زاوية أكبر من 180° وأصغر من 360°.

في الرسم التوضيحيّ على اليسار، الزاوية الحمراء هي **زاوية منعكسة**.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

16. أمامكم ساعات تشير إلى أوقات مختلفة من اليوم. قيسوا باستخدام المنقلة مقدار الزاوية α:

أ. ب. جـ.







17. اكتبوا سؤالًا **من عندكم** يتناول الزوايا بين عقارب الساعة.
يجب أن يتناول السؤال زاوية حادّة، زاوية منفرجة وأن يتضمّن قياسًا بواسطة المنقلة.

18. تشير عقارب الساعة التي أمامكم إلى الساعة 6:00.



أ. خَمِّنوا مقدار الزاوية بين العقارب في هذه الساعة وافحصوا تخمينكم باستخدام المنقلة.

ب. أيّ عقرب يدور أسرع: عقرب الدقائق أم عقرب الساعات؟ اشرحوا.

جـ. هل الزاوية اليمنى بين العقرَبين عند الساعة 6:05 أكبر أم أصغر من الزاوية التي كانت بينهما عند الساعة 6:00؟ اشرحوا.

لغز!

كم مرّة خلال **يوم كامل** تتشكّل زاوية مستقيمة بين عقرب الساعات وعقرب الدقائق؟

لا حاجة لحساب الساعات التي يحدث فيها ذلك.

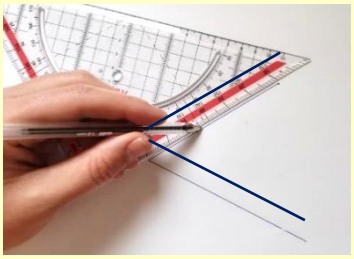


© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

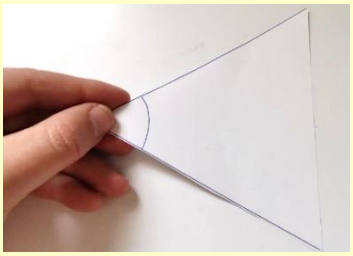
مُنَصِّف زاوية

لنبدأ موضوعنا بتجربة عمليّة.

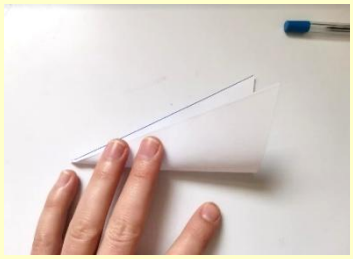
1. ارسموا شعاعَي زاوية على ورقة.



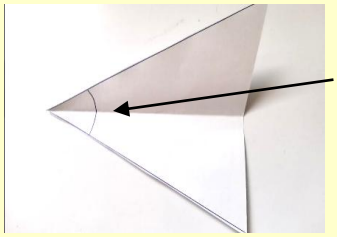
2. قصّوا مثلّثًا بحيث تكون الزاوية التي رسمتموها إحدى زواياه.



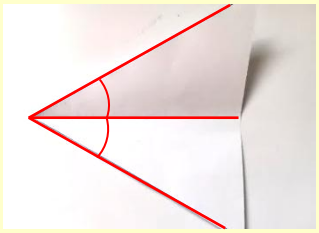
3. اطووا الورقة بحيث تَتّحد الساقان.



4. افتحوا الطيّ. خطّ الطيّ الناتج يقسم الزاوية إلى زاويتين.



5. يمكن أن نلاحظ أنّ الزاويتين الناتجتين متساويتان، لذلك خطّ الطيّ يُسَمّى **مُنَصِّف زاوية**.



تعريف مُنَصِّف الزاوية

مُنَصّف الزاوية هو شعاع ينطلق من رأس الزاوية ويقسمها إلى زاويتين متساويتين.

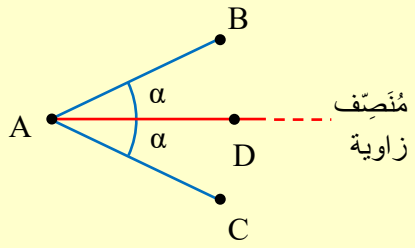
في الرسم على اليسار النقطة D تقع على الشعاع الأحمر.

إذا نَصَّفَ الشعاع الأحمر $\measuredangle BAC$ عندها يتحقّق:

$\measuredangle BAD = \measuredangle CAD$. رمزنا لمقادير الزوايا المتساوية بـ α.

والعكس صحيح أيضًا، إذا تحقّق: $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD$،

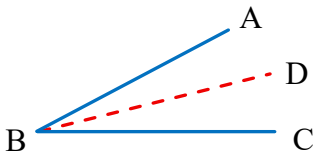
فإنّ الشعاع الأحمر يُنَصِّف $\measuredangle BAC$.



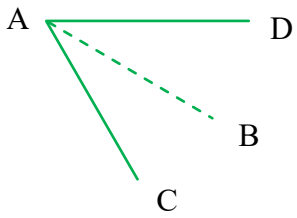
مصدر المصطلح "**مُنَصِّف** زاوية" يعود إلى الكلمة "**نصف**"، فهو يصف شعاعًا، قطعة أو مستقيمًا يُنَصِّف زاوية إلى قسمين **متساويين**– أي، إلى **نصفين**. على سبيل المثال، قطعة تُنَصِّف زاوية مقدارها 80°، تقسمها إلى زاويتين **متساويتين** مقدار كلّ منها يساوي نصف الـ 80°. نقسم 80° على 2، فنحصل على أنّ مقدار كلّ زاوية هو 40°.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

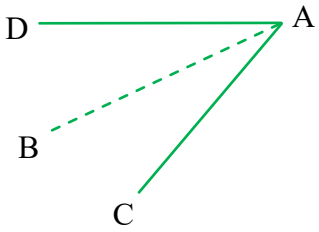
19. في الرسم أمامكم القطعة BD تُنَصِّف ∢ABC.
اكتبوا ما هما الزاويتان المتساويتان اللتان نتجتا.



20. القطعة AB تُنَصِّف ∢CAD.
أ. اكتبوا ما هما الزاويتان المتساويتان اللتان نتجتا.
ب. معطى: ∢CAD = 60°، احسبوا مقدار كلّ من الزاويتين:
1. ∢BAD 2. ∢BAC

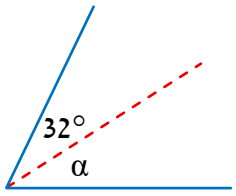


21. القطعة AB تُنَصِّف ∢CAD.
أ. اكتبوا ما هما الزاويتان المتساويتان اللتان نتجتا.
ب. معطى: ∢BAC=25°. احسبوا مقدار كلّ من الزوايا:
1. ∢BAD 2. ∢CAD

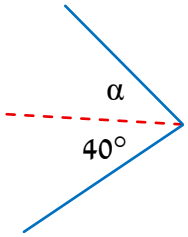


22. الخطّ المتقطّع في البنود التالية هو مُنَصِّف زاوية. جدوا قيمة α:

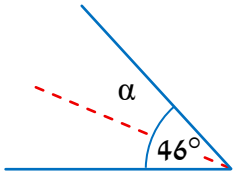
أ.



ب.



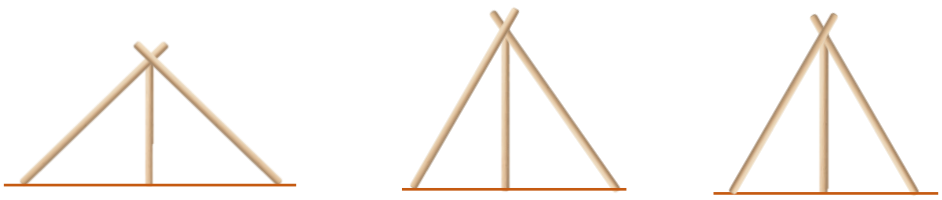
جـ.



23. تريد هالة بناء خيمة كشّافة وفقًا للرّسم التخطيطيّ من جهة اليسار، بحيث يستند لوحان خشبيّان مائلان على عمود خشبيّ مركزيّ. معلوم أنّ الخيمة تكون ثابتة فقط عندما يكون العمود المركزيّ مُنَصِّفًا للزاوية التي بين اللوحين المائلين.
استعينوا بالمنقلة، وحدّدوا لكلّ رسم، هل الخيمة التي يمثّلها الرسم أدناه ستكون ثابتة:

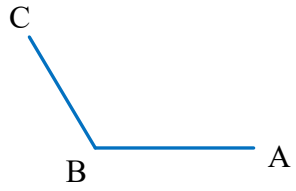


أ. ب. جـ.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

24. معطى أنّ $\measuredangle ABC$ منفرجة.



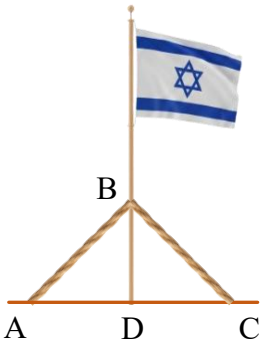
أيّ زوايا سنحصل عليها إذا رسمنا مُنَصِّف الزاوية الخاصّ بها؟

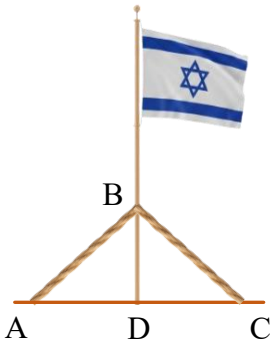
i. زاويتان منفرجتان. ii. زاويتان حادّتان.

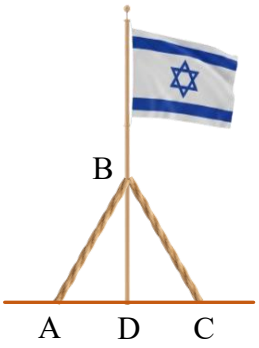
iii. زاوية قائمة وزاوية حادّة. iv. زاوية قائمة وزاوية منفرجة.

25. في كلّ بند شدّوا حبلين AB وَ BC من سارية علم إسرائيل. استعينوا بالمعطيات وحدّدوا إن كانت القطعة BD تنصّف $\measuredangle ABC$ أو لا تنصّف الزاوية أو لا يمكن التحديد. اشرحوا.

أ. $\measuredangle ABD = 30^\circ$ ، $\measuredangle ABC = 60^\circ$ ب. $\measuredangle CBD = 48^\circ$ ، $\measuredangle ABC = 92^\circ$ جـ. $AB \perp BC$







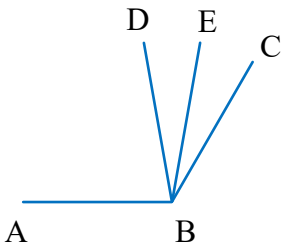
26. معطى في الرسم: $\measuredangle ABC = 120^\circ$ ، $\measuredangle ABD = 80^\circ$.

أ. هل القطعة BD تُنَصِّف $\measuredangle ABC$ ؟ اشرحوا.

ب. معطى: $\measuredangle CBD = 40^\circ$ ، $\measuredangle CBE = 20^\circ$.

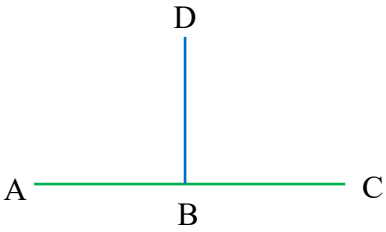
هل القطعة BE تُنَصِّف $\measuredangle CBD$ ؟

إذا كان الجواب نعم، احسبوا مقدار $\measuredangle DBE$.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

27. في الرسم أمامكم القطعة BD تُنَصِّف الزاوية المستقيمة ABC∢.



أ. احسبوا مقدار CBD∢ وَ ABD∢.

ب. ادّعى وائل أنّه من البند "أ" يمكن الاستنتاج:

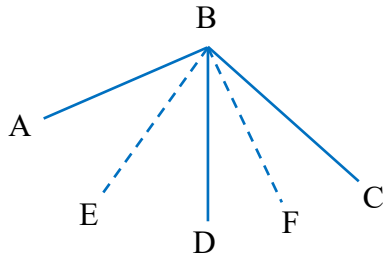
"مُنَصِّف زاوية مستقيمة، يعامد ساقي الزاوية المستقيمة".

اشرحوا لماذا استنتاجه صحيح.

28. القطعة BE تُنَصِّف ABD∢.

القطعة BF تُنَصِّف CBD∢.

معطى: $\measuredangle ABD=70°$ ، $\measuredangle CBD=50°$.



أ. احسبوا مقدار:

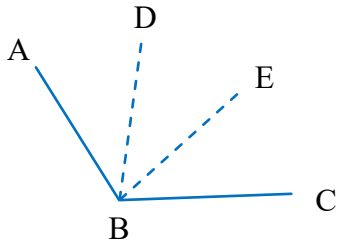
1. DBF∢. 2. DBE∢.

ب. هل القطعة BD تُنَصِّف EBF∢؟ اشرحوا.

29. في الرسم أمامكم القطعة BD تُنَصِّف ABE∢،

والقطعة BE تُنَصِّف CBD∢.

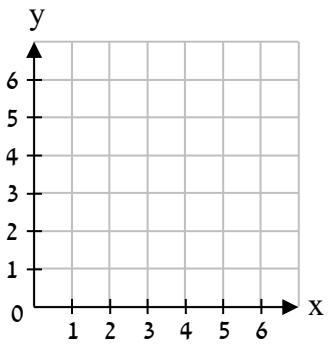
ادّعى هاني: "من المعطيات يمكن الاستنتاج أنّ: $\measuredangle ABD = \measuredangle CBE$".



أ. هل هو على حقّ؟ اشرحوا.

ب. معطى: $\measuredangle ABE = 80°$. احسبوا مقدار CBE∢.

30. أمامكم هيئة محاور.



أ. انسخوا هيئة المحاور في دفاتركم، وعيّنوا عليها النقاط التالية:

(0 , 0)، (1 , 1)، (2 , 2)، (3 , 3)، (4 , 4)، (5 , 5).

ب. قُصُّوا هيئة المحاور، اطووا المحور y تمامًا على المحور x،

واضغطوا على الطيّة بقوّة.

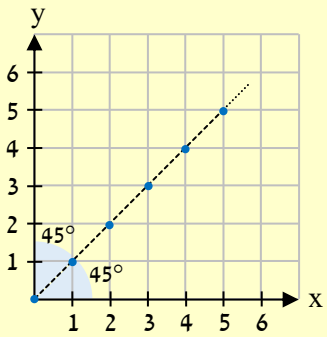
ج. هل النقاط التي عينتموها تقع على خطّ الطيّ، فوقه أم تحته؟

د. هل خطّ الطيّ يُنصِّف الزاوية التي بين المحورين؟

هـ. ماذا يمكن الاستنتاج عن القطعة التي تمرّ عبر النقاط التي عيّنتموها في البند "أ"؟

و. افحصوا إجابتكم بواسطة المنقلة.

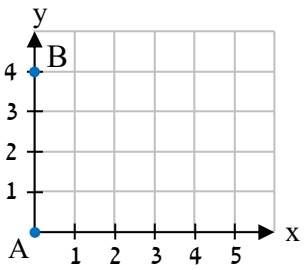
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون



في السؤال السابق تناولنا نقاطًا إحداثيها الأوّل x، وإحداثيها الثاني y متساويان.
في الواقع، المستقيم الذي يمرّ عبرها يُنَصِّف الزاوية التي بين المحورين.
الزاوية بين هذا المستقيم وبين كلّ واحد من المحورين هي 45°.

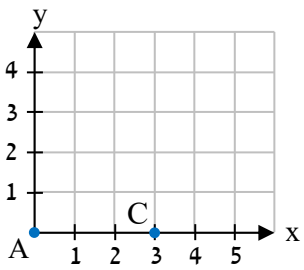
استنتجنا هذه الصفة بالاستعانة بعدد محدّد من النقاط، لكنّنا بحاجة
إلى برهان عامّ. سنثبت ذلك في المراحل القادمة من دراسة الرياضيّات.

31. في هيئة المحاور التي أمامكم النقطة A هي نقطة أصل المحاور.
ترغب مُنى في رسم زاوية قائمة رأسها هو A،
وإحدى ساقَيْها يمرّ في النقطة B (0, 4).



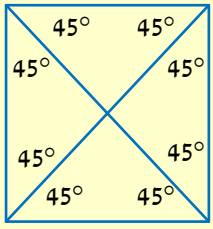
أ. عبر أيّ من النقاط التالية يمكن أن تمرّ الساق الأخرى؟
i. (0, 2) ii. (2, 2) iii. (2, 0) iv. (2, 4)

ب. يرغب شريف في رسم زاوية رأسها A ومقدارها 45°،
بحيث تمرّ إحدى ساقَيْها في النقطة C (3, 0).



1. عَبْر أيّ نقطة من النقاط التالية يمكن أن تمرّ الساق الأخرى؟ اشرحوا.
i. (0, 2) ii. (2, 0) iii. (2, 2) iv. (2, 1)
2. اقترحوا إحداثيات لنقطتين يمكن أن تمرّ عبرهما الساق الأخرى.

32. ارسموا مربّعًا بِدقَّة على ورقة مربّعات واطووه على طول القطر.
أ. هل نتج مثلّثان يمكن وضع أحدهما على الآخر تمامًا؟
ب. افتحوا الطيّة، وعيّنوا القطر الذي يقسم المربّع إلى مثلّثين.
1. هل القطر يُنَصِّف الزاوية القائمة؟ اشرحوا.
2. ما هو مقدار الزاوية التي بين ضلع المربّع والقطر؟ قيسوا الزاوية، وافحصوا إجابتكم.
ج. كرِّروا الخطوات مع مربّع آخر مختلف. هل حصلتم على نفس الزاوية بين الضلع والقطر؟

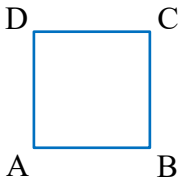


في السؤال السابق تعاملنا مع الزاوية التي بين قطر المربّع وضلعه.
في كلّ مربّع، كلّ قطر يُنَصِّف زوايا المربّع إلى زاويتين مقدار كلّ منهما 45°.

في هذه المرحلة استنتجنا هذه الصفة بمساعدة مربّعين أبعادهما مختلفة، ولكن
هناك حاجة لبرهان عامّ لجميع المربّعات. سنعرضه في المراحل القادمة من الدراسة.

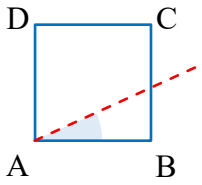
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

33. طُلب من تّلاميذ الصفّ الاستعانة بمربّع ABCD، لرسم زاوية مقدارها 45° ورأسها A، وإحدى ساقيها القطعة AB.

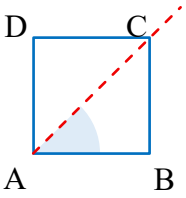


أمامكم ثلاثة رسوم لثلاثة تلاميذ:

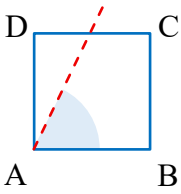
i. رسم رامي



ii. رسم كريم



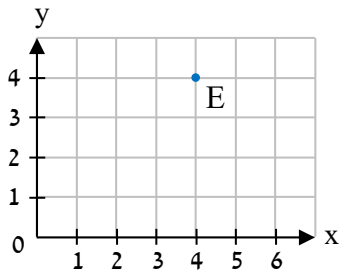
iii. رسم ريان



أ. أيّ تلميذ من التلاميذ رسم الزاوية المطلوبة؟

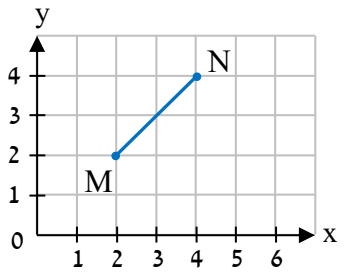
ب. في هيئة المحاور التي أمامكم تظهر النقطة E.

1. استعينوا بالبند "أ"، وارسموا زاوية رأسها E ومقدارها 45°.
يمكنكم الاستعانة بإضافة مربّع إلى الرسم.
2. هل توجد إمكانيّات أخرى لرسم الزاوية؟
إذا كان جوابكم نعم، ارسموا رسمَيْن إضافيّين.



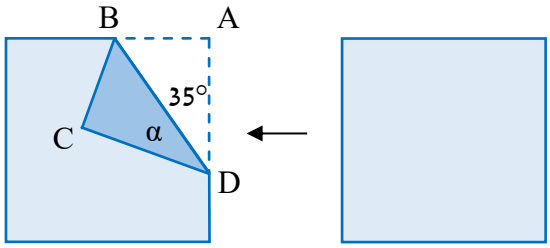
ج. في هيئة المحاور التي أمامكم تظهر النقاط M وَ N.

1. ارسموا زاوية إحدى ساقَيْها هي القطعة MN ومقدارها 45°.
2. ارسموا زاوية أخرى تُحَقّق الشرط في البند السابق.



تناولنا في السؤال السابق رسم زاوية مقدارها 45° في هيئة محاور، حيث رأس الزاوية ليس في نقطة الأصل.

34. معطاة ورقة شكلها مربّع أحد رؤوسه النقطة A.
طووها كما هو موضّح في الرسم، بحيث يكون خطّ الطيّ هو BD، والرأس A طُوِيَ على النقطة C.



أ. هل القطعة BD هي منصّف ∢ADC؟

ب. جدوا مقدار α.

ج. هل القطعة BD هي مُنصِّف ∢ABC؟

د. معطى: ∢ABC = 110°. احسبوا مقدار ∢CBD.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

ادخلوا المسابقة الصفّيّة التي تظهر على جهة اليسار: אאורקה

إجابات:

1) الزاوية تكبر.

2) **أ.** كلّها زوايا قائمة. **ب.** كلّ زاوية مقدارها 90°. **ج.** مقدار الزاوية القائمة 90°.

3) **أ.** 35°. **ب.** 90°. الزاوية قائمة. **ج.** 40°. **د.** 120°. **هـ.** 130°. **و.** 60°.

4) **أ.** $\sphericalangle CAD = 30°$ ، $\sphericalangle BAD = 30°$ ، $\sphericalangle BAC = 60°$.

ب. $\sphericalangle BAC = 45°$ ، $\sphericalangle CAD = 90°$ ، $\sphericalangle BAD = 135°$.

ج. $\sphericalangle ABC = 20°$ ، $\sphericalangle BAC = 55°$ ، $\sphericalangle ACB = 105°$.

د. $\sphericalangle ABC = 50°$ ، $\sphericalangle BAC = 100°$ ، $\sphericalangle ACB = 30°$.

5) i، iv. **6)** iii. **7)** **أ.** ii. **ب.** iii.

8) **أ.** نبيل على حقّ. **ب.** إجابات ممكنة: 30°، 45°، 78°. **ج.** نبيل على حقّ.

د. إجابات ممكنة: 95°، 119°، 156°.

9) حادّة: i، iv، v؛ منفرجة: ii، iii، vi.

10) **أ.** أ: 50°، 55°، 75°؛ الزوايا الثلاث زوايا حادّة. ب: الزوايا 32° وَ 43° حادّة، والزاوية التي مقدارها 105° منفرجة. **ب.** مجموع الزوايا هو 180° في كلّ واحد من المثلّثين.

11) ii، iv.

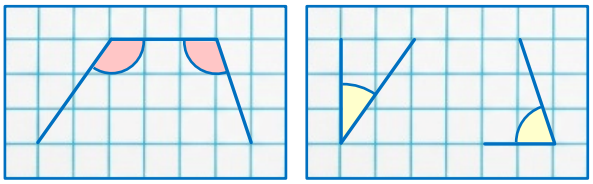
12) **أ.** إجابات ممكنة: $\sphericalangle ADB = 52°$ ، $\sphericalangle BFE = 45°$ ، $\sphericalangle FCB = 71°$.

ب. إجابات ممكنة: $\sphericalangle ADE = 108°$ ، $\sphericalangle DBC = 124°$ ، $\sphericalangle AEC = 98°$.

13) إجابات ممكنة:

أ. الرسم ذو الزوايا الصفراء.

ب. الرسم ذو الزوايا الحمراء.



14) **أ.** نعم. **ب.** نعم. **ج.** نعم. يمكننا تدوير المنقلة أو الورقة، واستعمال القوس الداخليّ للأعداد. في هذا القوس، الجزء الذي تظهر فيه الزاوية 45° ليس مكسورًا.

15) **أ.** نعم، بشّار على حقّ. **ب.** 9:00. **ج.** 150°. **د.** **1.** 1:00. **2.** 4:00.

16) **أ.** 120°. **ب.** 120°. **ج.** 60°.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

18) **أ.** 180°. **ب.** عقرب الدقائق أسرع. في الوقت الذي يستغرق فيه عقرب الساعات 12 ساعة لإكمال دورة، عقرب الدقائق يقوم بذلك كلّ ساعة. **ج.** بعد مرور 5 دقائق تكون الزاوية اليمنى أصغر. في بند "ب" رأينا أنّ عقرب الدقائق هو الأسرع، لذلك فإنّ معدّل اقترابه من عقرب الساعات أكبر من معدّل ابتعاد عقرب الساعات عنه. يمكن الاستنتاج من ذلك أنّه في الإطار الزمنيّ المحدّد في السؤال، الزاوية بين العقارب تصغر تدريجيًّا.

جواب اللغز: 22 مرّة.

19) ∢ABD و ∢CBD. **20)** **أ.** ∢BAD و ∢BAC. **ب. 1.** 30°. **2.** 30°.

21) **أ.** ∢BAD و ∢BAC. **ب. 1.** 25°. **2.** 50°. **22)** **أ.** $\alpha=32°$. **ب.** $\alpha=40°$. **ج.** $\alpha=23°$.

23) **أ.** ثابتة. **ب.** غير ثابتة. **ج.** ثابتة. **24)** ii.

25) **أ.** يُنَصّف الزاوية. **ب.** لا يُنَصِّف الزاوية. **ج.** لا يمكن التحديد.

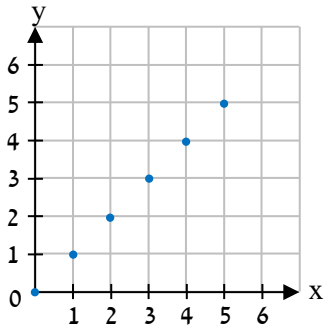
26) **أ.** كلّا. مقدار الزاوية ∢ABD لا يعادِل نصف مقدار الزاوية ∢ABC. **ب.** نعم. ∢DBE = 20°.

27) **أ.** الزاويتان قائمتان، مقدار كلّ منهما 90°. **ب.** الزاويتان الناتجتان على جانبي منصّف الزاوية BD قائمتان، لذلك هو معامد للقطعة AC.

28) **أ. 1.** 25°. **2.** 35°. **ب.** كلّا. الزاويتان ∢DBF وَ ∢DBE غير متساويتين.

29) **أ.** نعم، يمكن الاستنتاج من المعطيات أنّ كلّ زاوية من الزاويتين ∢ABD وَ ∢CBE تساويان الزاوية ∢DBE، لذلك هما متساويتان. **ب.** ∢CBE = 40°.

30) **أ.** الرسم على اليسار. **ج.** على خطّ الطيّ. **د.** نعم.



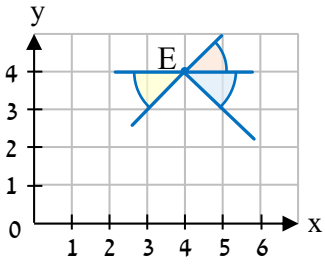
هـ. هذه القطعة تُنَصِّف الزاوية بين المحورين.

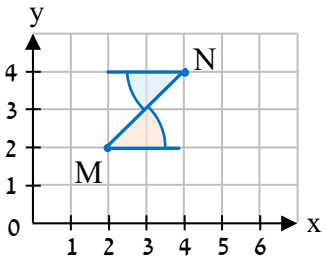
31) **أ.** iii. **ب. 1.** iii. الساق الأولى تمرّ في المحور x، لذلك، حتّى نبني زاوية مقدارها 45°، على الساق الثانية أن تخرج من نقطة الأصل، وتمرّ عبر نقاط إحداثيها الأوّل x يساوي إحداثيها الثاني y. (2 , 2) هي النقطة الوحيدة من بين الإختيارات المعطاة التي تحقّق هذا الشرط. **2.** إجابات ممكنة: (3 , 3)، (9 , 9).

32) **أ.** نعم. **ب. 1.** نعم. عند طيّ الورقة يمكن رؤية أنّ الزوايا متساوية في المقدار. ولذلك فإن القطر الذي قَسَمَ الزاوية القائمة في الواقع قد نَصَّفَها. **2.** 45°. **جـ.** نعم.

33) **أ.** كريم. **ب. 1.** الزاوية الزرقاء في الرسم على اليسار.

2. نعم. مثل الزاوية الصفراء والحمراء في الرسم على اليسار.





ج. 1. الزاوية الزرقاء في الرسم الأيمن.

2. الزاوية الحمراء في الرسم الأيمن.

34) **أ.** نعم. **ب.** $\alpha=35°$. **ج.** نعم. **د.** 55°.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

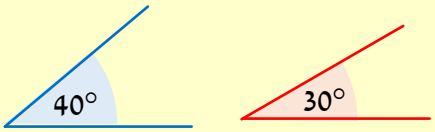
مجموع وفرق زوايا

عندما يكون مقدارا زاويتين معلومتين لدينا، يمكننا جمعهما أو طرحهما بعد رسمهما، بحيث يكون لهما رأس **مشترك** **وضلع مشترك**. في هذه الحالة، يمكننا حساب مقدار زاوية ثالثة تكون عبارة عن **مجموع الزاويتين** أو **الفرق بينهما**.

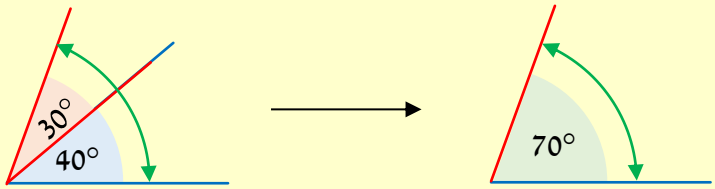
مجموع زوايا

نوضّح ذلك بالاستعانة بزاويتين مقدارهما $30°$ وَ $40°$.

علينا نسخهما بدقّة مع الحفاظ على مقدار الزاويتين بحيث يكون لهما رأس مشترك وضلع مشترك، وتكون كلّ زاوية منهما على **جهة مختلفة** من الضلع المشترك.



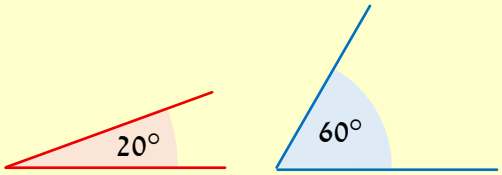
بعد الجمع بينهما نحصل على الزاوية: $30° + 40° = 70°$.



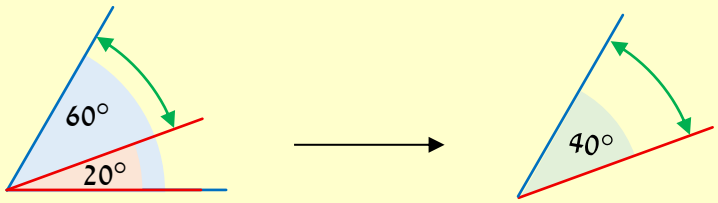
الفرق بين زوايا

نوضّح ذلك بالاستعانة بزاويتين مقدارهما $20°$ وَ $60°$.

علينا نسخهما بدقّة مع الحفاظ على مقدار الزاويتين، بحيث يكون لهما رأس مشترك وضلع مشترك، وتكون كلّ زاوية منهما **على نفس الجهة** من الضلع المشترك.

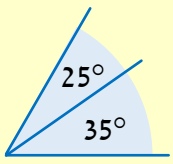


بعد الجمع بينهما نحصل على الزاوية: $60° - 20° = 40°$.



في الأسئلة التالية سنتناول زوايا لها رأس مشترك وضلع مشترك، بحيث يمكننا جمعها وطرحها دون الحاجة لإعادة رسمها.

مثال: استعينوا بالمعطيات التي على اليسار واحسبوا مقدار الزاوية المُشار إليها باللون الأزرق.



الحلّ: للزاويتين المعطاتين في الرسم رأس مشترك وضلع مشترك.

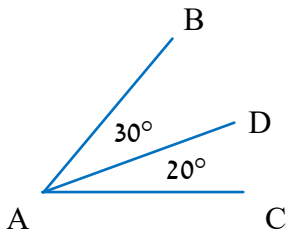
ولذلك يمكننا جمعهما، وحساب مقدار الزاوية الزرقاء: $25° + 35° = 60°$.

انتبهوا! تناولنا في المثال طريقة جمع زاويتين ولكن بطريقة مماثلة يمكن أيضًا جمع ثلاث زوايا أو أكثر. كذلك يمكن أيضًا طرح زاويتين أو أكثر من زاوية معيّنة.

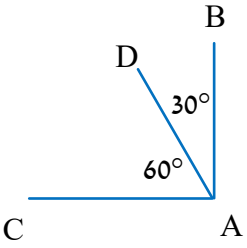
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

1. استعينوا بجمع الزوايا واحسبوا في كلّ بند مقدار $\measuredangle BAC$:

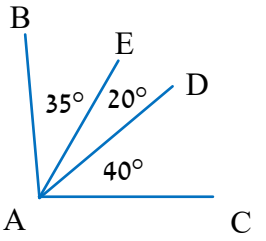
أ.



ب.

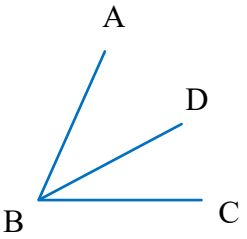


ج.

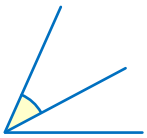


2. تمعّنوا في الرسم على اليسار.

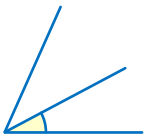
حدّدوا أيّ رسم من الرسوم التالية يشير إلى الزاوية المساوية للفرق $\measuredangle ABD - \measuredangle ABC$:



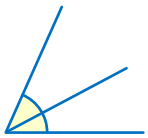
i.



ii.



iii.

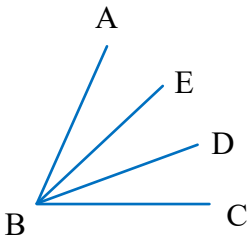


3. تمعّنوا في الرسم على اليسار.

حدّدوا في الرسم الزاوية التي يتمّ الحصول عليها من الفرق:

أ. $\measuredangle ABD - \measuredangle ABC$

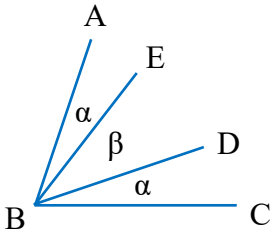
ب. $\measuredangle CBD - \measuredangle CBE$



4. معطى: $\alpha=20°$ ، $\beta=32°$. احسبوا مقدار كلّ زاوية من الزوايا:

أ. $\measuredangle ABD$

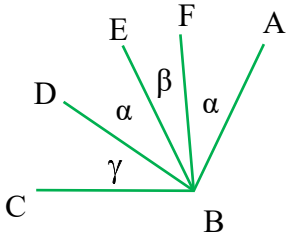
ب. $\measuredangle ABC$



5. معطى: $\alpha=30°$ ، $\beta=22°$ ، $\gamma=35°$. احسبوا مقدار كلّ زاوية من الزوايا:

أ. $\measuredangle ABE$ ب. $\measuredangle CBE$

ج. $\measuredangle CBF$ د. $\measuredangle ABD$



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

6. معطاة زوايا ومقاديرها: 20°، 50°، 60°. في كلّ بند استخدموا كلّ زاوية مرّة واحدة.

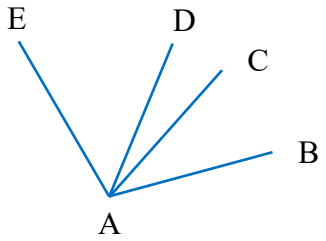
أ. اقترحوا طريقتين **من اختياركم** بحيث نحصل على زاوية حادّة، بالاستعانة بعمليّتيّ جمع وطرح بين هذه الزوايا.

ب. حدّدوا في كلّ بند إذا كان الأمر **ممكنًا** أم **غير ممكن**. إذا كان ممكنًا، اعرضوا الحساب المناسب:

بالاستعانة بعمليّتيّ جمع وطرح بين الزوايا المعطاة، اقترحوا طريقة نحصل بها على زاوية:

1. قائمة. 2. مستقيمة. 3. منفرجة.

7. معطى: $\sphericalangle BAC=34°$ ، $\sphericalangle CAD=18°$ ، $\sphericalangle DAE=52°$.

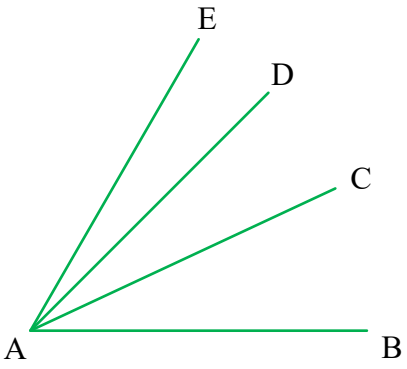


أ. احسبوا مقادير الزوايا:

1. $\sphericalangle BAD$ 2. $\sphericalangle CAE$

ب. هل القطعة AD تُنَصِّف $\sphericalangle BAE$؟ اشرحوا.

8. تمعّنوا في الرّسم أمامكم:



أ. قيسوا بواسطة المنقلة الزوايا:

1. $\sphericalangle BAC$ 2. $\sphericalangle BAD$

ب. دون قياس إضافيّ، احسبوا مقدار $\sphericalangle CAD$.

ج. قيسوا بواسطة المنقلة مقدار $\sphericalangle CAE$.

د. دون قياس إضافيّ، احسبوا مقدار $\sphericalangle DAE$.

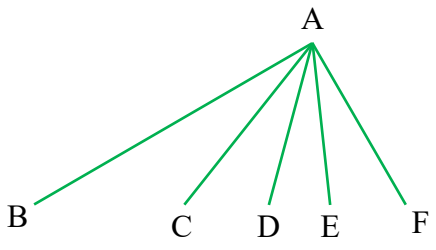
9. في كلّ بند جدوا مقدارين لزاويتين من عندكم وفقًا للمعطيات:

أ. زاويتان حادّتان إذا جمعناهما، نتجت زاوية حادّة.

ب. زاويتان حادّتان إذا جمعناهما، نتجت زاوية منفرجة.

10. معطى في الرسم على اليسار:

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAF$ ، $\sphericalangle BAF=92°$.



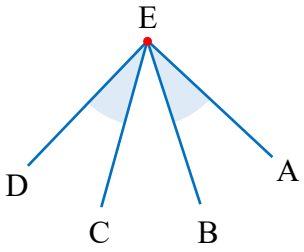
احسبوا مقدار كلّ زاوية من الزوايا التالية:

أ. $\sphericalangle BAC$ ب. $\sphericalangle CAE$ ج. $\sphericalangle BAE$

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

11. معطى: $\sphericalangle CED = \sphericalangle AEB$.

اشرحوا لماذا يتحقّق: $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BED$.



12. كانت سَما تعمل على الحاسوب المحمول عندما كانت شاشتها مفتوحة بزاوية مقدارها $120°$، كما هو مُوضَّح في الصورة اليسرى.

قبل أن تخرج من الغرفة، صغّرت الزاوية بمقدار $80°$، كما هو مُوضَّح في الصورة اليمنى.



أ. بكم درجة إضافيّة عليها تصغير الزاوية، إذا كانت تريد إطباق الشاشة تمامًا (حتّى النهاية)؟

ب. عادت سَما إلى الغرفة، وزادت زاوية فتح الشاشة لتصبح بمقدار $110°$ درجات.

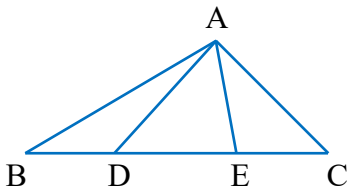
بكم درجة زادت زاوية الفتح؟

13. في ΔABC معطى: $\sphericalangle CAD=85°$، $\sphericalangle CAE=35°$.

أ. احسبوا مقدار $\sphericalangle DAE$.

ب. معطى: $\sphericalangle BAC=103°$، $\sphericalangle BAD=18°$.

1. احسبوا مقدار $\sphericalangle BAE$.
2. ادّعت رنا: " أحد المعطيات في البند "ب" غير ضروريّ، وكان بإمكاننا حساب مقدار $\sphericalangle BAE$ بدونه". هل هي على حقّ؟ اشرحوا.

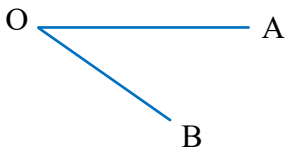


14. أ. أمامكم زاوية حادّة. اعرضوا رسمًا لزاوية تساوي:

1. مجموع الزاوية المعطاة وزاوية قائمة.
2. الفرق بين زاوية قائمة والزاوية المعطاة.

ب. أمامكم زاوية منفرجة. اقترحوا رسمًا لزاوية تساوي:

1. مجموع الزاوية المعطاة وزاوية قائمة.
2. الفرق بين الزاوية المعطاة وزاوية قائمة.

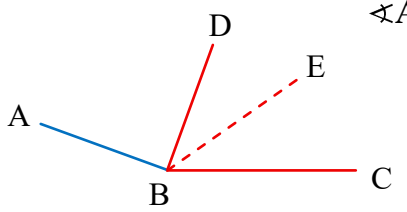




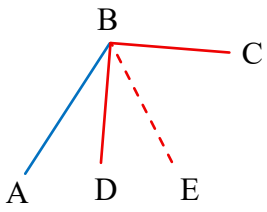
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

15. استعينوا بالمعطيات، وحدّدوا ما إذا كانت القطعة BE تُنَصِّف الزاوية الحمراء. إذا تَعَذَّر التحديد، اذكروا ذلك.

أ. $\sphericalangle ABC = 160°$
$\sphericalangle ABE = 125°$
$AB \perp BD$



ب. $\sphericalangle CBD = 90°$
$\sphericalangle ABE = 60°$



16. حدّدوا في كلّ بند ما إذا كانت الحالة الموصوفة ممكنة.

إذا كانت **ممكنة**، اعرضوا مثالًا مناسبًا. إذا كانت **غير ممكنة**، اشرحوا السبب:

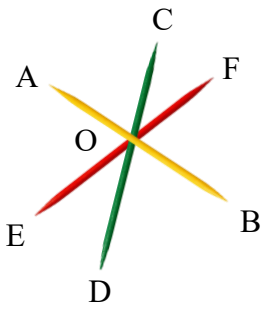
أ. هل يمكن أن نجمع زاويتين حادّتين، فنحصل على زاوية حادّة؟

ب. هل يمكن أن نجمع زاوية حادّة وزاوية قائمة، فنحصل على زاوية مستقيمة؟

ج. هل يمكن أن نجمع زاويتين حادّتين، فنحصل على زاوية مستقيمة؟

د. هل يمكن أن نجمع زاويتين منفرجتين، فنحصل على زاوية مستقيمة؟

17. القطع AB، CD وَ EF تتقاطع في النقطة O.



ادّعت ريم: "يمكننا تمثيل مجموع الزاويتين $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COF$ على أنّه الزاوية $\sphericalangle AOF$."

أ. هل هي على حقّ؟ اشرحوا.

ب. اكتبوا المجاميع التالية كزاوية واحدة، إذا كان ذلك ممكنًا:

1. $\sphericalangle AOE + \sphericalangle EOD$
2. $\sphericalangle COF + \sphericalangle BOD$
3. $\sphericalangle BOD + \sphericalangle BOF$

ج. اكتبوا الزاوية $\sphericalangle EOC$ كمجموع لزاويتين.

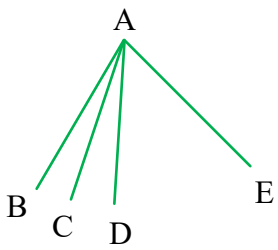
د. اكتبوا الزاوية $\sphericalangle EOF$ كمجموع **لِثلاث** زوايا.

هـ. هل يمكن حساب المجموع $\sphericalangle COB + \sphericalangle BOD$ بدون منقلة؟ اشرحوا.

و. احسبوا المجاميع التالية دون منقلة، إذا كان ذلك ممكنًا:

1. $\sphericalangle EOB + \sphericalangle BOF$
2. $\sphericalangle COE + \sphericalangle EOB$
3. $\sphericalangle AOE + \sphericalangle EOD + \sphericalangle BOD$

18. معطى في الرسم: $\sphericalangle DAE = 50°$، $\sphericalangle CAD = 13°$.

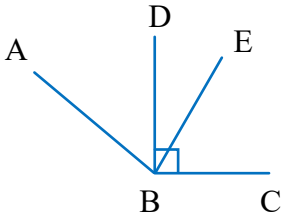


أ. احسبوا مقدار $\sphericalangle CAE$.

ب. مقدار $\sphericalangle BAD$ يساوي نصف مقدار $\sphericalangle DAE$.
احسبوا مقدار $\sphericalangle BAC$.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

19. معطى في الرسم:



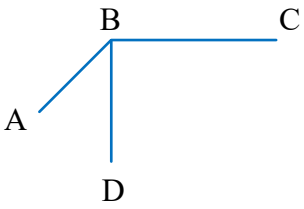
$BC \perp BD$ ، $\sphericalangle DBE = 30°$ ، $\sphericalangle ABE = 80°$ ، $\sphericalangle CBE = 60°$.

طُلِبَ من التلاميذ أن يحسبوا مقدار $\sphericalangle ABC$.

ادّعى سامي: "يمكن حساب مقدار $\sphericalangle ABC$ أيضًا بدون مُعْطَيَين من المعطيات."

أيّ مُعْطَيَين يمكن الاستغناء عنهما؟ اشرحوا، واحسبوا مقدار $\sphericalangle ABC$.

20. معطى في الرسم: $\sphericalangle ABC = 135°$ ، $\sphericalangle ABD = 45°$.



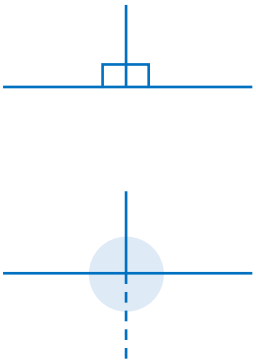
أ. هل يمكن الاستنتاج أنّ: $BC \perp BD$؟ اشرحوا.

ب. نمدّ القطعة AB على استقامتها من جهة النقطة B حتّى النقطة E.

اقترحوا ثلاثة أسئلة **من اختياركم** عن مقادير زوايا،

يمكن الإجابة عنها بمساعدة الرسم، وأجيبوا عنها.

21. في الرسم الذي أمامكم، توجد زاويتان قائمتان لهما رأس مشترك **وضلع مشترك** واحد.



أ. ما هو مقدار الزاوية النّاتجة عن جمع الزاويتين القائمتين؟

ب. ما هو نوع الزاوية النّاتجة عن هذا الجمع؟

ج. مدّ نعيم أحد الأضلاع، وحصل على الرسم الظاهر على جهة اليسار.

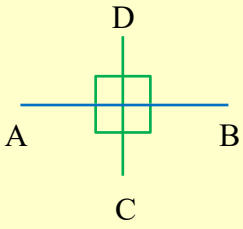
كم زاوية قائمة تظهر في رسم نعيم؟

د. ما هو مجموع الزوايا الأربع القائمة التي تظهر في رسم نعيم؟

تناولنا في السؤال السابق جمع زوايا قائمة، ووجدنا أنّ:

مقدار الزاوية المستقيمة يساوي مجموع زاويتين قائمتين وهو 180°.

عند جمع 4 زوايا قائمة، نحصل على زاوية مقدارها 360°.



سنوضّح هذه الصفات بالاستعانة بالرّسم الظاهر على جهة اليسار.

القطعتان CD وَ AB متعامدتان، وتتشكّل بينهما أربع زوايا قائمة.

من جمع كلّ زاويتين قائمتين نحصل على زاوية مستقيمة، أي زاوية شعاعاها يشكّلان خطًّا مستقيمًا ومقدارها 180°، من جمع الزوايا الأربع معًا، نحصل على زاوية مقدارها 360°.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

أهمّيّة الزوايا في التدريب البدنيّ



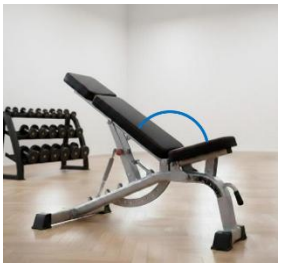
إنّ الحرص على زوايا صحيحة أثناء التدريب البدنيّ أمر مهمّ لصحّة الجسم، خاصّة في الأعمار التي لا تزال فيها العظام والعضلات تنمو.
عند التدريب في زاوية غير صحيحة، فإنّ الضغط على المفاصل والعمود الفقريّ يتوزّع بشكل غير متوازن، ممّا قد يؤدّي إلى حدوث ألم، وجهد زائد غير ضروريّ وإصابات.
في تمارين معيّنة، تتيح **الزاوية القائمة** للقوى التي تؤثّر على المفاصل أن تتوزّع بشكل متوازن وآمن.
كما أنّه يَسهُل تمييز الزاوية القائمة بالعين، ممّا يسمح بالاعتماد عليها.

22. يستعد عماد للتدريب بالأثقال على كرسيّ في قاعة اللياقة البدنيّة (الجيم).



في بداية كلّ تدريب، تكون الزاوية بين المقعد ومسند الظهر قائمة، كما هو موضّح في الصورة العلويّة.
يمكن إمالة مسند الظهر إلى الخلف عن طريق تدوير العجلة عدّة مرّات.
كلّ دورة كاملة واحدة تُميل المسند إلى الخلف بمقدار 5°.

أ. ما هو مقدار الزاوية بين الكرسيّ ومسند الظهر بعد:
   1. دورتين؟
   2. ثلاث دورات؟



ب. قام عماد بإمالة مسند الظهر إلى الخلف بحيث أصبحت الزاوية بين الكرسيّ والمسند 135°، كما هو موضّح في الصورة السُفليّة.
ما هو عدد الدورات التي قام بها عماد في إدارة العجلة؟

ج. أعدّت مُدرّبة عماد جدولًا.
أكملوه بعدد مناسب:

درجة صعوبة التدريب	زاوية يُنصَح بها	عدد الدورات الممكنة
سهلة	90°- 95°	
متوسّطة	100°- 120°	
صعبة	125°- 140°	
صعبة للغاية	145°-155°	

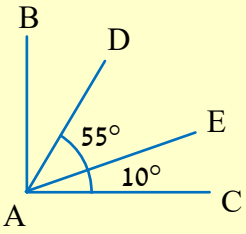
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

مثال:

معطى في الرسم أمامكم: $AB \perp AC$.

أ. استعينوا بالمعطيات التي في الرسم، واحسبوا مقدار $\sphericalangle BAD$.

ب. اقترحوا **طريقتين** لحساب مقدار $\sphericalangle BAE$، واحسبوها.



إجابة:

أ. نستعين بطرح زوايا ونجد أنّ: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle DAE - \sphericalangle EAC$.

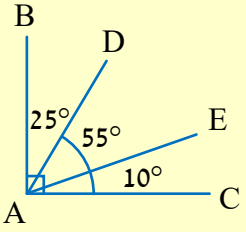
القطعتان AB وَ AC متعامدتان، لذلك $\sphericalangle BAC$ زاوية قائمة.

نُعَوِّض المعطيات، ونحصل على: $\sphericalangle BAD = 90° - 55° - 10° = 25°$.

ب. طريقة أ: نستعين بطرح زوايا: $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BAC - \sphericalangle EAC$.

طريقة ب: نستعين بجمع زوايا: $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAE$.

في الطريقتَين يكون مقدار $\sphericalangle BAE$ هو $80°$.



23. قَسَمنا زاوية قائمة إلى ثلاث زوايا متساوية. احسبوا مقدار كلّ واحدة من الزوايا التي نتجت.

24. أمامكم صورة فرن يمكن فتح بابه حتّى زاوية قائمة. نرمز بـ α إلى مقدار زاوية الفتح.

على سبيل المثال، يظهر في الصورة باب مفتوح بزاوية مقدارها $\alpha = 85°$.



تَعْرِضُ تعليماتُ الشركة المُنتجة أوضاعَ الفتح وفقًا لمقدار زاوية الفتح α:

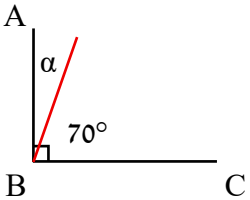
وضع "أ": مقدار زاوية الفتح α المناسبة لِسَحْب الباب للتنظيف هي $45°$.

وضع "ب": مقدار زاوية الفتح α المناسبة لإطلاق البخار هي $20°$.

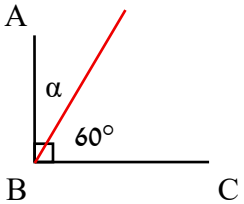
وضع "ج": تجنّبًا لِصَفق الباب، الفرن مُزَوّد بتقنيّة تُبطِئ حركته عندما يصل إلى زاوية فتح α مقدارها $30°$.

في كلّ من المخطّطات i-iii للفرن، $\sphericalangle ABC$ هي زاوية الفتح القُصوى، وباب الفرن يظهرفي اللون الأحمر. جدوا مقدار زاوية الفتح α، ولائموا لكلّ من المخطّطات i-iii الوضع الذي يصفه من الأوضاع "أ"-"ج".

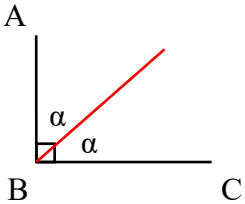
i.



ii.



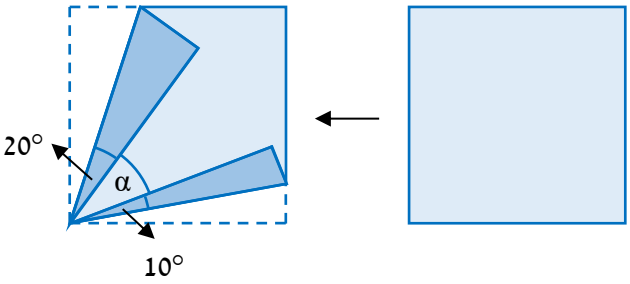
iii.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

25. أخذوا ورقة مربّعة، وطووها وفقًا لما هو مُوضَّح في الرسم الذي أمامكم.

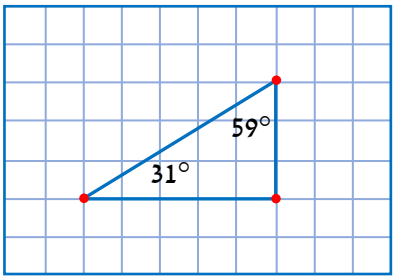
جدوا مقدار الزاوية α.



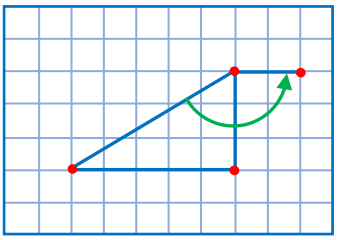
26. يظهر في ورقة التربيعات أمامكم مثلّث، فيه زاويتان حادّتان.

طُلب من التلاميذ الاستعانة بالمثلّث لرسم زوايا بمقادير مختلفة عن تلك التي في الرسم.

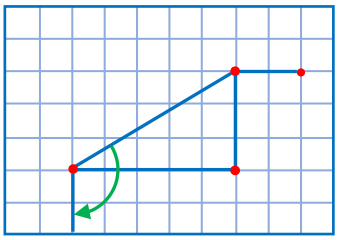
جدوا في كلّ رسم مقدار الزاوية المشار إليها بسهم.



رسم سليم:



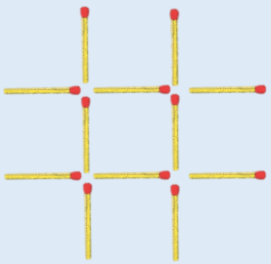
رسم هاني:



أحجية!

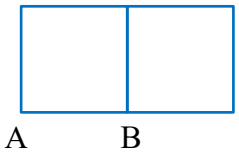
أمامكم 12 عود ثقاب متشابهة.

حرّكوا ثلاثة عيدان لتحصلوا على ثلاثة مربّعات متشابهة.



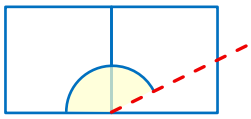
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

27. أمامكم مربّعان لهما ضلع مشترك، بحيث إنّ أحد الرؤوس المشتركة هو B. معطى أيضًا الرأس A. طُلِب من التلميذات رسم زاوية مقدارها $135°$ ورأسها هو B وإحدى ساقَيْها الضلع AB.

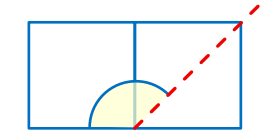


أمامكم رسوم لثلاث تلميذات:

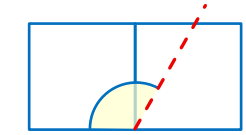
I. رسم سماح



II. رسم شيرين



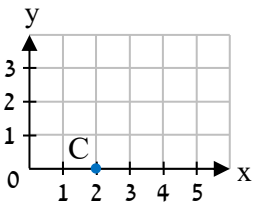
III. رسم نسرين



أ. مَنْ مِنَ التلميذات رسمت الزاوية المطلوبة؟ اشرحوا.

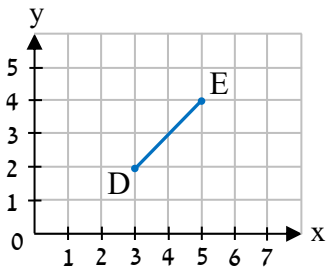
ب. في هيئة المحاور التي أمامكم تظهر النقطة C.

استعينوا بالبند "أ" وارسموا زاوية مقدارها $135°$ ورأسها C.



جـ. في هيئة المحاور التي أمامكم تظهر النقطتين D وَ E.

ارسموا زاوية مقدارها $135°$ وإحدى ساقَيْها القطعة DE.



في السؤال السابق تناولنا رسم زاوية مقدارها $135°$ في هيئة محاور حيث إنّ رأس الزاوية لا يقع في نقطة الأصل.

28. في هيئة المحاور التي أمامكم تظهر النقاط A، B، C وَ D.

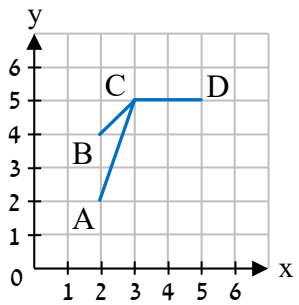
أ. 1. هل $\sphericalangle BCD$ هي زاوية منفرجة؟ اشرحوا.

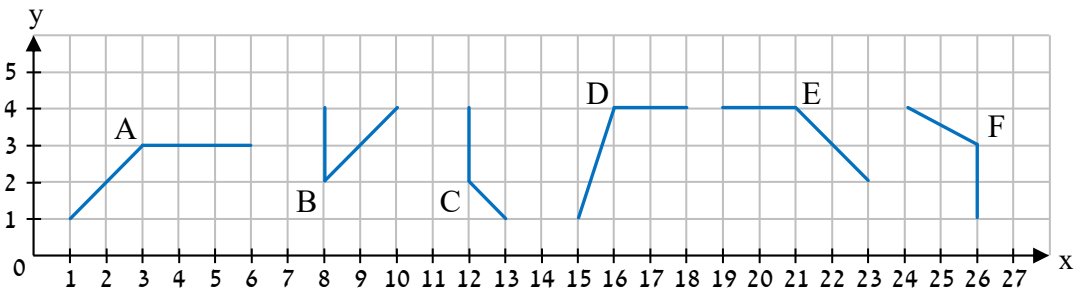
2. هل $\sphericalangle BCD = 135°$ ؟ اشرحوا.

ب. 1. هل $\sphericalangle ACD$ هي زاوية منفرجة؟ اشرحوا.

2. هل $\sphericalangle ACD = 135°$ ؟ اشرحوا.

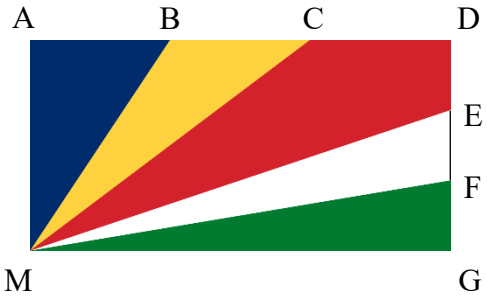
جـ. حدّدوا أيًّا من الزوايا التي أمامكم مقدارها $135°$.





© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

29. أمامكم علم مستطيل لجزر سيشيل.



أ. قيسوا بواسطة المنقلة مقدار الزوايتين:

1. ∢GMF
2. ∢BMC

ب. معلوم أنّ القطعة MF تُنَصِّف ∢EMG،
والقطعة MC تُنَصِّف ∢BME.
دون الاستعانة بالمنقلة، احسبوا مقدار ∢AMB.

جـ. هل القطعة BM تُنَصِّف ∢AMC؟ اشرحوا.

ادخلوا المسابقة الصفّيّة التي تظهر على جهة اليسار: אאוריקה

30. تشير ساعة العقارب التي أمامكم إلى الساعة 1:00.



أ. قيسوا باستخدام المنقلة مقدار الزاوية التي بين العقربين في هذه الساعة.

ب. ادّعى حليم: " في كلّ ساعة يتحرّك عقرب الساعات بمقدار 30°."
استعينوا بادعائه، واحسبوا مقدار الزاوية بين العقربين عند الساعة 2:00.

ج. أكملوا في الدفتر، دون الفحص باستخدام المنقلة. مقدار الزاوية التي بين العقربين عند:

1. الساعة 3:00 هو _____.
2. الساعة 4:00 هو _____.

د. أمامكم عقربا الساعة في ساعة كاملة معيّنة. قيسوا مقدار الزاوية باستخدام المنقلة وحدّدوا ما هي الساعة (الوقت):

1.



2.



3.



هـ. في ساعات كاملة معيّنة، كانت الزاوية بين العقربين 150°.
هل يمكن تحديد هذه الساعات من المعطى؟ إذا كانت الإجابة نعم، جدوها. وإذا كانت لا، اشرحوا.

و. اقترحوا ساعتين **كاملتين** من ساعات اليوم، تتشكّل فيهما نفس الزاوية بين العقربين واذكروا مقدار هذه الزاوية.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

إجابات:

1) أ. 50°. ب. 90°. ج. 95°. **2)** ii. **3)** أ. ∢CBD. ب. ∢DBE. **4)** أ. 52°. ب. 72°.

5) أ. 52°. ب. 65°. ج. 87°. د. 82°.

6) إجابات ممكنة: أ. $50°+20°-60°=10°$ ، $60°+20°-50°=30°$.

ب. **1.** ممكن: $60°+50°-20°=90°$. **2.** غير ممكن. **3.** ممكن: $60°+50°+20°=130°$.

7) أ. **1.** 52°. **2.** 70°. ب. نعم. **8)** أ. **1.** 25°. **2.** 45°. ب. 20°. ج. 35°. د. 15°.

9) إجابات ممكنة: أ. 20°، 40°. ب. 70°، 80°. **10)** أ. 23°. ب. 46°. جـ. 69°.

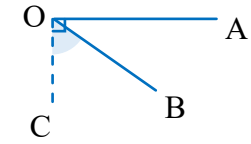
11) معلوم أنّ: ∢AEB = ∢CED. إذا أضفنا لكلّ من هاتين الزاويتين الزاوية ∢BEC الموجودة بينهما، نحصل على زوايا متساوية: ∢BED = ∢AEC.

12) أ. 40°. ب. 70°.

13) أ. 50°. ب. **1.** 68°. **2.** رنا على حقّ. كان بالإمكان حلّ البند السابق باستخدام كلّ معطى من المعطيات على حدة.

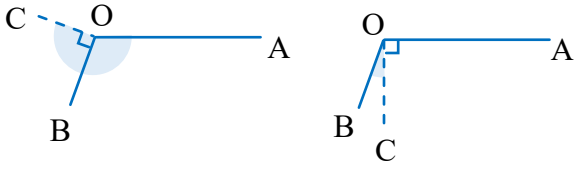
14) أ. **1.** الزاوية ∢COA في الرسم على اليسار.

2. الزاوية ∢COB في الرسم على اليمين.



ب. **1.** الزاوية ∢COA الزرقاء في الرسم الأيسر.

2. الزاوية ∢COB في الرسم الأيمن.



15) أ. نعم. ب. لا يمكن التحديد.

16) أ. ممكن. مثال: 50°، 30°. ب. غير ممكن. ج. غير ممكن. د. غير ممكن.

17) أ. ريم على حقّ. الزاويتان اللتان تمّ جمعهما تشكّلان زاوية جديدة ضلعاها هما AO وَ OF.

ب. **1.** ∢AOD. **2.** غير ممكن. **3.** ∢FOD. ج. ∢COA + ∢EOA.

د. ∢FOC + ∢COA + ∢EOA. هـ. نعم ممكن. الزاويتان تشكلّان معًا الزاوية المستقيمة ∢COD، لذلك مجموع الزوايا 180°. و. **1.** 180°. **2.** غير ممكن. **3.** 180°.

18) أ. 63°. ب. 12°.

19) ∢ABC = 140°. الزاوية ∢ABC تساوي مجوع الزاويتين ∢ABE = 80° و ∢CBE = 60°، لذلك يمكن حلّ السؤال أيضًا دون استخدام هذين المُعْطَيَين: BC ⊥ BD، ∢DBE = 30°.

20) أ. نعم. بمساعدة المعطيات يمكن أن نبيّن أنّ ∢CBD قائمة، ولذلك المستقيمان متعامدان.

ب. إجابات ممكنة: ما هو مقدار الزاوية ∢CBE؟ إجابة: 45°؛ ما هو مقدار الزاوية ∢EBD؟ إجابة: 135°؛ ما هو مقدار الزاوية ∢EBA؟ إجابة: 180°.

21) أ. 180°. ب. زاوية مستقيمة. ج. 4 زوايا قائمة. د. 360°.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

22) **أ. 1.** 100°. **2.** 105°.

ب. 9 دورات.

ج. إجابات ممكنة تظهر في الجدول على الجهة اليسرى:

درجة صعوبة التدريب	زاوية يُنصح بها	عدد الدورات الممكنة
سهلة	90°-95°	1
متوسّطة	100°-120°	3
صعبة	125°-140°	9
صعبة للغاية	145°-155°	12

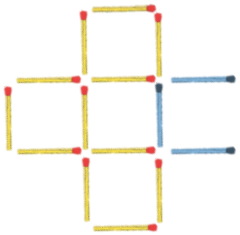
23) 30°.

24) **i.** $\alpha = 20°$، ملائم للوضع "ب". **ii.** $\alpha = 30°$، ملائم للوضع "ج". **iii.** $\alpha = 45°$، ملائم للوضع "أ".

25) $\alpha = 30°$.

26) سليم: 149°؛ هاني: 121°.

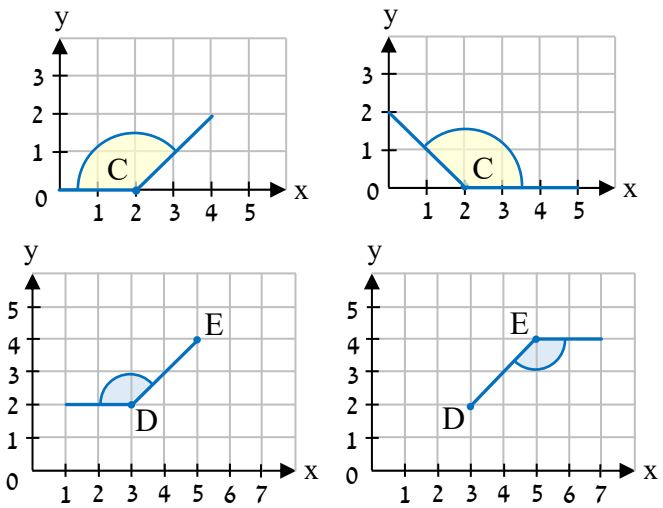
حلّ الأحجية: الرسم الظاهر على اليسار.



27) **أ.** شيرين. الزاوية التي رسمتها شيرين ناتجة من جمع إحدى زوايا المربّع مع الزاوية التي بين قطر مربّع وضلعه. مقدارها يساوي مجموع 90° وَ 45°، لذلك مقدارها 135°.

ب. في الرسومات على اليسار، يظهر خياران لرسم الزاوية المطلوبة.

ج. في الرسومات على اليسار يظهر خياران لرسم الزاوية المطلوبة.



28) **أ. 1.** نعم. هي ناتجة من جمع زاوية قائمة مع زاوية أخرى.

2. نعم. هي ناتجة من جمع زاوية قائمة مع زاوية مقدارها 45°.

ب. 1. نعم. هي ناتجة من جمع زاوية قائمة مع زاوية أخرى.

2. كلّا. هي ناتجة من جمع زاوية قائمة مع زاوية ناتجة بين قطر وضلع لمستطيل ليس مربّعا.

أي إنّ، مقدار الزاوية المُضافة لا يساوي 45°، لذلك مجموع الزوايا ليس 135°.

ج. $\sphericalangle A$، $\sphericalangle C$ وَ $\sphericalangle E$.

29) **أ. 1.** 9°. **2.** 19°. **ب.** 34°. **ج.** كلّا. حسب البنود السابقة يتحقّق: $\sphericalangle BMC \neq \sphericalangle AMB$.

30) **أ.** 30°. **ب.** 60°. **ج. 1.** 90°. **2.** 120°. **د. 1.** الزاوية 120°، والساعة 8:00.

2. الزاوية 180°، والساعة 6:00. **3.** الزاوية 30°، والساعة 11:00. **هـ.** نعم، 5:00 أو 7:00.

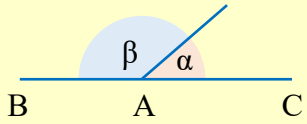
و. إجابات ممكنة: 1:00 وَ 11:00، والزاوية هي 30°؛ 4:00 وّ 8:00، والزاوية هي 120°.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

زوايا متجاورة

ما هي الزوايا المتجاورة؟

زاويتان متجاورتان هما زاويتان لهما رأس مشترك وضلع مشترك، وتُكَمِّل إحداهما الأخرى لتُشكّلا معًا زاوية مستقيمة، لذلك مجموع زاويتين متجاورتين هو $180°$. في الرسم على اليسار تظهر الزاوية المستقيمة $\sphericalangle BAC$.



في الرسم رمزنا إلى الزاويتين المتجاورتين بـ α وَ β ومجموعهما $180°$.

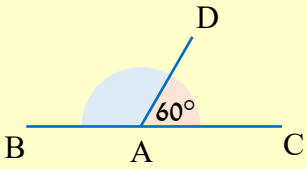


ادخلوا الفعّاليّة الرقميّة (الديجيتاليّة). $\sphericalangle BAC$ هي زاوية مستقيمة.

حرّكوا (أزيحوا) النقاط A وَ D، وافحصوا مجموع الزاويتين المتجاورتين $\sphericalangle BAD$ و $\sphericalangle CAD$.

مثال: تظهر في الرسم الزاويتين المتجاورتين $\sphericalangle CAD$ وَ $\sphericalangle BAD$.

معطى: $\sphericalangle CAD = 60°$. احسبوا مقدار $\sphericalangle BAD$.

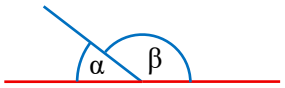


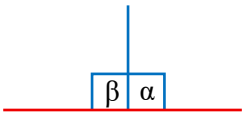
الحلّ: مجموع زاويتين متجاورتين هو $180°$، لذلك يتحقّق:

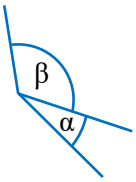
$$\sphericalangle BAD = 180° - 60° = 120°$$

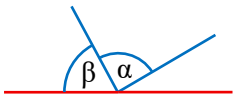
1. في الرسم أمامكم تظهر قطع حمراء وقطع زرقاء.

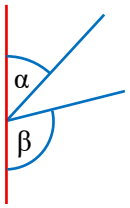
جدوا في أيّ من البنود التالية الزاويتان اللتان مقدارهما α وَ β هما زاويتان متجاورتان:

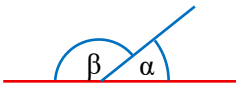
i. 

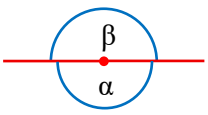
ii. 

iii. 

iv. 

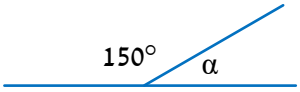
v. 

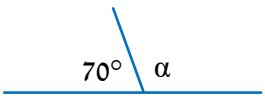
vi. 

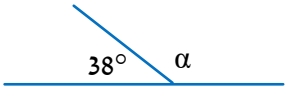
vii. 

viii. 

2. تظهر في كلّ بند زاويتان متجاورتان. استعينوا بالمعطيات التي في الرسم واحسبوا α:

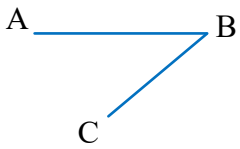
أ. 

ب. 

ج. 

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

3. أمامكم ∢ABC.

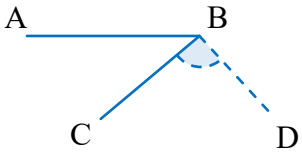


طُلِبَ من التلميذات أن يرسمن الزاوية المجاورة لها.

رسمت سناء ودعاء رَسْمَين مختلفين.

أ. هل من الممكن أن تكون كلتاهما على حقّ؟

إذا كان الجواب نعم، ارسموا بطريقتين مختلفتين.



ب. يظهر على اليسار رسم رسمته هناء. هل هي على صواب؟ اشرحوا.

4. اقترحوا مقادير **من اختياركم** لزوجين من الزوايا المتجاورة، وارسموا كلّ زوج بمساعدة منقلة.

5. معطى زاويتين متجاورتين، إحداهما زاوية حادّة.

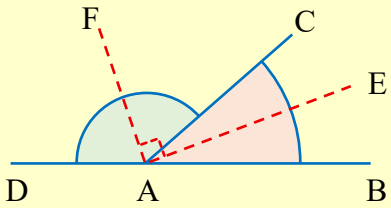
حدّدوا أيًّا من المقادير التالية يمكن أن يكون مقدار الزاوية الأخرى. اشرحوا.

i. 30° ii. 120° iii. 90° iv. 177°

في مرحلة سابقة تعلّمنا عن مُنصِّف الزاوية.

سنعرض الآن صفة تُحَقِّقها مُنصِّفات زوايا متجاورة:

مُنَصِّفا زاويتين متجاورتين متعامدان.



تمعّنوا في الرسم على اليسار.

∢BAC وَ ∢CAD هما زاويتان متجاورتان.

القطعة AE تنصّف ∢BAC، والقطعة AF تُنصِّف ∢CAD.

حسب الصفّة المذكورة، مُنَصِّفا الزوايا AE وَ AF متعامدان.

سنعرض طريقتين كي نُبَيِّن أنّ هذه الصّفة تتحقّق.

طريقة (أ): توضيح رقميّ (ديجيتالي)



ادخلوا الفعاليّة الرقميّة. حرّكوا (أزيحوا) النقطة C.

الآن حدّدوا موقع النقطة E بحيث إنّ القطعة AE تُنَصِّف ∢BAC.

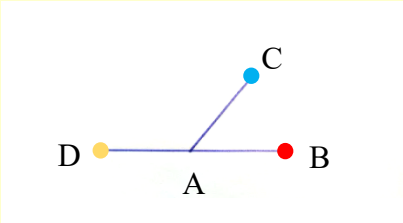
وبعد ذلك حدّدوا موقع النقطة F بحيث إنّ القطعة AF تُنَصِّف ∢CAD.

والآن افحصوا مقدار ∢EAF. ما هو مقدارها؟

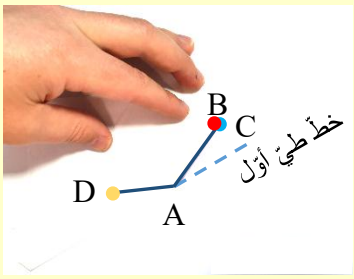
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

طريقة (ب): توضيح عمليّ

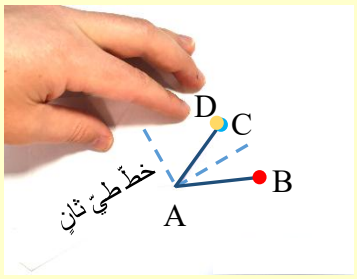
1. نرسم أوّلًا على ورقة شفّافة بواسطة مسطرة:
القطعة BD التي تخرج منها القطعة AC،
والتي تشكّل زاويتين متجاورتين.



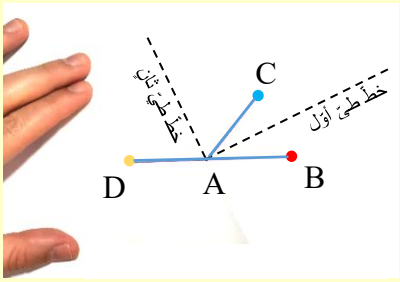
2. نطوي القطعة AB على القطعة AC بحيث ينتج خطّ طيّ ينَصِف ∢BAC.



3. نطوي القطعة AD على القطعة AC بحيث ينتج خطّ طيّ ينَصِف ∢DAC.

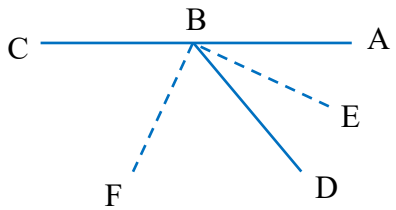


4. خطّا الطيّ هما مُنصِفا الزاويتين المتجاورتين.
استعينوا بالمسطرة المثلّث أوبالمنقلة،
وبيّنوا أنّ الزاوية التي بين المنصّفين زاوية قائمة.



في هذه المرحلة، استَنتجنا هذه الصّفة بطريقتين، باستعمال مُنصِّفات زوايا لأزواج مختلفة من الزوايا المتجاورة، ولكن لا نزال بحاجة إلى برهانٍ عامٍّ لكلّ زوج من الزوايا المتجاورة. سنبرهن ذلك في مرحلة قادمة من دراسة الرياضيّات.

6. النقطة B تقع على القطعة AC.
القطعة BE تُنَصِّف ∢ABD.
القطعة BF تنَصِّف ∢CBD.

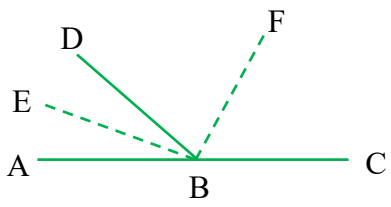


أ. أيّ زاوية من الزوايا في الرسم هي زاوية قائمة؟ اشرحوا.

ب. معطى: $\measuredangle DBE = 25°$. احسبوا مقدار: 1. ∢DBF 2. ∢CBF

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

7. النقطة B هي رأس مشترك للزوايتين $\sphericalangle ABD$ وَ $\sphericalangle CBD$.



أ. هل يمكن الاستنتاج أنّ النقاط A، B وَ C تقع على نفس القطعة؟

ب. القطعة BE تنصّف $\sphericalangle ABD$.

القطعة BF تنصّف $\sphericalangle CBD$.

معطى: $\sphericalangle DBE = 20°$ ، $\sphericalangle CBF = 70°$.

احسبوا مقادير الزوايا:

1. $\sphericalangle ABD$ 2. $\sphericalangle CBD$

ج. احسبوا مقدار $\sphericalangle ABC$ وحدّدوا نوعها.

د. ماذا يمكن الاستنتاج بخصوص موقع النقاط A، B وَ C؟

بعد أن تطرّقنا إلى أزواج من الزوايا المتجاورة التي تشكّل معًا زاوية مستقيمة، سنتناول الآن الزاوية المستقيمة المقسّمة إلى أكثر من زاويتين، ومن خلال ذلك سنتدرّب وسنتعمّق في مواضيع مختلفة تعلّمناها حتّى الآن حول الزوايا.

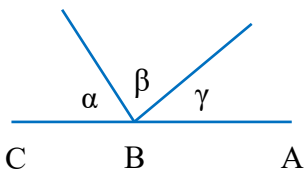
8. معطاة زاوية مستقيمة.

أ. إذا قُسِمَت الزاوية إلى ثلاث زوايا متساوية، فكم سيكون مقدار كلّ زاوية؟

ب. إذا قُسِمَت الزاوية إلى أربع زوايا متساوية، فكم سيكون مقدار كلّ زاوية؟

جـ. قُسِّمت الزاوية إلى عدد من الزوايا المتساوية، مقدار كلّ منها 10° درجات. إلى كم زاوية قُسِّمت؟

9. معطى أنّ $\sphericalangle ABC$ هي زاوية مستقيمة.



أ. حدّدوا لكلّ من الادّعاءات التالية ما إذا كان صحيحًا أم خطأً:

i. مجموع الزوايا الثلاث التي مقاديرها α، β وَ γ هو 180°.

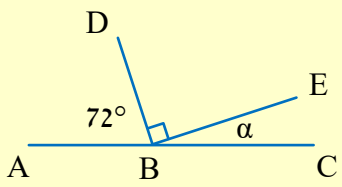
ii. الزوايا الثلاث التي مقاديرها α، β وَ γ هي زوايا متجاورة.

iii. زوج الزوايا التي مقاديرها β وَ γ هو زوج لزاويتين متجاورتين.

ب. معطى: $\alpha = 60°$ ، $\beta = 50°$. جدوا γ.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

مثال: في الرسم الذي أمامكم $\sphericalangle ABC$ هي زاوية مستقيمة.
استعينوا بالمعطيات التي في الرسم وجدوا α.

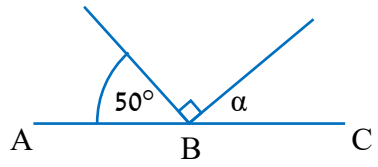


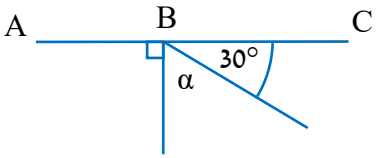
الحلّ: مقدار الزاوية المستقيمة هو $180°$، لذلك يتحقّق:

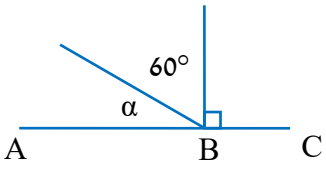
$$\sphericalangle ABC = 180° \rightarrow \sphericalangle CBE = 180° - \sphericalangle ABD - \sphericalangle DBE$$
$$\sphericalangle CBE = 180° - 72° - 90° \rightarrow \sphericalangle CBE = 18° \rightarrow \alpha = 18°$$

10. في كلّ بند $\sphericalangle ABC$ هي زاوية مستقيمة. استعينوا بالمعطيات التي في الرسم وجدوا α:

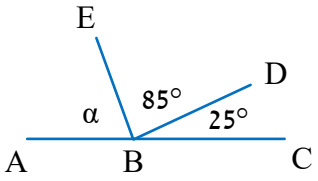
أ. ب. ج.

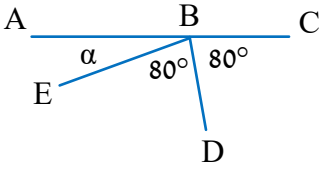


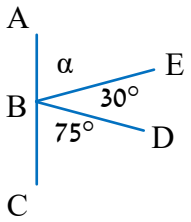




د. ه. و.





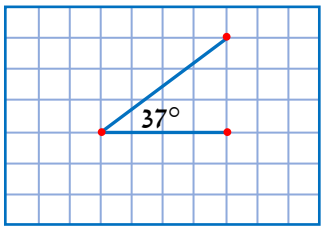


11. تظهر على ورقة التربيعات التي أمامكم زاوية.

أ. انسخوا الزاوية في الدفتر مع الحرص على مواقع النقاط.

ب. بالاستعانة بهذه الزاوية، ارسموا في الدفتر زاوية مقدارها:

1. $143°$ 2. $53°$ 3. $127°$



12. قُسمت زاوية مستقيمة إلى ثلاث زوايا. الزاوية الأولى هي نصف الزاوية المستقيمة.

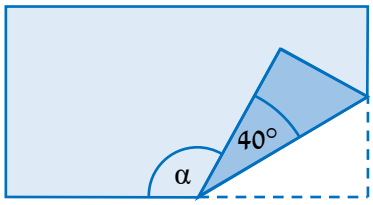
أ. احسبوا مقدار الزاوية الأولى.

ب. الزاوية الثانية هي عُشْر الزاوية المستقيمة. ما هومقدار كلّ من الزاوية الثانية والثالثة؟

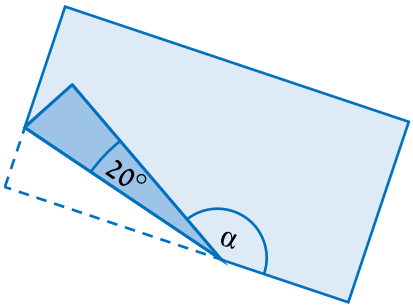
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

13. أمامكم أوراق مستطيلة الشكل مطويّة. استعينوا بالمعطيات وجدوا α:

أ.



ب.

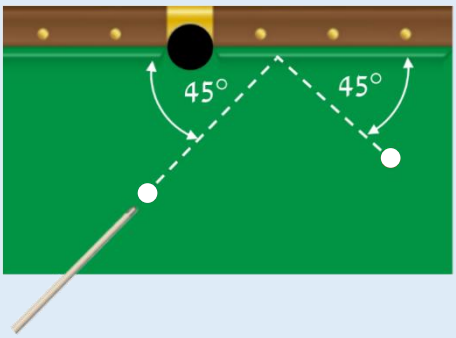


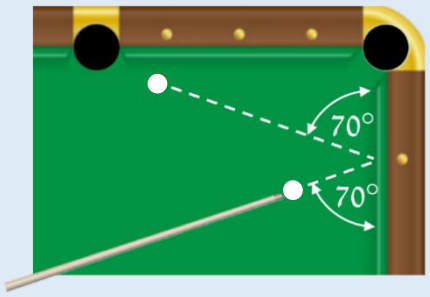
ما هو"قانون الانعكاس"؟ (الارتداد)

تعتمد لعبة البلياردو في جزء كبير منها على قانون فيزيائيّ يُسمّى "قانون الانعكاس".

وِفقًا لهذا القانون، في ظروف مثاليّة، زاوية **اصطدام** الكرة في حافّة الطاولة مساوية لزاوية **ارتدادها**.

يمكننا رؤية ذلك في الرسمين التوضيحيّين التاليين:



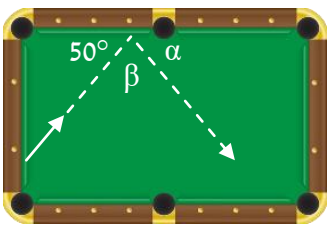


14. اقرؤوا الشرح أعلاه المتعلّق بقانون الانعكاس.

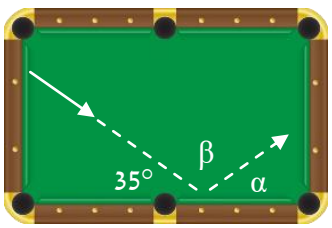
أمامكم مخطّط لحركة كرة في لعبة بلياردو.

في كلّ بند استعينوا بالمعطيات، وجدوا α وَ β:

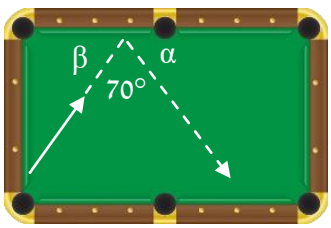
أ.



ب.



جـ.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

قانون الانعكاس في سياق أشعّة الضوء

وفقًا لهذا القانون، عندما يصطدم شعاع ضوئيّ بمرآة، فإنّ **زاوية السقوط** على المرآة تساوي **زاوية الانعكاس** عنها.

على اليسار رسم تخطيطيّ لشعاع ضوئيّ يصطدم بمرآة أُشير إليها بالخطّ الأحمر.

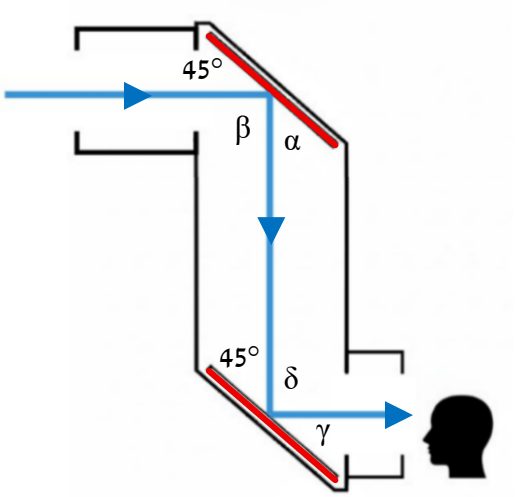
أشير إلى شعاع الضوء بخطّ متقطّع. مقدار زاوية السقوط مشار إليه في الرسم بـ α، مقدار زاوية الانعكاس مُشار إليه بـ β، ويتحقّق: $\alpha = \beta$.



15. اقرؤوا الشرح الوارد قبل السؤال.



في الغوّاصات، يُستخدم قانون الانعكاس في جهاز يُسمّى **"البيريسكوب"**، والذي يتيح للأشخاص الموجودين داخل الغوّاصة مراقبة ما يحدث **فوق سطح الماء**.



أمامكم مخطّط لبيريسكوب يحتوي على **مِرْآتين** (أُشير إليها بالأحمر). الخطّ الأزرق يمثّل **المسار الذي يسلكه شعاع الضوء** الذي يدخل البيريسكوب، يصطدم بالمرآة العُلويّة، ثمّ يصطدم بالمرآة السُفليّة، ومن هناك يصل إلى عين المراقِب.

أ. استعينوا بالمعطيات التي على المرآة العُلويّة، وجدوا:

1. α 2. β

ب. استعينوا بالمعطيات التي على المرآة السفليّة، وجدوا:

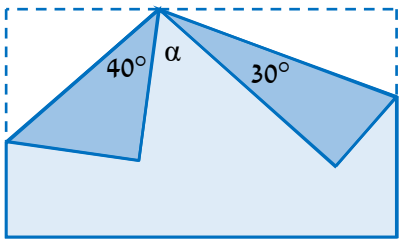
1. γ 2. δ

ج. حدّدوا لكلّ من الادّعاءات التالية ما إذا كان صحيحًا أم خطأً:

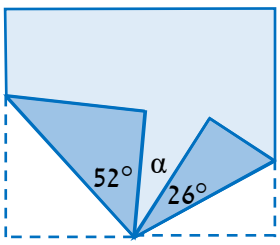
1. في المسار الذي يسلكه شعاع الضوء، توجد قطع متعامدة.
2. في كلّ مرآة، زاوية السقوط وزاوية الانعكاس هما زاويتان متجاورتان.

16. أمامكم أوراق مستطيلة الشكل مطويّة. استعينوا بالمعطيات وجدوا α:

أ.



ب.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

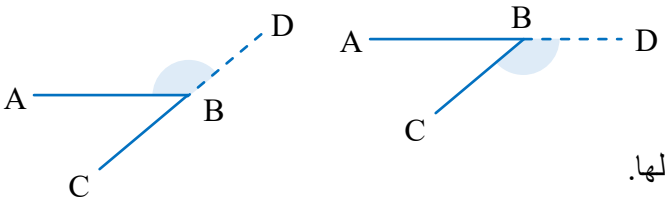
الإجابات:

1) i، ii، vi.

2) **أ.** 30°. **ب.** 110°. **جـ.** 142°.

3) **أ.** نعم ممكن. في أحد الرسمين، القطعة AB هي الساق المشتركة للزاويتين، وفي الآخر القطعة BC.

مثال: الزوايا الزرقاء في الرسمين على اليسار.



ب. هناء على خطأ. الزاوية الزرقاء لا تُكَمِّل
الزاوية ABC∢ إلى زاوية مستقيمة، لذلك ليست مجاورة لها.

4) إجابات ممكنة: الزوايا 140° وَ 40° في الرسم الأيمن؛
الزوايا 75° وَ 105° في الرسم الأيسر:



5) ii، iv.

6) **أ.** EBF∢. **ب. 1.** 65°. **2.** 65°.

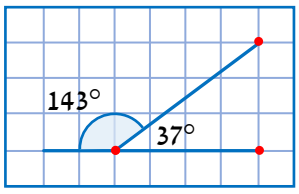
7) **أ.** لا يمكن أن نستنتج ذلك بدون معطيات إضافيّة. **ب. 1.** 40°. **2.** 140°. **ج.** 180°. زاوية مستقيمة.
د. النقاط A، B وَ C تقع على نفس القطعة، والتي هي القطعة AC.

8) **أ.** 60°. **ب.** 45°. **جـ.** 18.

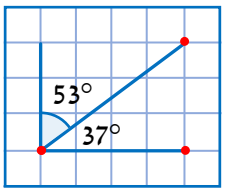
9) **أ. i.** صحيح. **ii.** خطأ. **iii.** خطأ. **ب.** $\gamma = 70°$.

10) **أ.** 40°. **ب.** 60°. **ج.** 30°. **د.** 70°. **هـ.** 20°. **و.** 75°.

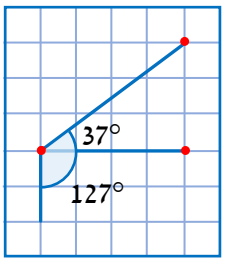
11) **ب.** إجابات ممكنة: **1.**



2.



3.



12) **أ.** 90°. **ب.** الثانية: 18°، الثالثة: 72°.

13) **أ.** 100°. **ب.** 140°.

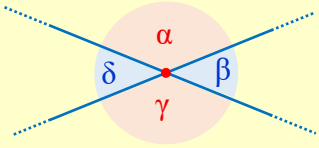
14) **أ.** $\alpha = 50°$، $\beta = 80°$. **ب.** $\alpha = 35°$، $\beta = 110°$. **ج.** $\alpha = 55°$، $\beta = 55°$.

15) **أ. 1.** 45°. **2.** 90°. **ب. 1.** 45°. **2.** 90°. **ج. 1.** صحيح. **2.** خطأ.

16) **أ.** $\alpha = 40°$. **ب.** $\alpha = 24°$.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

زوايا متقابلة بالرّأس



أمامكم مستقيمان يتقاطعان في النقطة الحمراء.

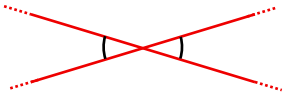
تنتج أربع زوايا أُشيرَ إلى مقاديرها بـ α، β، γ وَ δ.

كلّ زاوية منها **أصغر** من زاوية مستقيمة. من بين الزوايا الأربع، كلّ زاويتين لهما رأس مشترك، ولكن ليس لهما ضلع مشترك، تسمّيان زاويتين متقابلتين بالرأس.

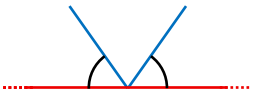
في الرسم المعطى: الزاويتان اللتان مقدارهما α وَ γ هما زاويتان متقابلتان بالرأس، والزاويتان اللتان مقدارهما β وَ δ زاويتان متقابلتان بالرأس.

1. أمامكم مستقيمات حمراء وقطع زرقاء. في أيّ من البنود تكون الزوايا المُشار إليها باللون الأسود متقابلة بالرأس؟

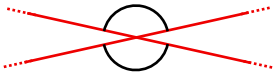
i.



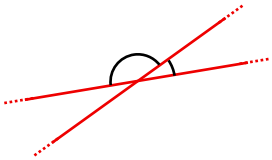
ii.



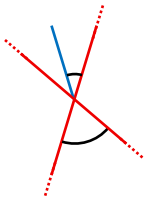
iii.



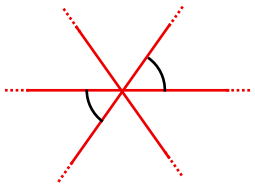
iv.



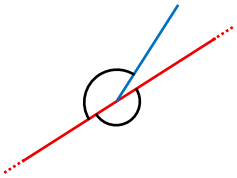
v.



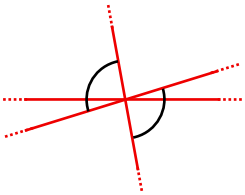
vi.



vii.

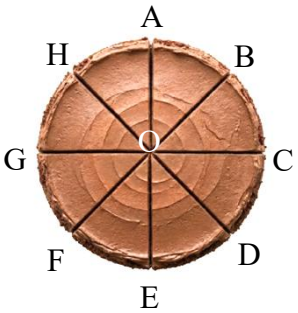


viii.



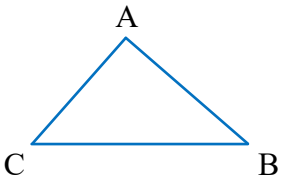
2. أمامكم صورة لكعكة تمّ تقسيمها بواسطة 4 خطوط تقطيع، والتي تتقاطع في النقطة O.

اذكروا ثلاثة أزواج من الزوايا المتقابلة بالرأس.



3. أمامكم ΔABC.

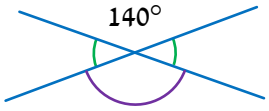
أضيفوا إلى الرسم الزوايا المقابلة بالرأس لزوايا ΔABC.



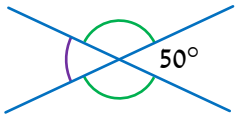
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

4. في الرسوم أمامكم قطعتان متقاطعتان، ومعطى مقدار إحدى الزوايا بينهما:

الرسم I:



الرسم II:



أ. 1. هل الزاويتان الخضراوان في كلّ رسم متقابلتان بالرأس؟

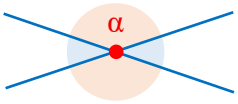
2. استعينوا بالحساب وحدّدوا في كلّ رسم ما إذا كانت الزوايا الخضراء متساوية في المقدار.

ب. 1. هل الزاوية المعطاة والزاوية البنفسجيّة متقابلتان بالرأس في كلا الرسمين؟

2. استعينوا بالحسابات وحدّدوا في كلّ رسم ما إذا كانت الزاوية المعطاة والزاوية البنفسجيّة متساويتين في المقدار.

ج. استعينوا بالبنود السابقة واطرحوا فرضيّة بخصوص مقادير الزوايا المتقابلة بالرأس.

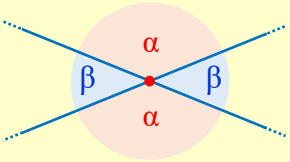
د. طرح ماهر فرضيّة: "كلّ زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان".



لقد رسم الشكل التوضيحيّ الظاهر على اليسار، وفيه تتقاطع قطعتان في النقطة الحمراء، ورَمَزَ إلى مقدار إحدى الزوايا الحمراء بـ α.

استعينوا بالزوايا المتجاورة، واشرحوا لماذا ماهر على صواب.

وجدنا في السؤال السابق أنّ **كلّ زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان**.



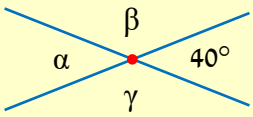
في الرسم الظاهر على اليسار، تتقاطع قطعتان في النقطة الحمراء بحيث ينتج 4 زوايا، اثنتان زرقاوان واثنتان حمراوان.

الزاويتان **الحمراوان** هما زاويتان متقابلتان بالرأس، ومتساويتان. وأُشير إلى مقدار كلّ منهما بـ α.

الزاويتان **الزرقاوان** هما زاويتان متقابلتان بالرأس، ومتساويتان. وأُشير إلى مقدار كلّ منهما بـ β.

ادخلوا المحاكاة الرقميّة (التوضيح الرقميّ) الظاهرة على اليسار. أزيحوا النقاط A، B، C وَ D، وبعد كلّ إزاحة افحصوا مقادير الزوايا المتقابلة بالرأس الموجودة في الرسم.

مثال: في الرسم على اليسار تظهر قطعتان متقاطعتان



وأربع زوايا ناتجة من التقاطع. جدوا: أ. α ب. β جـ. γ

الحلّ:

أ. الزاويتان اللتان مقدارهما α وَ 40° متقابلتان بالرأس، لذلك متساويتان. أي أنّ: $\alpha = 40°$.

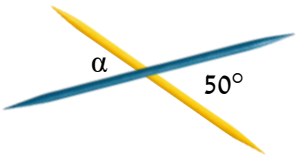
ب. الزاويتان اللتان مقدارهما β وَ 40° متجاورتان، لذلك مجموعهما 180°: $\beta = 140°$ ← $\beta = 180° - 40°$.

ج. الزاويتان اللتان مقدارهما β وَ γ متقابلتان بالرأس، ومتساويتان. أي أنّ: $\gamma = 140°$ ← $\gamma = \beta$.

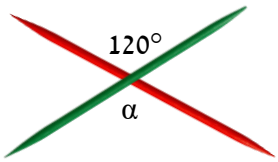
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

5. أمامكم أوضاع ناتجة من لعبة الأعواد (الميكادو). جدوا α، β وَ γ بمساعدة المعطيات:

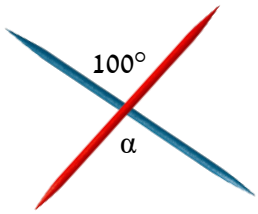
أ.



ب.



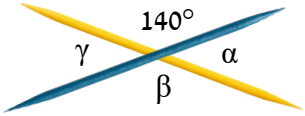
ج.



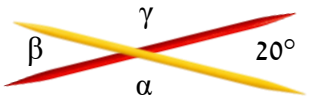
د.



هـ.

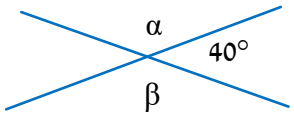


و.

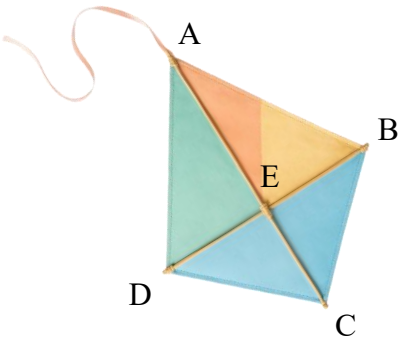


6. في الرسم مستقيمان متقاطعان.

احسبوا **مجموع** الزاويتين اللتين مقدارهما α وَ β.



7. أمامكم طائرة ورقيّة على صورة شكل رباعيّ ABCD قطراه يتقاطعان في النقطة E.

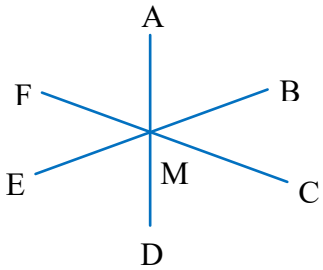


أ. جِدوا في الرسم زاويتين متقابلتين بالرأس.

ب. جِدوا في الرسم زاويتين متجاورتين.

ج. اقترحوا مقدارًا **من اختياركم للزاوية** ∢AEB، وبناءً عليه، احسبوا مقدار الزوايا الأخرى التي رأسها E.

8. في الرسم الذي أمامكم ثلاث قِطَع مستقيمة تتقاطع في النقطة M.



أ. سجّلوا زوجين من الزوايا المتجاورة.

ب. سجّلوا زوجين من الزوايا المتقابلة بالرأس.

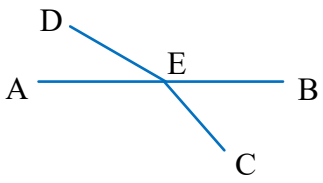
ج. تدّعي آية: "إذا عرفنا مقدارَي الزاويتين ∢AMB وَ ∢EMF، يمكننا حساب مقدار ∢DMC." هل هي على حقّ؟ اشرحوا.

د. معطى: $\measuredangle BMC = 40°$ ، $\measuredangle DME = 70°$.

1. احسبوا مقدار ∢AMF.
2. هل القطعة DM تُنَصِّف ∢CME؟ اشرحوا.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

9. في الرسم الذي أمامكم القِطَع AE، CE، BE وَ DE تخرج من النقطة E.

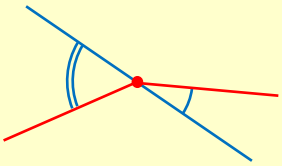


ادّعى لبيب: "للزاويتين AED∢ وَ BEC∢ يوجد رأس مشترك، ولذلك يمكن الاستنتاج بأنّهما **بالضرورة** زاويتان متقابلتان بالرأس."

أ. هل هو على صواب؟ اشرحوا.

ب. قيسوا مقدار CED∢ بمساعدة المنقلة، وحدّدوا هل:

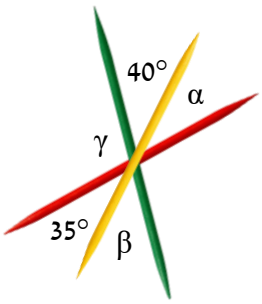
1. القطعتان DE وَ CE تقعان على نفس المستقيم؟
2. الزاويتان AED∢ وَ BEC∢ متقابلتان بالرأس؟



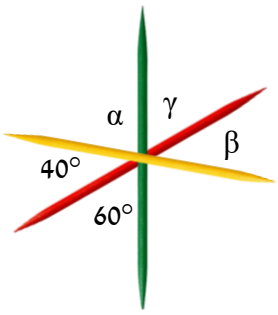
كما وجدنا في السؤال السابق، حتّى عندما يكون لزاويتين رأس مشترك، فمن المحتمل ألّا تكونا متقابلتين بالرأس. الزوايا المتقابلة بالرأس تتكوّن من **تقاطع قطعتين مستقيمَتَين أو مستقيمين**. أمّا في التقاطع بين مستقيم وخطّ منكسر، كما في الحالة التي ظهرت في السؤال السابق وفي الرسم على اليسار، الزوايا ليست متقابلة بالرأس مع أنّ لها رأسًا مشتركًا.

10. أمامكم أوضاع ناتجة من لعبة الأعواد (الميكادو). جدوا α، β وَ γ بمساعدة المعطيات:

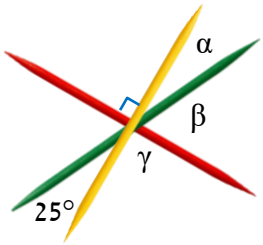
أ.



ب.



ج.

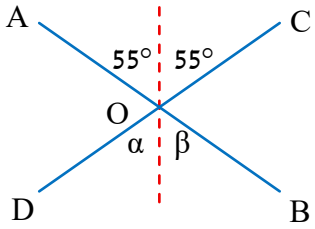


" كوننا لا نستطيع إيجاد حلّ، هذا لا يعني أنّه غير موجود."

أندرو ويلز، رياضيّ

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

11. في الرسم على اليسار القطعتان AB وَ CD تتقاطعان في النقطة O.

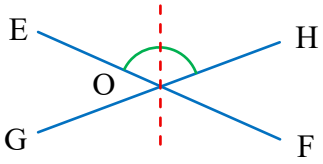


أ. هل الزاويتان ∢AOC وَ ∢BOD متقابلتان بالرأس؟

ب. القطعة الحمراء المُقَطَّعة تُنَصِّف ∢AOC.

1. استعينوا بالمعطيات، وجدوا α وَ β.
2. هل القطعة الحمراء تُنَصِّف أيضًا ∢BOD؟

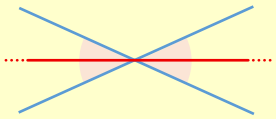
ج. في الرسم على اليسار القطعتان EF وَ GH تتقاطعان في النقطة O.



1. هل الزاويتان ∢EOH وَ ∢GOF متقابلتان بالرأس؟
2. القطعة الحمراء المُقَطَّعة تُنَصِّف ∢EOH لزاويتين مُشار إليهما بالأخضر. اقترحوا مقدارًا من اختياركم لكلّ زاوية، وحدّدوا بناءً على الحسابات، هل القطعة الحمراء تُنَصِّف أيضًا الزاوية ∢GOF.

في السؤال السابق، تناولنا الخاصّيّة التالية:

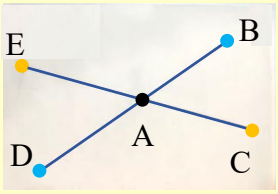
المستقيم الذي يُنَصِّف إحدى الزاويتين المتقابلتين بالرأس، يُنَصِّف أيضًا الزاوية الثانية.



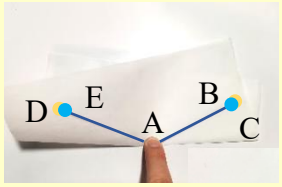
يظهر في الرسم قطعتان مستقيمتان متقاطعتان تشكّلان زوجين من الزوايا المتقابلة بالرأس الملوّنة باللون الأحمر. وِفقًا للخاصّيّة التي وصفناها، إذا كان المستقيم الأحمر يُنَصِّف إحدى الزاويتين المتقابلتين بالرأس، فإنّه يُنصِّف أيضًا الزاوية الأخرى المقابلة لها بالرأس. سنعرض طريقتين لإثبات صحّة هذه الخاصّيّة.

طريقة (أ): بمساعدة طيّ ورقة

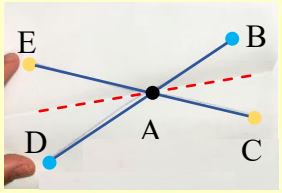
1. نرسم على ورقة شفّافة قطعتين مستقيمتين متقاطعتين، بحيث تتشكّل زاويتان متقابلتان بالرأس.



2. نطوي الورقة بحيث نضع القطعة AC على القطعة AB.
خطّ الطيّ الناتج **يُنصِّف** ∢BAC.
نواصل الطيّ على طول الورقة بأكملها.
نلاحظ أنّ القطعتين AD وَ AE تنطبق إحداهما على الأخرى.



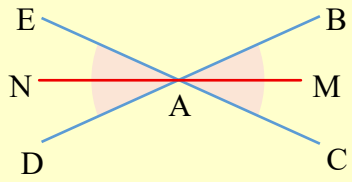
3. عندما نفتح الطيّ، سنلاحظ أنّ خطّ الطيّ **يُنصِّف** أيضًا ∢DAE لأنّ كلًّا من القطعتين AD وَ AE كانت موضوعة على الأخرى. أي، أنّه **ينصِّف كلتا الزاويتين** المتقابلتين بالرأس ∢BAC وَ ∢DAE.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

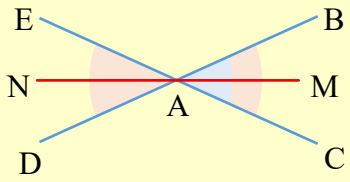
طريقة (ب): بواسطة إعطاء رموز لزوايا

أمامكم الزاويتان المتقابلتان بالرأس $\measuredangle BAC$ وَ $\measuredangle DAE$ المُلوّنتان بالأحمر:



القطعة MN تنصّف $\measuredangle BAC$.

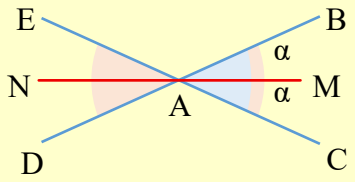
نُبَيّن أنها تنصِّف أيضًا $\measuredangle DAE$ المقابلة لها بالرأس.



الزاويتان $\measuredangle BAM$ وَ $\measuredangle CAM$ متساويتان لأنّ

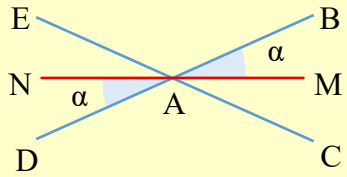
القطعة MN تنصّف $\measuredangle BAC$.

نرمز إلى مقدار الزوايا $\measuredangle BAM$ وَ $\measuredangle CAM$ بـ α.



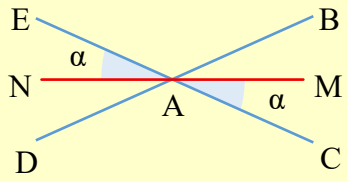
الزاويتان $\measuredangle BAM$ وَ $\measuredangle DAN$ متقابلتان بالرأس، لذلك متساويتان.

وبناءً على ذلك، سنحصل أيضًا على: $\measuredangle DAN = \alpha$.



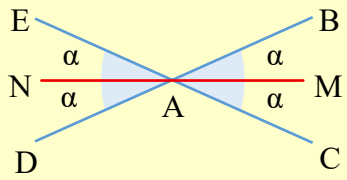
الزاويتان $\measuredangle CAM$ وَ $\measuredangle EAN$ متقابلتان بالرأس، لذلك متساويتان.

وبناءً على ذلك، سنحصل أيضًا على: $\measuredangle EAN = \alpha$.



للتلخيص، حصلنا على: $\measuredangle DAN = \measuredangle EAN = \alpha$.

من هذا يمكننا الاستنتاج أنّ **المستقيم الذي ينصِّف زاوية ما، ينصِّف أيضًا الزاوية المقابلة لها بالرأس.**



ادخلوا الفعّاليّة الرقميّة الظاهرة على اليسار أعلاه. أزيحوا النقاط A، B، C وَ D.

وبعد ذلك أزيحوا النقطة E بحيث إنّ القطعةُ EO تُنصِّف $\measuredangle BOD$.

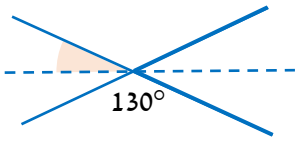
بعد هذه الإزاحة، هل القطعة EF تنصِّف $\measuredangle AOC$؟

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

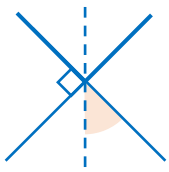
12. في كلّ رسم ثلاثة قطع تتقاطع في نقطة واحدة. الخطّ المُقطِّع يُنَصِّف الزاوية التي ساقاها غامقتان.

احسبوا مقدار الزاوية الحمراء:

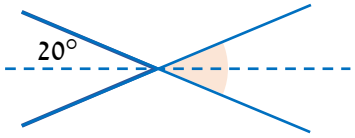
أ.



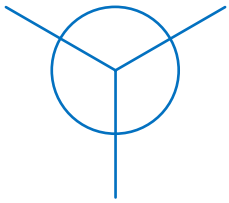
ب.



ج.



13. في الرسم أمامكم زاوية مقدارها 360° مُقَسَّمة إلى 3 زوايا متساوية.



أ. هل يوجد في الرسم زوج من الزوايا المتقابلة بالرأس؟

ب. احسبوا مقدار كلّ زاوية.

ج. زاوية مقدارها 360° قسّمت إلى 6 زوايا متساوية.

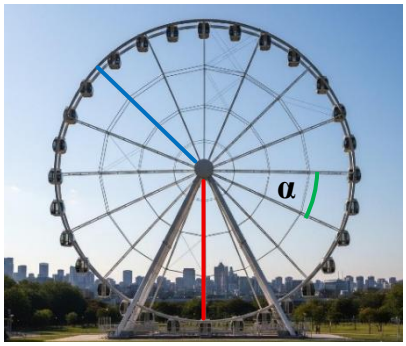
1. ما هو مقدار كلّ زاوية؟
2. هل توجد بين هذه الزوايا زوايا متقابلة بالرأس؟ علِّلوا.

ادخلوا المسابقة الصفّيّة الظاهرة على اليسار:



אאוריקה

14. أمامكم صورة لعجلة كبيرة تحتوي على 16 ذراعًا تربط بين مركز العجلة والإطار الدائريّ المحيط بها.



الزوايا المحصورة بين كلّ ذراعين متجاورتين متساوية ومقدارها α.

أ. جدوا α.

ب. ادّعى شريف: "كلّ ثماني زوايا متجاورة من هذا النوع تُشَكِّل معًا زاوية مستقيمة". هل هو على حقّ؟

ج. هل يمكن الاستنتاج من هذا الادّعاء أنّ هناك أزواجًا من الزوايا المتقابلة بالرأس في الصورة؟ اشرحوا.

د. هل هناك ذراع عموديّة على الذراع الملوّنة باللون الأحمر؟

هـ. ما هو مقدار الزاوية المحصورة بين الذراع الزرقاء والذراع الحمراء؟

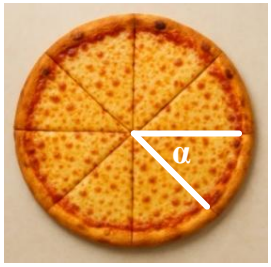
و. في نموذج آخر للعجلة، حيث عدد الأذرع مختلف، الزاوية بين كلّ ذراعين متجاورتين هي 40°. كم ذراعًا توجد في هذا النموذج؟

ز. في نموذج آخر للعجلة يوجد 18 ذراعًا.

1. ما هو مقدار الزاوية بين كلّ ذراعين متجاورتين؟
2. هل يوجد في هذا النموذج ذراعان تعامد إحداهما الأخرى؟ اشرحوا.

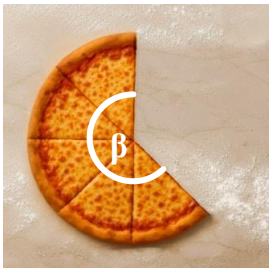
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

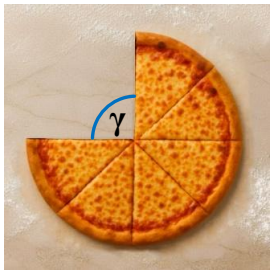
15. يُنتج مطعم بيتزا بيتزات نباتيّة دائريّة الشّكل، ويَقْسِمها إلى قطع متطابقة.
اشترت نغم ثلاث بيتزات، وطلبت تقطيع كلّ واحدة منها إلى 8 قطع.
تظهر على اليسار صورة لإحدى البيتزات، ومُشار فيها إلى زاوية مقدارها α.

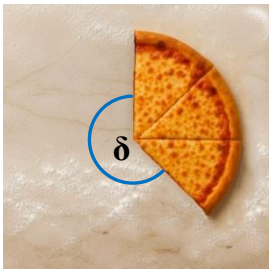


أ. جدوا قيمة α.

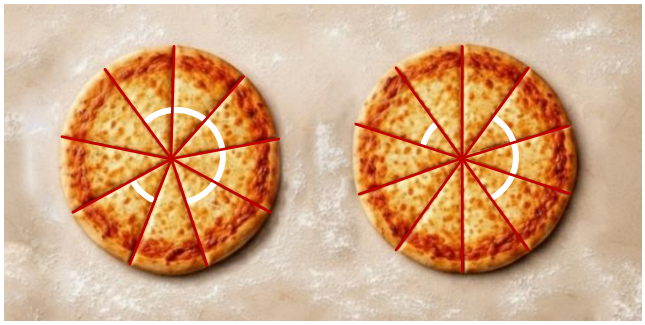
ب. أمامكم صور للبيتزات بعد أن أُكِلَ جزء من القطع.
احسبوا مقادير الزوايا الظاهرة في الصور:







ج. أمامكم بيتزتان قُسِّمتا إلى عدد مختلف من القطع المتطابقة.

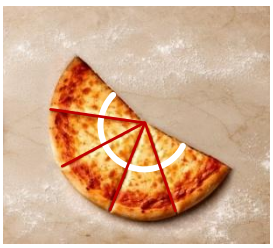


1. احسبوا مقدار الزاوية الصغيرة والزاوية الكبيرة في كلّ بيتزا.
2. استعينوا بخطوط التقطيع بين قطع البيتزا، وحدّدوا لكلّ ادّعاء إن كان صحيحًا أم خطأً:

i. في البيتزا اليمنى يمكن تمييز أزواج من الزوايا المتجاورة.

ii. في البيتزا اليسرى يمكن تمييز أزواج من الزوايا المتقابلة بالرأس.

د. أخذت لميس قطعتين من البيتزا اليمنى وثلاث قطع من البيتزا اليسرى، ووضعتهما متلاصقتين بحيث يكون للزوايا رأس مشترك، كما هو مُبَيَّن في الصورة على اليسار. احسبوا مقدار الزاوية المشار إليها بقوس في الصورة.



هـ. ما هي الزاوية التي كانت ستنتج، لو أنّها وضعت بطريقة مشابهة قطعة واحدة من البيتزا اليمنى، إلى جانب أربع قطع من البيتزا اليسرى؟

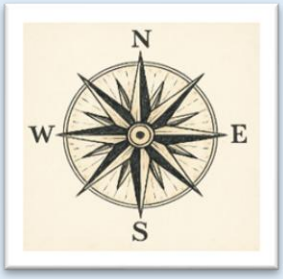
و. (*) جِدوا دمجًا (تركيبة) لعدد من القطع من كلّ بيتزا بحيث تنتج زاوية مقدارها:

1. 112° 2. 220°.

ز. (*) هل يوجد دمج (تركيبة) لعدد من القطع من كلا البيتزتَين بحيث تُكملان معًا بيتزا كاملة؟

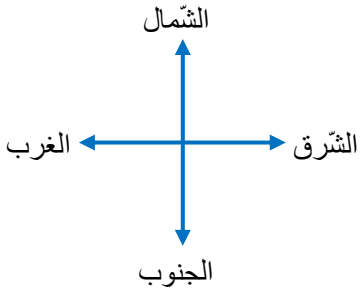
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

ما هي وردة الرياح؟

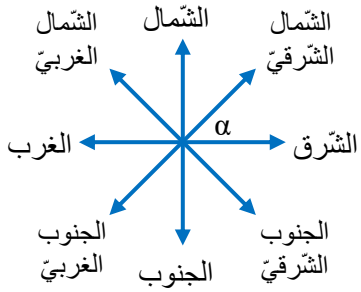


وردة الرياح هي مخطّط بيانيّ يعرض الجهات السماويّة، وهي أداة مِلاحَة قديمة رافقت البشريّة على مدى آلاف السنين. لقد كان تأثيرها كبيرًا جدًا في التاريخ البشريّ، تَطَوُّر التجارة، الاكتشافات الجغرافيّة وعِلْم رسم الخرائط. تمثّل الحروف التي تظهر في الرسم التوضيحيّ على اليسار الجهات السماويّة الأربعة الأصليّة: **North** (شمال)، **East** (شرق)، **South** (جنوب) وَ **West** (غرب). مع ظهور البوصلة، أصبحت وردة الرياح رمزًا ثابتًا ومعياريًّا على الخرائط. حتّى في عصر نظام تحديد المواقع العالميّ (GPS) فإنّها لا تزال تظهر في الخرائط الورقيّة والرقميّة بهدف المساعدة في التوجيه وتحديد الاتّجاهات.

16. اقرؤوا الشرح الوارد في الإطار أعلاه. في وردة الرياح الأساسيّة التي تظهر على اليسار، تظهر الجهات الأربعة الرئيسيّة: الشمال، الشرق، الجنوب والغرب، بحيث إنّ السّهمين **متعامدان**.



في نسخة أكثر توسعًّا لوردة الرياح، والتي تظهر على اليسار، تظهر جهات فرعيّة. الزوايا بين كلّ سهمين متجاورين متساوية ومقدار كلّ منها α.



أ. جدوا قيمة α.

ب. هل السهم الذي يشير إلى جهة الشمال الشرقي؛ يعامد السهم الذي يشير إلى جهة الشمال الغربي؟

ج. احسبوا مقدار الزاوية التي بين السهم الذي يشير:

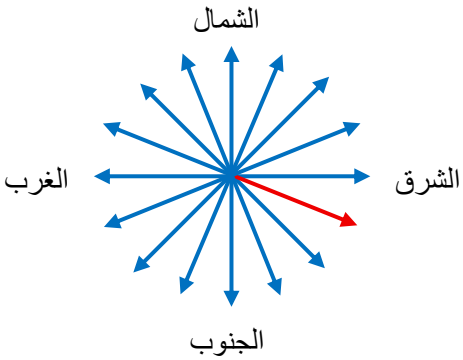
1. إلى الشرق، والسهم الذي يشير إلى جهة الشمال الغربيّ.
2. إلى الجنوب الغربيّ والسهم الذي يشير إلى جهة الشمال الشرقيّ.

د. أسهم أيّ مِنَ الجهات تصنع زاوية قائمة مع السهم الذي يشير إلى جهة الجنوب الشرقيّ؟

هـ. يظهر على اليسار نسخة موسّعة من وردة الرياح، وتظهر فيها جهات فرعيّة إضافيّة بحيث تتكوّن من 16 سهمًا.

الزوايا بين كلّ سهمين متجاورين متساوية،

احسبوا مقدار كلّ منها.



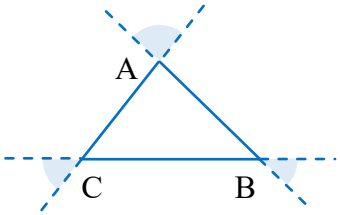
و. يشير السهم الأحمر إلى جهة شرق- جنوب. احسبوا مقدار الزاوية المنفرجة بين هذا السهم والسهم الذي يشير إلى اتّجاه: 1. الغرب. 2. الشمال.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

إجابات:

1) i، iii، vi، viii. **2)** إجابة ممكنة: ∢AOH وَ ∢EOD، ∢BOC وَ ∢FOG، ∢HOG وَ ∢COD.

3) الزوايا الزرقاء في الرسم على اليسار.



4) أ. **1.** متقابلتان بالرأس. **2.** متساويتان. **ب. 1.** متقابلتان بالرأس. **2.** متساويتان.
د. كلّ زاوية من الزوايا الزرقاء تُكَمِّل α إلى 180° ولذلك متساويتان.

5) أ. $\alpha = 50°$. **ب.** $\alpha = 120°$. **ج.** $\alpha = 100°$. **د.** $\alpha=150°$، $\beta=30°$، $\gamma=150°$.
هـ. $\alpha=40°$، $\beta=140°$، $\gamma=40°$. **و.** $\alpha=160°$، $\beta=20°$، $\gamma=160°$. **6)** 280°.

7) إجابات ممكنة: أ. ∢BEC وَ ∢AED. **ب.** ∢AEB وَ ∢AED. **ج.** $AEB = 95°$∢ وَ $DEC = 95°$∢، $AED = BEC = 85°$∢.

8) أ. إجابة ممكنة: ∢AMB و ∢AME، ∢BMF وَ ∢EMF.
ب. إجابة ممكنة: ∢DMC و ∢AMF، ∢AMB وَ ∢DME.
ج. نعم. في مثل هذه الحالة، نعرف أيضًا مقدار الزاوية ∢EMD المقابلة بالرأس للزاوية ∢AMB. نطرح الزوايا المعروفة ∢EMF وَ ∢EMD من الزاوية المستقيمة ∢FMC، فنحصل على مقدار الزاوية ∢DMC.
د. 1. 70°. **2.** نعم. الزوايا ∢DMC وَ ∢EMD مقدارهما 70°، لذلك DM تُنَصِّف الزاوية ∢CME.

9) أ. لبيب على خطأ. الزوايا المتقابلة بالرأس تنتج عندما تتقاطع قطعتان مستقيمتان. إذا لم يكن معلومًا أنّ القطعتين DE وَCE تقعان على مستقيم واحد، وأنّ القطعتين AE وَ BE تقعان أيضًا على مستقيم واحد، فلا يمكن الجزم بأنّهما متقابلتان بالرأس. **ب. 1.** الزاوية ∢CED ليست مستقيمة، لذلك فإنّ القطعتين DE وَ CE لا تقعان على نفس المستقيم. **2.** تتشكّل الزوايا المتقابلة بالرأس فقط عندما يتقاطع مستقيمان، لذلك ليستا متقابلتين بالرأس.

10) أ. $\alpha=35°$، $\beta=40°$، $\gamma=105°$. **ب.** $\alpha = 80°$، $\beta=40°$، $\gamma=60°$. **ج.** $\alpha=25°$، $\beta=65°$، $\gamma=90°$.

11) أ. نعم. **ب. 1.** $\alpha = 55°$، $\beta = 55°$. **2.** نعم. **ج. 1.** نعم. **2.** إجابة ممكنة: كلّ زاوية 60°؛ القطعة الحمراء تُنَصِّف الزاوية. **12)** أ. 25°. **ب.** 45°. **ج.** 40°.

13) أ. كلّا. **ب.** 120°. **ج. 1.** 60°. **2.** نعم. كلّ ثلاث زوايا متجاورة تُشكّل زاوية مستقيمة، وهكذا نحصل على ثلاث قطع مستقيمة تتقاطع في الرأس المشترك للزوايا السّت، وتُشكّل أزواجًا من الزوايا المتقابلة بالرأس.

14) أ. 22.5°. **ب.** شريف على حقّ. **ج.** نعم. كلّ ثماني زوايا متجاورة تشكّل زاوية مستقيمة، وهكذا نحصل على ثماني قطع مستقيمة تتقاطع في الرأس المشترك للـ 16 زاوية، وهي تُشكّل أزواجًا من الزوايا المتقابلة بالرأس.
د. نعم. الذراع التي تبعد 4 مواضع مع أو عكس اتّجاه عقارب الساعة بالنسبة للذراع الحمراء، تُشكّل معها زاوية مقدارها $4 \cdot 22.5° = 90°$، ولذلك متعامدتان. **هـ.** 135°. **و.** 9 أذرع. **ز. 1.** 20°. **2.** كلّا. لا يمكن الوصول إلى 90° عن طريق قفزات متساوية بمقدار 20°، ولذلك لا يوجد ذراعان الزاوية بينهما 90°.

15) أ. 45°. **ب.** $\beta = 225°$، $\gamma = 90°$، $\delta = 225°$. **ج. 1.** اليمنى: الصغيرة 36°، الكبيرة 108°؛ اليسرى: الصغيرة 40°، الكبيرة: 200°. **2. i.** صحيح. **ii.** خطأ. **د.** 192°. **هـ.** 196°. **و. 1.** قطعتان من اليمنى وواحدة من اليسرى. **2.** خمس قطع من اليمنى وواحدة من اليسرى. **ز.** لا توجد.

16) أ. 45°. **ب.** نعم. **ج. 1.** 135°. **2.** 180°. **د.** الشمال الشرقيّ والجنوب الغربيّ. **هـ.** 22.5°. **و. 1.** 157.5°. **2.** 112.5°.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون