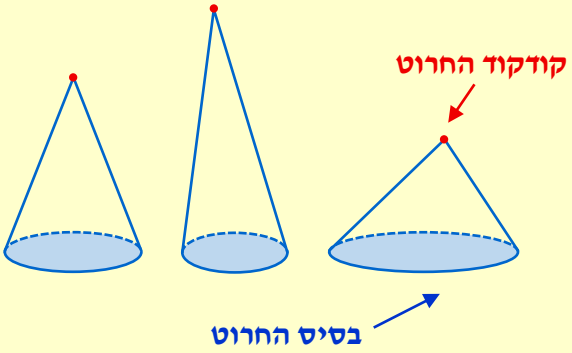
חרוט

מהו חרוט?

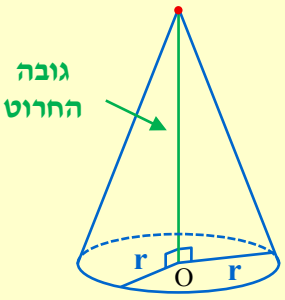
חרוט הוא גוף המורכב מעיגול, מנקודה שמחוץ למישור העיגול, ומכל הקטעים המחברים את הנקודה עם כל הנקודות שעל היקף העיגול.



הנקודה נקראת **קודקוד החרוט**,
העיגול נקרא **בסיס החרוט**,
והקטעים שהוזכרו בהגדרה יוצרים את **מעטפת החרוט**.

משמאל מופיעים חרוטים שונים.

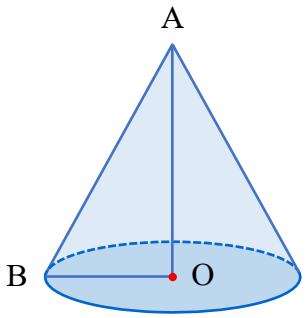
בפרק זה נעסוק ב**חרוט ישר**.
משמאל מופיע שרטוט של חרוט ישר שמרכז הבסיס שלו בנקודה O.



בחרוט ישר הקטע המחבר את קודקוד החרוט עם מרכז הבסיס מאונך לבסיס. קטע זה הוא **גובה החרוט**.

גובה החרוט מאונך לכל רדיוס של בסיס החרוט.
בשרטוט משמאל מסומנים שני רדיוסים בבסיס החרוט, והזווית הישרה שבין גובה החרוט לבין כל רדיוס.

1. לפניכם חרוט ישר שמרכז הבסיס שלו בנקודה O.



א. איזו מהנקודות הבאות היא קודקוד החרוט?
i. A ii. B iii. O

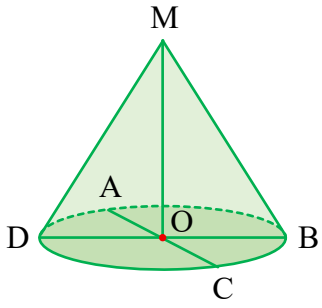
ב. איזה מהקטעים הבאים הוא רדיוס בסיס החרוט?
i. AO ii. BO iii. AB

ג. איזה מהקטעים הבאים הוא גובה החרוט?
i. AO ii. BO iii. AB

ד. איזה מהקטעים הבאים נמצא על מעטפת החרוט?
i. AO ii. BO iii. AB

© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס**

2. לפניכם שרטוט של חרוט ישר שמרכז הבסיס שלו בנקודה O.



א. איזו מהאותיות שבשרטוט מסמנת את קודקוד החרוט?

ב. קבעו איזה מהקטעים הבאים הוא גובה החרוט:

i. BM ii. DM iii. MO

ג. הנקודות A, B, C ו־D נמצאות על היקף הבסיס של החרוט.

1. ציינו שני רדיוסים הנמצאים על בסיס החרוט.

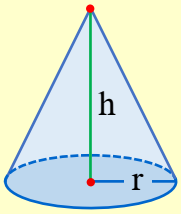
2. ציינו משולש ישר זווית המופיע בשרטוט.

נפח חרוט

נפח חרוט שווה לשליש מכפלת **שטח הבסיס** שלו ב**גובה** שלו.

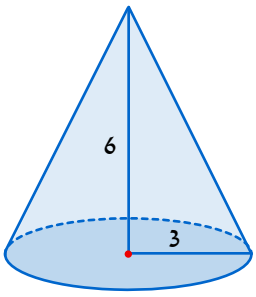
נפח חרוט שאורך רדיוס בסיסו r וגובהו h מתקבל מהנוסחה: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

נזכיר שנפח נמדד ביחידות כמו: סמ"ק (סנטימטר מעוקב), מ"ק (מטר מעוקב) וכך הלאה.

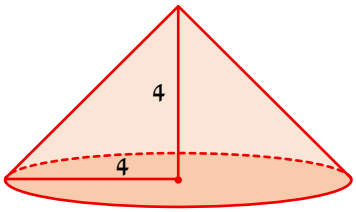


3. בכל סעיף מופיע חרוט ישר. גובהו ואורך רדיוס הבסיס נתונים בס"מ. חשבו את הנפח של כל חרוט:

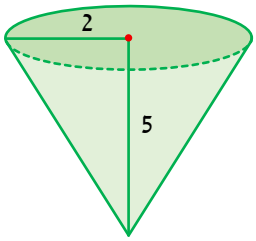
א.



ב.



ג.



4. בכל סעיף חשבו את נפחו של חרוט ישר לפי הנתונים:

א. אורך קוטר הבסיס הוא 8 ס"מ וגובה החרוט הוא 3 ס"מ.

ב. היקף הבסיס הוא 18π ס"מ וגובה החרוט הוא 5 ס"מ.

5. הציעו אורך רדיוס בסיס וגובה של חרוט ישר **משלכם**, וחשבו את נפחו.

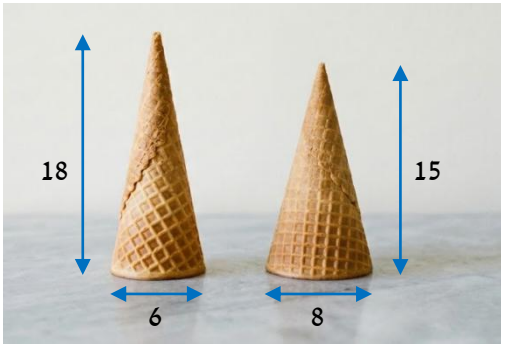
6. נתון חרוט ישר שנפחו 20π סמ"ק. הציעו אורכים מתאימים **משלכם** לרדיוס הבסיס ולגובה החרוט.

© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס**

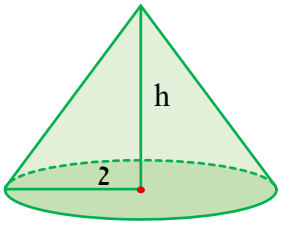
7. לפניכם אריזה שקופה בצורת גליל שבתוכה שוקולד בצורת חרוט ישר.
בסיס החרוט הוא הבסיס התחתון של הגליל.
קודקוד החרוט נמצא במרכז הבסיס העליון של הגליל.
רוני טענה: "נפח הגליל גדול פי 3 מנפח החרוט."
א. האם היא צודקת? הסבירו.
ב. נתון שאורך רדיוס הבסיס של החרוט הוא 3 ס"מ, וגובה האריזה הוא 6 ס"מ. מהו נפח השוקולד?
ג. הציעו **שתי דרכים** לחשב את נפח האריזה, וחשבו אותו.



8. בעל גלידרייה מתלבט בין שני גביעים בצורת חרוט ישר המופיעים משמאל.
הגובה ואורך קוטר הבסיס של הגביעים נתונים בס"מ.
הוא מעוניין בגביע שהנפח שלו הוא הגדול יותר.
באיזה גביע - הימני או השמאלי - תמליצו לו לבחור?
הסבירו.



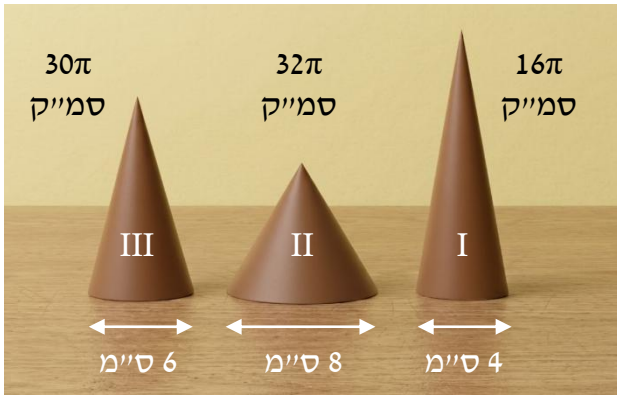
9. לפניכם חרוט ישר שאורך רדיוס בסיסו 2 ס"מ, גובהו h ס"מ ונפחו 4π סמ"ק.
ניתאי רצה למצוא את h בעזרת הנוסחה לנפח חרוט.
בעזרת הנתונים הוא כתב את המשוואה: $\frac{\pi \cdot 2^2 \cdot h}{3} = 4\pi$.
א. האם המשוואה מתאימה? הסבירו.
ב. ניתאי הציג את הפתרון:



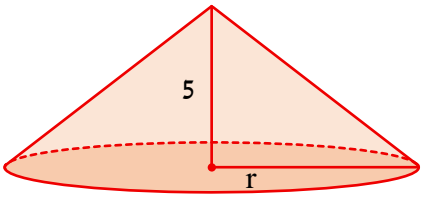
$$\frac{\pi \cdot 2^2 \cdot h}{3} = 4\pi \quad / \cdot 3$$
$$4\pi h = 12\pi \quad / : 4\pi$$
$$h = 3$$

בדקו אם דרך הפתרון שלו נכונה.

ג. לפניכם השוקולדים I, II, III בצורת חרוט ישר.
אורך קוטר הבסיס של כל שוקולד נתון בס"מ.
נתון הנפח של כל שוקולד.
היעזרו בסעיפים הקודמים,
וחשבו את הגובה של כל שוקולד.



10. לפניכם חרוט ישר שגובהו 5 ס"מ, אורך רדיוס בסיסו r ס"מ ונפחו 60π סמ"ק.



יערה רצתה למצוא את r בעזרת הנוסחה לנפח חרוט.

בעזרת הנתונים היא כתבה את המשוואה: $\frac{\pi r^2 \cdot 5}{3} = 60\pi$.

א. האם המשוואה מתאימה? הסבירו.

ב. יערה הציגה את הפתרון:

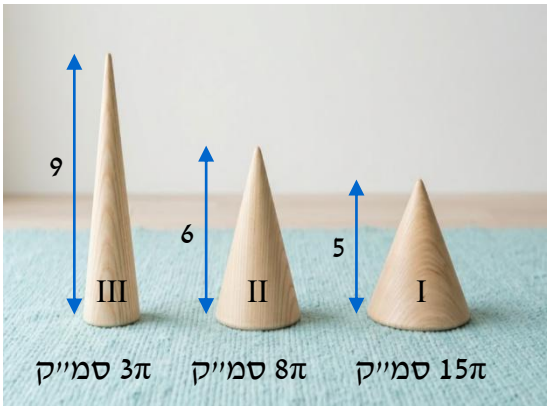
$$\frac{\pi r^2 \cdot 5}{3} = 60\pi \quad / \cdot 3$$

$$5\pi r^2 = 180\pi \quad / : 5\pi$$

$$r^2 = 36 \quad \rightarrow \quad r = 6$$

בדקו אם דרך הפתרון שלה נכונה.

ג. לפניכם חרוטי העץ הישרים I, II ו־III.



הגובה של כל חרוט נתון בס"מ.

בנוסף נתון הנפח של כל חרוט.

היעזרו בסעיפים הקודמים,

וחשבו את אורך רדיוס הבסיס של כל חרוט.

היכנסו לפעילות הדיגיטלית המופיעה משמאל:

11. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה לגבי חרוט ישר:

i. אם נגדיל את גובהו פי 3, נפחו יגדל פי 9.

ii. אם נגדיל את אורך רדיוס הבסיס שלו פי 4, נפחו יגדל פי 16.

iii. אם נגדיל את גובהו פי 5, ונקטין את אורך רדיוס בסיסו פי 5, נפחו לא ישתנה.

12. בתמונה מופיעים שני נרות בצורת חרוט ישר.



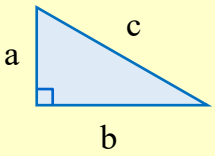
הנר הימני **גבוה** פי 2 מהשמאלי, אך קוטר הבסיס שלו **קטן** פי 2.

א. לאיזה נר - הגבוה או הנמוך - יש נפח גדול יותר?

ב. נתון שמחיר הנר הגבוה הוא 20 ש"ח ומחיר הנר הנמוך הוא 30 ש"ח.
איזה נר תמליצו לקנות כך שהמחיר ליחידת נפח יהיה הנמוך ביותר?
הסבירו.

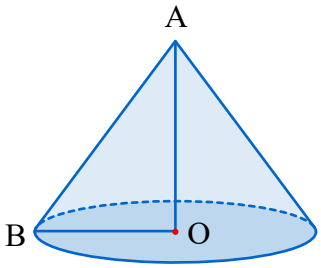
© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס**

תזכורת! משפט פיתגורס



במשולש ישר זווית שבו אורכי הניצבים הם a ו־b,
ואורך היתר הוא c, מתקיים: $a^2+b^2=c^2$.

13. לפניכם חרוט ישר שקודקודו בנקודה A ומרכז הבסיס שלו בנקודה O.



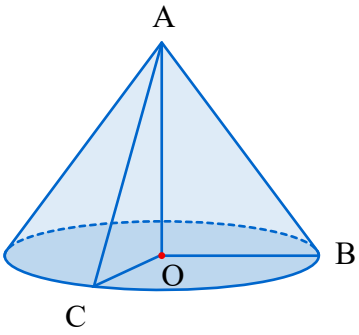
הנקודה B נמצאת על היקף הבסיס.

א. מהו גודל הזווית $\sphericalangle AOB$?

ב. נתון: $AB=10$ ס״מ. אורך רדיוס הבסיס הוא 6 ס״מ.

1. האם ניתן להשתמש במשפט פיתגורס במשולש ΔABO? הסבירו.
2. חשבו את גובה החרוט.
3. חשבו את נפח החרוט.

14. לפניכם חרוט ישר שקודקודו בנקודה A ומרכז הבסיס שלו בנקודה O.



הנקודות B ו־C נמצאות על היקף הבסיס.

א. מהו גודל הזווית: 1. $\sphericalangle AOB$? 2. $\sphericalangle AOC$?

ב. נתון: $AB=17$ ס״מ. אורך רדיוס הבסיס הוא 8 ס״מ.
חשבו את גובה החרוט.

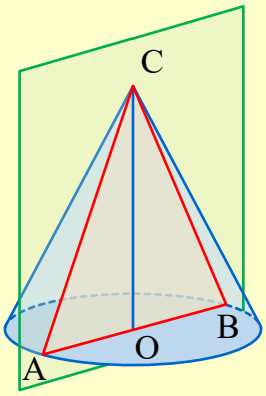
ג. גל טען: ״הנתונים אינם מספיקים לחישוב אורך הקטע AC.״
האם הוא צודק?
אם כן, קבעו איזה נתון נוסף נדרש. אם לא, חשבו את אורך הקטע AC.

מהו מקור המילה חָרוּט?



בחיבורים מתמטיים עבריים מימי הביניים לא היה מונח קבוע לגוף הגאומטרי הקרוי כיום חרוט, ולכן השתמשו בתיאורים כגון ״גוף שמתחיל בבסיס עגול ומסתיים בנקודה״. עם תחיית הלשון העברית בעת החדשה נקלט השם ׳חָרוּט׳, שנבחר בהשראת הערבית מַחְרוּט (مَخْرُوط) - מונח גאומטרי שפירושו גוף מחודד. התאמתו של השם לשורש העברי ח־ר־ט, הקשור לחריטה ולגילוף, סייעה לקליטתו בעברית החדשה.

חתך צירי של חרוט ישר



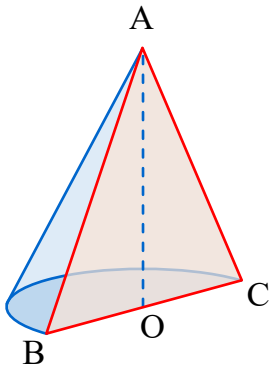
בשרטוט מופיע חרוט ישר כחול. קודקוד החרוט בנקודה C,
מרכז הבסיס בנקודה O והקטע AB הוא קוטר בבסיס.

חתך צירי של חרוט ישר הוא הצורה המתקבלת מחיתוך
החרוט על ידי מישור העובר דרך קודקוד החרוט ודרך
מרכז בסיסו. כך המישור מחלק את החרוט לשני גופים זהים.

בשרטוט משמאל המלבן הירוק מייצג את המישור החותך,
והחתך הצירי המתקבל הוא המשולש ΔABC האדום.

חתך צירי של חרוט ישר הוא משולש שווה שוקיים שקודקוד הראש שלו הוא קודקוד החרוט (הקודקוד C בשרטוט), והבסיס שלו הוא קוטר של בסיס החרוט (הקוטר AB בשרטוט).
גובה החרוט CO הוא גם הגובה לבסיס AB במשולש שווה שוקיים זה.
נציין שלכל חרוט ישר יש אין־סוף חתכים ציריים, כולם משולשים שווי שוקיים וכולם חופפים.

15. חרוט ישר שהקודקוד שלו הוא A ומרכז הבסיס שלו בנקודה O,
נחתך על ידי מישור לשני גופים זהים.
אחד מהגופים מופיע בשרטוט משמאל.
המשולש ΔABC הוא חתך צירי של החרוט.



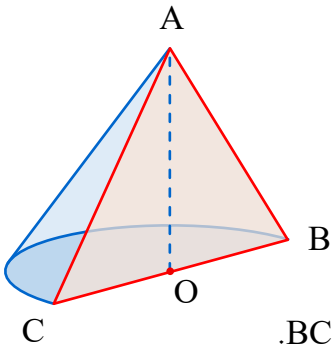
א. מהן השוקיים השוות של החתך הצירי של החרוט?
i. AO ו־AB ii. AO ו־AC iii. AB ו־AC

ב. האם הקטע AO הוא הגובה לבסיס במשולש ΔABC?

ג. מהו גודל הזווית $\sphericalangle AOB$?

© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס**

16. חרוט ישר שהקודקוד שלו הוא A ומרכז הבסיס שלו בנקודה O, נחתך על ידי מישור לשני גופים זהים. אחד מהגופים מופיע בשרטוט משמאל.
המשולש ΔABC הוא חתך צירי של החרוט. נתון: 8 ס"מ $= AB$.



א. האם לפי הנתונים ניתן לקבוע מהו אורכו של קטע נוסף בשרטוט? הסבירו.

ב. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה. הסבירו:

i. אם היה ידוע שטח בסיס החרוט **השלם**, יכולנו לחשב את אורך הקטע BC.

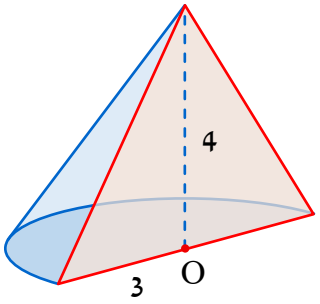
ii. אם היה ידוע גובה החרוט, יכולנו לחשב את אורך הקטע BC.

ג. נתון שהיקף בסיס החרוט **השלם** הוא 8π ס"מ. חשבו את אורך הקטע BC.

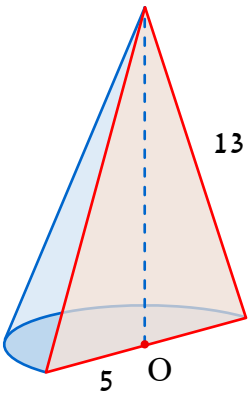
ד. היעזרו בסעיף ג', וקבעו אם ניתן למצוא את גודל הזוויות במשולש ΔABC. הסבירו.

17. בסעיפים הבאים צבוע באדום חתך צירי של חרוט ישר שמרכז בסיסו בנקודה O.
האורכים נתונים בס"מ. בכל סעיף חשבו את שטח החתך הצירי:

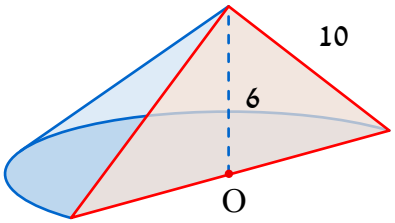
א.



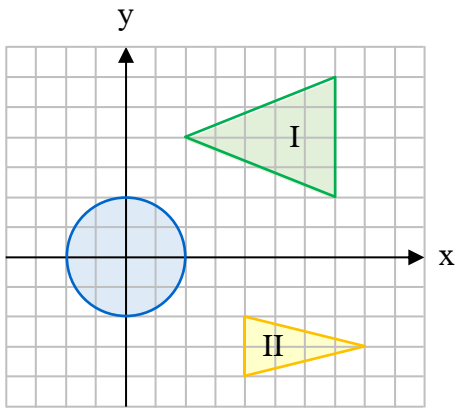
ב.

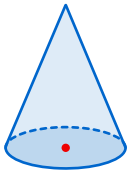


ג.



18. לפניכם חרוט ישר.
במערכת הצירים מופיע עיגול שמרכזו בראשית, והוא מייצג את בסיס החרוט. במערכת הצירים מופיעים גם המשולשים שווי השוקיים א' ו-ב' ש**אחד מהם** הוא חתך צירי של חרוט זה.
אורך הצלע של כל משבצת מייצג 1 ס"מ.



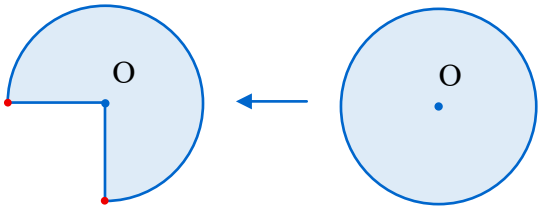


א. איזה מהמשולשים - I או II - הוא החתך המתאים? הסבירו.

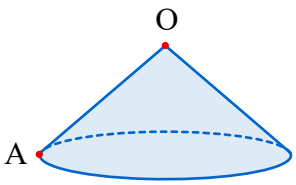
ב. היעזרו במערכת הצירים, וחשבו את:

1. גובה החרוט. 2. נפח החרוט.

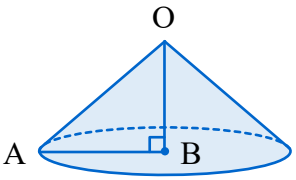
19. (*) נתון נייר בצורת עיגול שרדיוסו 20 ס"מ
ומרכזו בנקודה O.
יותם גזר ממנו רבע עיגול, כמתואר משמאל.



יותם הצמיד את שני הרדיוסים המופיעים בשרטוט זה לזה,
כך שהנקודות האדומות התלכדו בנקודה A.
בדרך זו התקבל כובע נייר בצורת חרוט ישר המצויר משמאל.



א. היעזרו ב־π, ומצאו את היקף בסיס החרוט.
ב. חשבו את אורך רדיוס בסיס החרוט.
ג. משמאל מופיע שרטוט של אותו חרוט. מרכז הבסיס בנקודה B.



1. מהו אורך הקטע AO?
2. היעזרו במשפט פיתגורס, וחשבו את גובה החרוט.
3. חשבו את נפח החרוט.
4. חשבו את שטח החתך הצירי של החרוט.

תשובות:

1) א. i. **ב.** ii. **ג.** i. **ד.** iii.

2) א. M. **ב.** iii. **ג. 1.** תשובות אפשריות: AO, BO, CO, DO.
2. תשובות אפשריות: המשולשים ΔMOB ו־ΔMOD.

3) א. 18π סמ"ק. **ב.** $21\frac{1}{3}\pi$ סמ"ק. **ג.** $6\frac{2}{3}\pi$ סמ"ק.

4) א. 16π. **ב.** 135π.

5) תשובות אפשריות: עבור 3 ס"מ $r=$ ו־2 ס"מ $h=$ נפח החרוט יהיה 6π סמ"ק;
עבור 5 ס"מ $r=$ ו־12 ס"מ $h=$ נפח החרוט יהיה 100π סמ"ק.

6) תשובות אפשריות (בס"מ): $h=15$, $r=2$; $h=60$, $r=1$.

7) א. רוני צודקת. הביטויים האלגבריים המייצגים נפח של גליל ושל חרוט שאורך רדיוס הבסיס שלהם r
והגובה שלהם h הם בהתאמה: $\pi r^2 h$ ו־$\frac{1}{3}\pi r^2 h$. ניתן לראות שכאשר אורך רדיוס הבסיס והגובה
זהים, נפח הגליל גדול בדיוק פי 3 מנפח החרוט. **ב.** 18π סמ"ק. **ג.** הנפח הוא 54π סמ"ק.
דרך א': ניתן לכפול את נפח החרוט ב־3;
דרך ב': ניתן להציב את אורך הרדיוס הנתון ואת הגובה בנוסחה לחישוב נפח גליל.

© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס**

8) הגביע הימני. נפח החרוט הימני הוא 80π סמ"ק ואילו נפח החרוט השמאלי הוא 54π סמ"ק.

9) א. המשוואה מתאימה. ניתאי הציב את הרדיוס הנתון בנוסחה לנפח חרוט, והשווה לנפח הנתון.

ב. דרך הפתרון נכונה. **ג.** I: 12 ס"מ; II: 6 ס"מ; III: 10 ס"מ.

10) א. המשוואה מתאימה. יערה הציבה את הגובה הנתון בנוסחה לנפח חרוט, והשוותה לנפח הנתון.

ב. דרך הפתרון נכונה. **ג.** I: 3 ס"מ; II: 2 ס"מ; III: 1 ס"מ.

11) i. שגויה. **ii.** נכונה. **iii.** שגויה.

12) א. הנר הנמוך. **ב.** הנר הנמוך. הסבר: נפח הנר הנמוך גדול **פי 2** מנפח הנר הגבוה, כלומר נר נמוך אחד שקול לשני נרות גבוהים. למרות זאת המחיר של נר נמוך אחד קטן ממחירם של שני נרות גבוהים, ולכן אם מעוניינים במחיר הנמוך בעבור יחידת נפח, יש לבחור את הנר הנמוך.

13) א. $90°$. **ב. 1.** כן. המשולש ישר זווית. **2.** 8 ס"מ. **3.** 96π סמ"ק.

14) א. 1. $90°$. **2.** $90°$. **ב.** 15 ס"מ. **ג.** 17 ס"מ $= AC$. גל טועה. אורך הרדיוס נתון, וניתן לחשב את אורך היתר בעזרת משפט פיתגורס.

15) א. iii. **ב.** כן. **ג.** $90°$.

16) א. כן, החתך הצירי הוא המשולש שווה השוקיים ΔABC ולכן $AC = AB$, כלומר 8 ס"מ $= AC$.

ב. i. הטענה נכונה. בעזרת הנוסחה לשטח עיגול יכולנו לחשב את אורך רדיוס הבסיס, ובעזרתו לחשב את אורך הקוטר BC. **ii.** הטענה נכונה. הגובה AO מאונך לקטע BO, ולכן המשולש ΔABO ישר זווית וניתן לחשב את אורך הקוטר BC בעזרת משפט פיתגורס. **ג.** 8 ס"מ.

ד. כן. מצאנו שהמשולש ΔABC, שהוא החתך הצירי של החרוט, הוא שווה צלעות, ומכך ניתן להסיק שכל אחת מהזוויות שלו היא בת $60°$.

17) א. 12 סמ"ר. **ב.** 60 סמ"ר. **ג.** 48 סמ"ר.

18) א. משולש I. החתך הצירי של חרוט ישר הוא משולש שווה שוקיים שאורך צלע הבסיס שלו שווה לאורך הקוטר של בסיס החרוט. בבסיס החרוט שמופיע במערכת הצירים אורך הקוטר הוא 4, ולכן רק משולש I מתאים. **ב. 1.** 5 ס"מ. **2.** $6\frac{2}{3}\pi$ סמ"ק.

19) א. 30π ס"מ. **ב.** 15 ס"מ. **ג. 1.** 20 ס"מ. **2.** $\sqrt{175}$ ס"מ. **3.** 992.16π סמ"ק. **4.** 198.43 סמ"ר.

© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס**