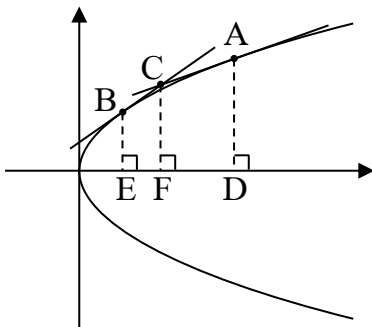


**פתרון מלא - מבחן 6****שאלה 1**

א. ראשית נמצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ניתן לראות כי נקודה B נמצאת משמאל לנקודה A מכיוון שהשיפוע גדול יותר מ-2 כאשר  $4 < p$ . למציאת הנקודות נשתמש במשוואה

$$yy_0 = p(x + x_0) \text{ של המשיק לפרבולה:}$$

לאחר פתיחת סוגריים וסידור המשוואה נקבל את משוואת המשיק:

$$y = \frac{p}{y_0}x + \frac{p}{y_0}x_0. \text{ ניתן לראות שהמקדם של } x \text{ הוא שיפוע הישר: } \frac{p}{y_0}.$$

$$\text{השיפוע בנקודה A הוא 2. כלומר: } \frac{p}{y_A} = 2 \text{ ולכן: } y_A = \frac{p}{2}.$$

$$\text{לאחר הצבת שיעורי y במשוואת הפרבולה נקבל: } A\left(\frac{p}{8}, \frac{p}{2}\right).$$

$$\text{השיפוע בנקודה B הוא } \frac{p}{2}. \text{ כלומר: } \frac{p}{y_B} = \frac{p}{2} \text{ ולכן: } y_B = 2.$$

$$\text{לאחר הצבת שיעורי y במשוואת הפרבולה נקבל: } B\left(\frac{2}{p}, 2\right).$$

כעת נמצא את הנקודה C באמצעות החיתוך שבין שני המשיקים בנקודות A ו-B:

$$\text{נמצא את משוואת המשיק בנקודה A: } y - \frac{p}{2} = 2\left(x - \frac{p}{8}\right) \text{ ולאחר סידור איברים: } y = 2x + \frac{p}{4}.$$

$$\text{נמצא את משוואת המשיק בנקודה B: } y - 2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{2}{p}\right) \text{ ולאחר סידור איברים: } y = \frac{p}{2}x + 1.$$

נשווה בין שני המשיקים:

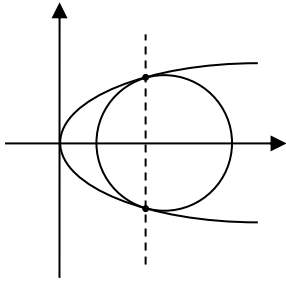
$$\frac{p}{2}x + 1 = 2x + \frac{p}{4} \rightarrow 2px + 4 = 8x + p \rightarrow 2px - 8x = p - 4 \rightarrow 2(p - 4)x = p - 4 \xrightarrow{4 < p} x_c = \frac{1}{2}$$

$$\text{על ידי הצבה של ערך } x \text{ באחת ממשוואות המשיקים נקבל את ערך } y_c = \frac{p}{4} + 1.$$

$$\text{שיעורי נקודה C הם: } C\left(\frac{1}{2}, \frac{p}{4} + 1\right). \text{ נתון שהנקודה C נמצאת על הישר } y = 6x.$$

$$\text{נציב את שיעוריה במשוואת הישר: } \frac{p}{4} + 1 = 6 \cdot \frac{1}{2} \text{ ונקבל: } p = 8.$$

$$\text{לכן משוואת הפרבולה היא: } y^2 = 16x.$$



ב. משוואת המעגל הנתון היא:  $(x-a)^2 + y^2 = 144$  ומשוואת הפרבולה היא:  $y^2 = 16x$ . בשרטוט ניתן לראות כי מעגל כזה משיק לפרבולה בשתי נקודות בעלי שיעור  $x$  זהה. לכן, אם נשווה את משוואת המעגל ואת משוואת הפרבולה נצפה לקבל עבור  $x$  פתרון אחד בלבד.

נציב במשוואת המעגל את  $y^2 = 16x$  ונקבל:  $(x-a)^2 + 16x = 144$ .

לאחר פתיחה וסידור נקבל משוואה ריבועית פרמטרית:  $x^2 + (16-2a)x + a^2 - 144 = 0$ .

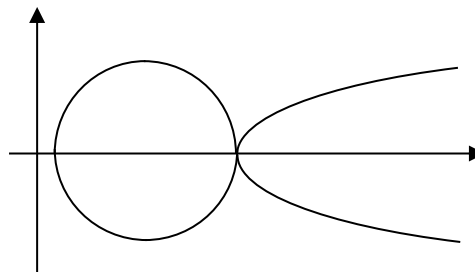
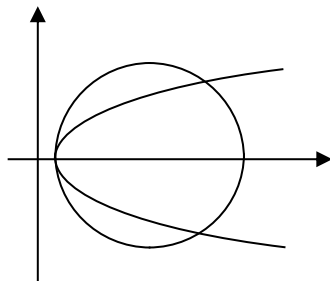
זו משוואה ריבועית שניתן לפתור באמצעות נוסחת השורשים. על מנת שיהיה למשוואה פתרון אחד בלבד, נדרוש שהביטוי מתחת לשורש ( $\Delta$ ) בנוסחת השורשים, ישתוו ל-0:

$$\Delta = 0 \rightarrow (16-2a)^2 - 4(a^2 - 144) = 0 \rightarrow 256 - 64a + 4a^2 - 4a^2 + 576 = 0 \rightarrow -64a = -832 \rightarrow a = 13$$

משוואת המעגל המתקבלת היא:  $(x-13)^2 + y^2 = 144$ .

ג. מזיזים את הפרבולה ימינה כך שהיא משיקה למעגל.

בשרטוטים המצורפים ניתן לראות כי יתכנו שני מצבי השקה, בנקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $x$ :



נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $x$  על ידי הצבת  $y = 0$  במשוואת המעגל:

$$(x-13)^2 + 0^2 = 144 \rightarrow (x-13)^2 = 144 \rightarrow x^2 - 26x + 169 = 144 \rightarrow x^2 - 26x + 25 = 0$$

פתרונות המשוואה הם:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 25$ .

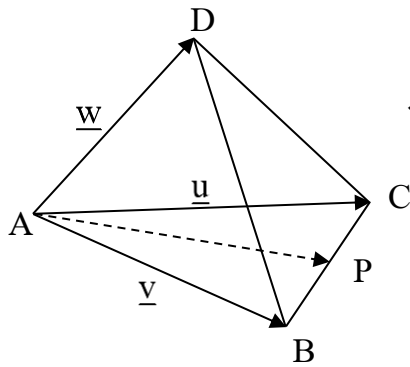
כלומר, נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $x$  הן:  $(1, 0)$  ו- $(25, 0)$ .

כדי שהפרבולה  $y^2 = 16x$  תשיק למעגל בנקודות אלו, יש לבצע הזזה אופקית של הפרבולה לכיוון ימין:

כאשר נזיז את הפרבולה יחידה אחת ימינה תתקבל הפרבולה:  $y^2 = 16(x-1)$ .

כאשר נזיז את הפרבולה 25 יחידות ימינה תתקבל הפרבולה:  $y^2 = 16(x-25)$ .

## שאלה 2



בפירמידה הנתונה נסמן:  $\vec{AB} = \underline{v}$ ,  $\vec{AD} = \underline{w}$ ,  $\vec{AC} = \underline{u}$ .

הבסיס  $\triangle ABC$  הוא משולש שווה צלעות ולכן:  $|\underline{u}| = |\underline{v}|$  ו- $\angle(\underline{u}, \underline{v}) = 60^\circ$ .

נתון:  $\angle DAB = 120^\circ$ ,  $\angle DAC = 53.13^\circ$  ולכן:  $\angle(\underline{u}, \underline{w}) = 53.13^\circ$ .

ו- $\angle(\underline{w}, \underline{v}) = 120^\circ$ .

א. תחילה נביע את הווקטור  $\vec{BC}$ :

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC} = -\underline{v} + \underline{u}$$

נתון ש-P נמצאת על  $\vec{BC}$  או על המשכו כך שמתקיים  $\vec{BP} = t \cdot \vec{BC}$ , ולכן נוכל להביע את  $\vec{AP}$  באופן הבא:

$$\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = \vec{AB} + t \cdot \vec{BC} = \underline{v} + t \cdot (-\underline{v} + \underline{u}) = \underline{v} - t \cdot \underline{v} + t \cdot \underline{u} = (1-t) \cdot \underline{v} + t \cdot \underline{u}$$

ב. נסמן ב- $\alpha$  את הזווית השווה שהווקטור  $\vec{AP}$  יוצר עם הווקטורים  $\vec{AC}$  ו- $\vec{AD}$  ונחשב את שתי המכפלות הסקלריות הבאות:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{AP} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AP}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{[(1-t) \cdot \underline{v} + t \cdot \underline{u}] \cdot \underline{u}}{|\vec{AP}| \cdot |\underline{u}|} = \frac{(1-t) \cdot \underline{v} \cdot \underline{u} + t \cdot \underline{u} \cdot \underline{u}}{|\vec{AP}| \cdot |\underline{u}|} = \frac{(1-t) \cdot |\underline{v}| \cdot |\underline{u}| \cdot \cos 60^\circ + t \cdot |\underline{u}|^2}{|\vec{AP}| \cdot |\underline{u}|} \\ &= \frac{(1-t) \cdot |\underline{u}|^2 \cdot 0.5 + t \cdot |\underline{u}|^2}{|\vec{AP}| \cdot |\underline{u}|} = \frac{[(1-t) \cdot 0.5 + t] \cdot |\underline{u}|^2}{|\vec{AP}| \cdot |\underline{u}|} = \frac{(0.5 - 0.5t + t) \cdot |\underline{u}|}{|\vec{AP}|} = \frac{(0.5 + 0.5t) \cdot |\underline{u}|}{|\vec{AP}|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{AP} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AP}| \cdot |\vec{AD}|} = \frac{[(1-t) \cdot \underline{v} + t \cdot \underline{u}] \cdot \underline{w}}{|\vec{AP}| \cdot |\underline{w}|} = \frac{(1-t) \cdot \underline{v} \cdot \underline{w} + t \cdot \underline{u} \cdot \underline{w}}{|\vec{AP}| \cdot |\underline{w}|} \\ &= \frac{(1-t) \cdot |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos 120^\circ + t \cdot |\underline{u}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos 53.13^\circ}{|\vec{AP}| \cdot |\underline{w}|} = \frac{(1-t) \cdot |\underline{u}| \cdot |\underline{w}| \cdot (-0.5) + t \cdot |\underline{u}| \cdot |\underline{w}| \cdot 0.6}{|\vec{AP}| \cdot |\underline{w}|} \\ &= \frac{[(1-t) \cdot (-0.5) + t \cdot 0.6] \cdot |\underline{u}| \cdot |\underline{w}|}{|\vec{AP}| \cdot |\underline{w}|} = \frac{(-0.5 + 0.5t + 0.6t) \cdot |\underline{u}|}{|\vec{AP}|} = \frac{(1.1t - 0.5) \cdot |\underline{u}|}{|\vec{AP}|} \end{aligned}$$

לסיום נשווה בין שני הביטויים שמצאנו ונקבל:

$$\frac{(0.5 + 0.5t) \cdot |\underline{u}|}{|\vec{AP}|} = \frac{(1.1t - 0.5) \cdot |\underline{u}|}{|\vec{AP}|} \rightarrow 0.5 + 0.5t = 1.1t - 0.5 \rightarrow -0.6t = -1 \rightarrow t = 1\frac{2}{3}$$

ג. לפי סעיף ב' מצאנו שמתקיים:  $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BC}$  ולכן הנקודה P נמצאת על **המשך** הקטע BC **מימין** ל-C.

ד. נסמן את הנקודה E על הווקטור  $\overrightarrow{AD}$  או על המשכו כך שמתקיים:  $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AD}$ . בהתאם לכך:

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AD} = -\underline{v} + k \cdot \underline{w}$$

כמו כן:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DP} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP} = -\underline{w} + (1-t) \cdot \underline{v} + t \cdot \underline{u} = -\underline{w} + (1-\frac{2}{3}) \cdot \underline{v} + \frac{2}{3} \cdot \underline{u} \\ &= -\underline{w} - \frac{2}{3} \cdot \underline{v} + \frac{2}{3} \cdot \underline{u}\end{aligned}$$

מצאנו שהווקטור  $\overrightarrow{DP}$  הוא צירוף ליניארי של הווקטורים  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$  ואילו הווקטור  $\overrightarrow{BE}$  הוא צירוף ליניארי של הווקטורים  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$  בלבד. כיוון שהווקטור  $\underline{u}$  אינו תלוי לינארית בווקטורים  $\underline{v}$  או  $\underline{w}$  ניתן להסיק של  $\overrightarrow{DP}$  ו- $\overrightarrow{BE}$  כיוונים שונים ולכן הם בהכרח אינם מקבילים. מכאן נובע **שלא קיימת** נקודה כלשהי E על הווקטור  $\overrightarrow{AD}$  או על המשכו, כך שמתקיים:  $DP \parallel BE$ .

ה. נסמן ב-X את נקודת מפגש התיכונים של המשולש  $\triangle BDP$ . קודקודי המשולש הם קצות הווקטורים

$\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  ו- $\overrightarrow{AP}$  בעלי נקודת המוצא המשותפת A ולכן הווקטור  $\overrightarrow{AX}$  מקיים:

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \underline{v} + \frac{1}{3} \underline{w} + \frac{1}{3} (-\frac{2}{3} \cdot \underline{v} + \frac{2}{3} \cdot \underline{u}) = \frac{1}{3} \underline{v} + \frac{1}{3} \underline{w} - \frac{2}{9} \cdot \underline{v} + \frac{5}{9} \cdot \underline{u} = \frac{5}{9} \cdot \underline{u} + \frac{1}{9} \underline{v} + \frac{3}{9} \underline{w}$$

קודקודי הפאה BCD הם קצות הווקטורים  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  ו- $\overrightarrow{AD}$  בעלי נקודת המוצא המשותפת A. מכאן נובע

שכל וקטור שיוצא מהנקודה A והוא צירוף מהצורה:  $m \cdot \overrightarrow{AB} + n \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AD}$  כך ש:  $m+n+s=1$

מסתיים על מישור הפאה BCD. מצאנו שעבור הנקודה X מתקיים:  $\overrightarrow{AX} = \frac{5}{9} \cdot \underline{u} + \frac{1}{9} \underline{v} + \frac{3}{9} \underline{w}$  וכיוון

ש:  $\frac{5}{9} + \frac{1}{9} + \frac{3}{9} = 1$  הרי שנקודת מפגש התיכונים X של המשולש  $\triangle BDP$  נמצאת **על הפאה BCD**.

## שאלה 3

א. כדי שנוכל להוציא את השורש הרביעי של המספר המרוכב:  $-8 + 8\sqrt{3}i$ , נעביר אותו תחילה לתצוגה קוטבית:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} \rightarrow r = 16$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \rightarrow \tan \theta = \frac{8\sqrt{3}}{-8} \rightarrow \theta = -60^\circ$$

נבדוק האם הזווית  $\theta = -60^\circ$  נמצאת ברביע המתאים במישור גאוס:

המספר המרוכב  $(-8, 8\sqrt{3})$  נמצא ברביע השני  $(-, +)$ , ואילו הזווית  $-60^\circ$  נמצאת ברביע הרביעי  $(+, -)$ .

כלומר עלינו להוסיף לזווית  $180^\circ$ :  $\theta = 120^\circ$ , ומכאן שהמספר המרוכב  $-8 + 8\sqrt{3}i$  מוצג קוטבית כ:  $16\text{cis}120^\circ$ . כעת נוכל להוציא שורש רביעי ולקבל ארבעה פתרונות:

$$Z^4 = 16\text{cis}120^\circ \rightarrow Z = \sqrt[4]{16}\text{cis}\left(\frac{120^\circ + 360^\circ k}{4}\right) \rightarrow Z = 2\text{cis}(30^\circ + 90^\circ k)$$

$$k = 0 \rightarrow Z_1 = 2\text{cis}30^\circ \quad k = 1 \rightarrow Z_2 = 2\text{cis}120^\circ$$

$$k = 2 \rightarrow Z_3 = 2\text{cis}210^\circ \quad k = 3 \rightarrow Z_4 = 2\text{cis}300^\circ$$

$$\text{כעת נציב את הפתרונות בביטוי: } \left| \frac{Z_3^k \cdot Z_4^2}{Z_1^2 \cdot Z_2^k} \right|$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{Z_3^k \cdot Z_4^2}{Z_1^2 \cdot Z_2^k} \right| &\rightarrow \left| \frac{(2\text{cis}210^\circ)^k \cdot (2\text{cis}300^\circ)^2}{(2\text{cis}30^\circ)^2 \cdot (2\text{cis}120^\circ)^k} \right| \\ &\rightarrow \left| \frac{2^k \text{cis}210^\circ k \cdot 4 \text{cis}600^\circ}{4 \text{cis}60^\circ \cdot 2^k \text{cis}120^\circ k} \right| \rightarrow |\text{cis}90^\circ k \cdot \text{cis}540^\circ| \rightarrow |\text{cis}(540^\circ + 90^\circ k)| \end{aligned}$$

נזכור כי  $r = |Z|$ , ומכאן שהערך המוחלט של המספר  $\text{cis}(540^\circ + 90^\circ k)$  הוא הרדיוס

שלו:  $|\text{cis}(540^\circ + 90^\circ k)| = 1$ .

ב. ראשית, נעביר את הביטוי  $16i$  באגף הימני לתצוגה קוטבית ונקבל כי הוא שווה ל-  $16\text{cis}90^\circ$ . כעת נציב את הפתרונות מסעיף א' במשוואה:

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot Z_5 = 16i \rightarrow 2\text{cis}30^\circ \cdot 2\text{cis}120^\circ \cdot 2\text{cis}210^\circ \cdot 2\text{cis}300^\circ \cdot Z_5 = 16\text{cis}90^\circ \rightarrow$$

$$16\text{cis}660^\circ \cdot Z_5 = 16\text{cis}90^\circ \rightarrow Z_5 = \frac{16\text{cis}90^\circ}{16\text{cis}660^\circ} \rightarrow Z_5 = \text{cis}(-570^\circ) \rightarrow Z_5 = \text{cis}150^\circ$$

(בשלב האחרון הוספנו  $360^\circ$  מעלות פעמיים עד שהזווית הפכה לחיובית).

ג. נתבונן בשרטוט. זווית הבסיס  $\angle ABZ_5$  שווה  $70^\circ$ . הזווית המרכזית  $\angle Z_5OA$

הנשענת על אותה הקשת גדולה ממנה פי שניים ולכן שווה ל- $140^\circ$ . כדי להגיע

למספר המרוכב A, יש להוסיף  $140^\circ$  לארגומנט (הזווית) של המספר

$$A = \text{cis}(150^\circ + 140^\circ) \rightarrow \text{cis}290^\circ \quad Z_5 = \text{cis}150^\circ \text{ נקבל:}$$

קל לחשב כי זווית הראש במשולש שווה  $40^\circ$ ,

ולכן הזווית המרכזית  $\angle BOA$  הנשענת על אותה

קשת, שווה  $80^\circ$ . כדי להגיע למספר המרוכב B, עלינו

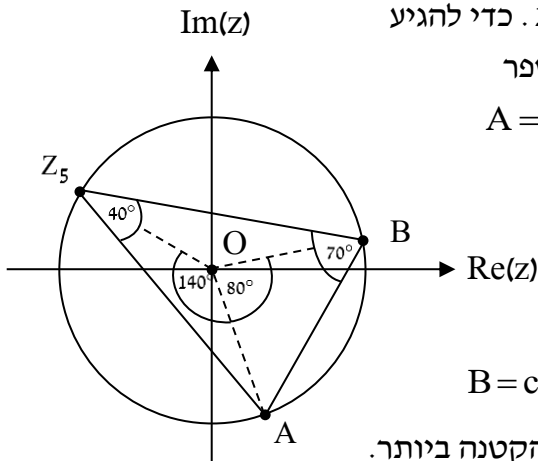
להוסיף  $80^\circ$  לארגומנט (הזווית) של  $A = \text{cis}290^\circ$ :

$$B = \text{cis}(290^\circ + 80^\circ) \rightarrow \text{cis}370^\circ \rightarrow \text{cis}10^\circ$$

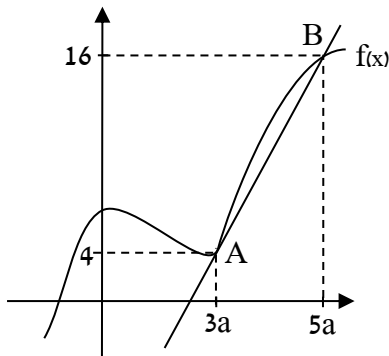
בשלב האחרון החסרנו  $360^\circ$  מעלות עד שהזווית הפכה לחיובית הקטנה ביותר.

נחשב את שטח המשולש  $\Delta ABZ_5$  כסכום שלושת המשולשים המרכיבים אותו:

$$S = \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 140^\circ}{2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 140^\circ}{2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 80^\circ}{2} = 1.135 \quad (\text{יח"ר})$$



#### שאלה 4



בשרטוט נתונים גרף הפונקציה  $f(x)$  וישר המשיק לו בנקודה A

וחותך אותו בנקודה B. הגדירו את הפונקציה:  $g(x) = 2 + \sqrt{f(x)}$ .

א. נוכיח שגרף הפונקציה  $g(x)$  עובר בנקודה  $A(3a, 4)$ :

נציב את שיעור ה-x של הנקודה בפונקציה ונקבל:

$$g(x_A) = g(3a) = 2 + \sqrt{f(3a)} = 2 + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4 = y_A$$

ומכאן שהנקודה A נמצאת על הפונקציה  $g(x)$ .

ב. נביע באמצעות a את משוואת הישר המשיק לגרף  $g(x)$  בנקודה A:

ראשית נגזור את הפונקציה  $g(x)$ :

$$g'(x) = 0 + \left( \sqrt{f(x)} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) \rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

כעת נציב בפונקציית הנגזרת את שיעור ה-x של הנקודה A כדי למצוא את שיפוע המשיק:

$$g'(x_A) = g'(3a) = \frac{f'(3a)}{2\sqrt{f(3a)}} = \frac{f'(3a)}{2\sqrt{4}} = \frac{f'(3a)}{2 \cdot 2} = \frac{f'(3a)}{4}$$

כעת כדי למצוא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה  $A$  נותר למצוא את ערך פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  עבור  $x = 3a$  כלומר את ערך פונקציית הנגזרת של  $f(x)$  בנקודה  $A$ . ערך זה הוא למעשה שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה  $A$  וכיוון שנתונות הנקודות  $A$  ו- $B$  הנמצאות על המשיק נוכל לחשב את השיפוע בעזרתן:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{16 - 4}{5a - 3a} = \frac{12}{2a} = \frac{6}{a}$$

$$g'(x_A) = \frac{f'(3a)}{4} = \frac{\frac{6}{a}}{4} = \frac{6}{a} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{4a} = \frac{3}{2a}$$

ולכן  $f'(3a) = \frac{6}{a}$  נציב בחזרה:

מצאנו את שיפוע המשיק ולכן נוכל יחד עם הנקודה  $A$  למצוא את משוואת המשיק:

$$y - 4 = \frac{3}{2a}(x - 3a) \rightarrow y - 4 = \frac{3}{2a}x - 4\frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2a}x - \frac{1}{2}$$

ג. נתון שהזווית שבין המשיק שאת משוואתו מצאנו בסעיף א' לבין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  היא  $45^\circ$ . ניעזר במשפט:

עבור ישר ששיפועו  $m$ , הזווית  $\alpha$  שבין הישר לבין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  מקיימת:  $\tan \alpha = m$ .  
נציב ונקבל:  $m = \tan 45^\circ = 1$  ומכאן ששיפוע המשיק הוא 1. נשווה לשיפוע שמצאנו:

$$1 = \frac{3}{2a} \rightarrow a = 1.5$$

$$y = \frac{3}{2 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)}x - \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{3}{3}x - \frac{1}{2} \rightarrow y = x - \frac{1}{2}$$

כמו כן נוכל כעת למצוא את משוואת המשיק:

ד. נתון שהמשיק שמשוואתו  $y = x - \frac{1}{2}$  משיק גם לגרף הפונקציה  $h(x) = \frac{e^{4x} - 8e^{2x} + 4x + c}{4}$ . נגזור את הפונקציה ונשווה לשיפוע הישר כדי למצוא את נקודת ההשקה:

$$h'(x) = \frac{4e^{4x} - 2 \cdot 8e^{2x} + 4 + 0}{4} = \frac{4e^{4x} - 16e^{2x} + 4}{4}$$

$$\frac{4e^{4x} - 16e^{2x} + 4}{4} = 1 \quad / :4 \rightarrow 4e^{4x} - 16e^{2x} + 4 = 4 \rightarrow 4e^{4x} - 16e^{2x} = 0$$

נשווה לשיפוע 1 ונקבל:

$$\rightarrow 4e^{2x}(e^{2x} - 4) = 0 \quad / : 4e^{2x} \neq 0 \rightarrow e^{2x} - 4 = 0 \rightarrow e^{2x} = 4 \rightarrow 2x = \ln 4 \rightarrow 2x = \ln 2^2$$

$$\rightarrow 2x = 2\ln 2 \rightarrow x = \ln 2$$

נציב את שיעור ה- $x$  במשוואת המשיק כדי למצוא את שיעור ה- $y$ :

$$y = x - \frac{1}{2} \rightarrow y = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

ומכאן שנקודת ההשקה היא:  $\left(\ln 2, \ln 2 - \frac{1}{2}\right)$

כעת נוכל להציב את הנקודה בפונקציה  $h(x)$  כדי למצוא את הקבוע  $c$ :

$$\begin{aligned} h(\ln 2) &= \frac{e^{4\ln 2} - 8e^{2\ln 2} + 4\ln 2 + c}{4} = \frac{e^{\ln 2^4} - 8e^{\ln 2^2} + 4\ln 2 + c}{4} = \frac{e^{\ln 16} - 8e^{\ln 4} + 4\ln 2 + c}{4} \\ &= \frac{16 - 8 \cdot 4 + 4\ln 2 + c}{4} = \frac{16 - 32 + 4\ln 2 + c}{4} = \frac{-16 + 4\ln 2 + c}{4} = -4 + \ln 2 + \frac{c}{4} \end{aligned}$$

וכיוון שמצאנו ששיעור ה- $y$  הוא  $\ln 2 - \frac{1}{2}$  נשווה ונקבל:

$$-4 + \ln 2 + \frac{c}{4} = \ln 2 - \frac{1}{2} \rightarrow -4 + \frac{c}{4} = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{c}{4} = 3\frac{1}{2} \rightarrow c = 14$$

ה. נחשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 h(x) dx &= \int_{-3}^0 \frac{e^{4x} - 8e^{2x} + 4x + 14}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{-3}^0 (e^{4x} - 8e^{2x} + 4x + 14) dx \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{e^{4x}}{4} - \frac{8e^{2x}}{2} + \frac{4x^2}{2} + 14x \right) \Big|_{-3}^0 = \frac{1}{4} \left( \frac{e^{4x}}{4} - 4e^{2x} + 2x^2 + 14x \right) \Big|_{-3}^0 \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{e^{4 \cdot 0}}{4} - 4e^{2 \cdot 0} + 2 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0 \right) - \left( \frac{e^{4(-3)}}{4} - 4e^{2(-3)} + 2 \cdot (-3)^2 + 14 \cdot (-3) \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{1}{4} - 4 \cdot 1 + 0 \right) - \left( \frac{e^{-12}}{4} - 4e^{-6} + 18 - 42 \right) \right] = 5.065 \end{aligned}$$

בנוסף:

$$\begin{aligned} \int_{-5}^0 h(x) dx &= \int_{-5}^0 \frac{e^{4x} - 8e^{2x} + 4x + 14}{4} dx = \dots = \frac{1}{4} \left( \frac{e^{4x}}{4} - 4e^{2x} + 2x^2 + 14x \right) \Big|_{-5}^0 \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{e^{4 \cdot 0}}{4} - 4e^{2 \cdot 0} + 2 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0 \right) - \left( \frac{e^{4(-5)}}{4} - 4e^{2(-5)} + 2 \cdot (-5)^2 + 14 \cdot (-5) \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{1}{4} - 4 \cdot 1 + 0 \right) - \left( \frac{e^{-20}}{4} - 4e^{-10} + 50 - 70 \right) \right] = 4.063 \end{aligned}$$

כלומר מצאנו ש:  $\int_{-3}^0 h(x) dx = 5.065$  וגם  $\int_{-5}^0 h(x) dx = 4.063$ .

הרחבת תחום האינטגרל מ- $[-3, 0]$  ל- $[-5, 0]$  מקטינה את ערכו ומכאן ש"השטח" שהוספנו הוא בעל סימן שלילי, כלומר גרף הפונקציה מתחת לציר ה- $x$ . כמו כן, הפונקציה  $h(x)$  לפחות בחלקה מעל לציר ה- $x$  שכן אילו הייתה כולה מתחת לציר ה- $x$  שני האינטגרלים היו שליליים.

הפונקציה  $h(x)$  רציפה ומכאן שגרף הפונקציה בהכרח חותך את ציר ה- $x$  ולכן הטענה הנכונה היא: i.



## שאלה 5

א. נתבונן בפונקציה:  $f(x) = \frac{2\ln x - 5a}{\ln^2 x - 4a^2}$

1. הפונקציה מוגדרת כאשר הביטוי בתוך ה- $\ln$  חיובי. מכאן:  $0 < x$ . בנוסף יש לבדוק מתי המכנה מתאפס:

$$\ln^2 x - 4a^2 \neq 0 \rightarrow \ln^2 x \neq 4a^2 \rightarrow \ln x \neq \pm 2a \rightarrow x \neq e^{2a}, x \neq e^{-2a}$$

נאחד את התחומים ונקבל:  $e^{2a} < x$  או  $e^{-2a} < x < e^{2a}$  או  $0 < x < e^{-2a}$ .

2. נגזור את הפונקציה ונשווה אותה ל-0:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(\ln^2 x - 4a^2) - \frac{2\ln x}{x}(2\ln x - 5a)}{(\ln^2 x - 4a^2)^2} = 0$$

$$\frac{2}{x}(\ln^2 x - 4a^2) - \frac{2\ln x}{x}(2\ln x - 5a) = 0 \rightarrow \ln^2 x - 4a^2 - \ln x(2\ln x - 5a) = 0 \rightarrow$$

$$-\ln^2 x + 5a\ln x - 4a^2 = 0$$

נסמן:  $t = \ln x$  ונקבל את המשוואה:  $-t^2 + 5a \cdot t - 4a^2 = 0$ , שפתרונותיה הם:  $a$  ו- $4a$ .

$$\ln x = a \rightarrow x = e^a$$

$$\ln x = 4a \rightarrow x = e^{4a}$$

נבדוק את סוגי הנקודות בעזרת טבלת עלייה וירידה:

| תחום x              | x = 0      | 0 < x < e <sup>-2a</sup> | x = e <sup>-2a</sup> | e <sup>-2a</sup> < x < e <sup>a</sup> | x = e <sup>a</sup> | e <sup>a</sup> < x < e <sup>2a</sup> | x = e <sup>2a</sup> | e <sup>2a</sup> < x < e <sup>4a</sup> | x = e <sup>4a</sup> | e <sup>4a</sup> < x |
|---------------------|------------|--------------------------|----------------------|---------------------------------------|--------------------|--------------------------------------|---------------------|---------------------------------------|---------------------|---------------------|
| נציב בנגזרת         | תחום הגדרה | e <sup>-a</sup>          | אס'                  | 1                                     | קיצון              | e <sup>1.5a</sup>                    | אס'                 | e <sup>3a</sup>                       | קיצון               | e <sup>5a</sup>     |
| סימן הנגזרת         |            | -                        |                      | -                                     |                    | +                                    |                     | +                                     |                     | -                   |
| הפונקציה עולה/יורדת |            |                          |                      |                                       | min                |                                      |                     |                                       | max                 |                     |

נציב את ערכי ה-x בפונקציה המקורית, כדי למצוא את ערכי y ונקבל:  $\min(e^a, \frac{1}{4a})$  ו:  $\max(e^{4a}, \frac{1}{4a})$ .

3. לפי תחום ההגדרה, אֵין נקודת חיתוך עם ציר ה-y.

על מנת למצוא את נקודת החיתוך עם ציר ה-x, נשווה את הפונקציה ל-0:

$$f(x) = \frac{2\ln x - 5a}{\ln^2 x - 4a^2} = 0 \rightarrow 2\ln x - 5a = 0 \rightarrow \ln x = 2.5a \rightarrow x = e^{2.5a}$$

נקודת החיתוך עם ציר ה-x היא:  $(e^{2.5a}, 0)$ .

4. את תחומי העלייה והירידה נמצא בטבלה:

עלייה:  $e^a < x < e^{2a}$  או  $e^{2a} < x < e^{4a}$ . ירידה:  $e^{4a} < x$  או  $e^{-2a} < x < e^a$  או  $0 < x < e^{-2a}$ .

5. נבדוק האם לפונקציה המקורית:  $f(x) = \frac{2\ln x - 5a}{\ln^2 x - 4a^2}$  יש אסימפטוטה אופקית. לאור תחום ההגדרה,

נחפש אסימפטוטה רק בתחום בו  $x \rightarrow \infty$ . נסמן:  $t = \ln x$  ונמצא את משוואת האסימפטוטה של הביטוי:

$$f(x) = \frac{2t - 5a}{t^2 - 4a^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2t - 5a}{t^2 - 4a^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2t}{t^2} - \frac{5a}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} - \frac{4a^2}{t^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{t} - \frac{5a}{t^2}}{1 - \frac{4a^2}{t^2}} = \frac{0^+ - 0^+}{1 - 0^+} \rightarrow y = 0$$

לסיכום, משוואת האסימפטוטה האופקית היא  $y = 0$ .

הפונקציה אינה מוגדרת בשלוש נקודות:  $x \neq e^{2a}$ ,  $x \neq e^{-2a}$  ו-  $x \neq 0$ .

משוואות האסימפטוטות האנכיות:  $x = e^{2a}$  ו-  $x = e^{-2a}$ .

אנו יודעים שהפונקציה אינה מוגדרת כאשר  $x = 0$ . נשאלת השאלה האם מקורה של אי הגדרה זו

באסימפטוטה אנכית או בנקודת אי רציפות סליקה ("חור" בגרף הפונקציה). אם הייתה אסימפטוטה  $x = 0$

הרי שהיינו מצפים שגרף הפונקציה ישאף אליה. אולם, נשים לב שבתחום:  $0 < x < e^{-2a}$ , לגרף הפונקציה

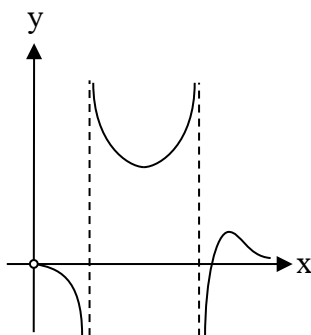
אין נקודת קיצון והוא גם אינו חותך את ציר ה- $x$ . כלומר, לא מתאפשר מצב בו הגרף ישאף לאסימפטוטה

$x = 0$ . לכן, עלינו לבחור בחלופה השניה לאי ההגדרה והיא שיש כאן נקודת אי רציפות סליקה ("חור" בגרף

הפונקציה). יכולנו למצוא שמדובר בנקודת אי רציפות סליקה גם בדרך אחרת: אם היינו מציבים בפונקציה

ערכים הולכים ומתקרבים ל-0 היינו מוצאים שערכי הפונקציה גם הם הולכים ומתקרבים ל-0. כלומר, שיש

נקודת אי רציפות סליקה בראשית הצירים.



ב. השרטוט משמאל.

ג. הפונקציה  $g(x) = \ln(f'(x))$  מוגדרת כאשר הביטוי שבתוך ה- $\ln$  חיובי.

כלומר, כאשר:  $0 < f'(x)$ . בסעיף ד' מצאנו כי פונקציית הנגזרת חיובית

כאשר:  $e^a < x < e^{2a}$  או  $e^{2a} < x < e^{4a}$ . לפי הנתון בסעיף ז', תחום זה הוא

למעשה:  $e^5 < x < e^{10}$  ו-  $e^{10} < x < e^{20}$ . ניתן לראות כי  $e^a = e^5$ ,  $e^{2a} = e^{10}$  ו-  $e^{4a} = e^{20}$ .

מכל אחת משלוש המשוואות ניתן לקבל כי:  $a = 5$ .