פרק 41 - מנסרה ישרה משולשת

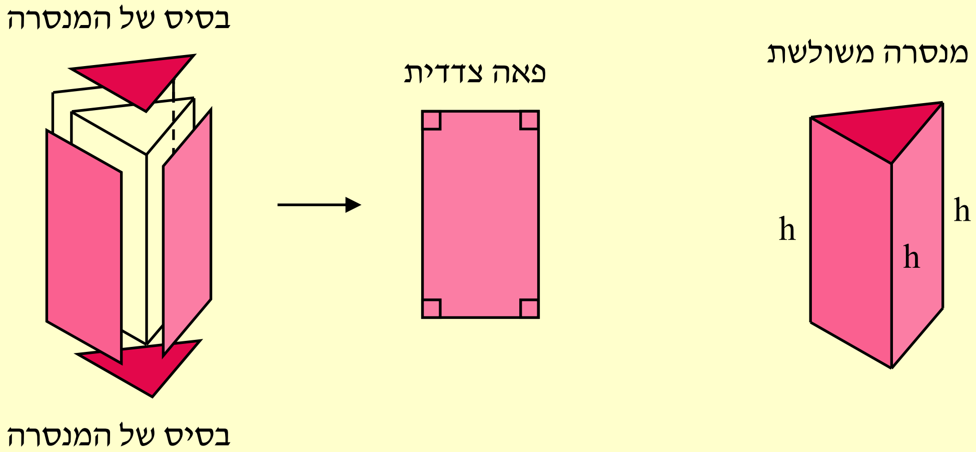
מה נלמד בפרק זה?

- נלמד מהי **מנסרה ישרה משולשת**.
- נלמד לחשב את שטח הפנים שלה.
- נלמד לחשב את הנפח של מנסרה ישרה משולשת.

מנסרה משולשת ישרה היא גוף במרחב, ששתיים מפאותיו הן משולשים חופפים, ושלוש פאות הן מלבנים, שאינם בהכרח חופפים.

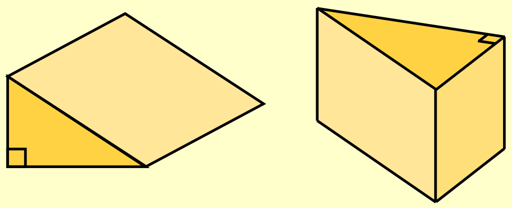
הפאות המשולשות נקראות **בסיסי המנסרה**, והפאות המלבניות נקראות **פאות צדדיות**.

גובה המנסרה h הוא האורך של כל אחד משלושת מקצועות הצד המחברים את שני הבסיסים.



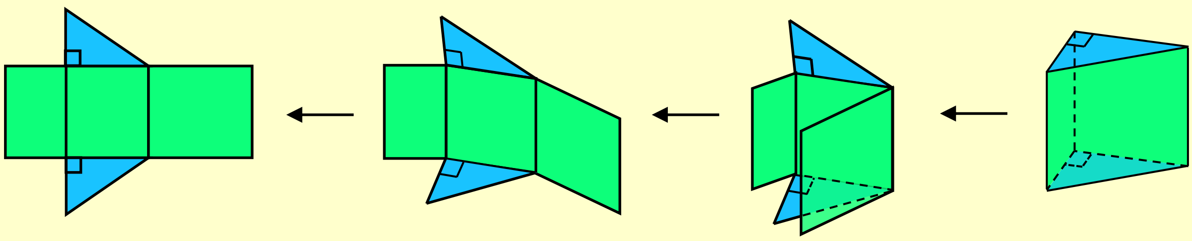
בסיסי המנסרה המשולשת עשויים להיות משולש מכל סוג - חד זווית, ישר זווית או קהה זווית.

המנסרה תוצג בפנינו כאשר היא מונחת על אחד הבסיסים או על אחת הפאות.



כפי שעשינו עם תיבה, נעסוק גם בפריסה של מנסרה ישרה משולשת.

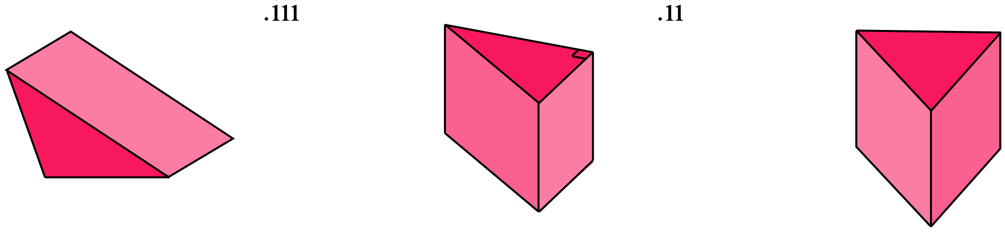
לפניכם פריסה של מנסרה ישרה משולשת שבסיסיה משולשים ישרי זווית:



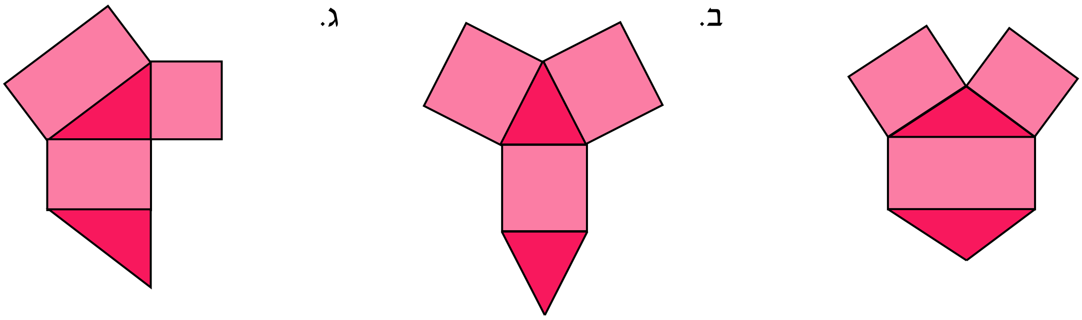
© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס** - צילום או שכפול מספר זה הוא עבירה על החוק

1. לפניכם שלוש המנסרות i-iii, ושלוש הפריסות א'-ג'.
קבעו איזו פריסה מתאימה לכל אחת מהמנסרות:

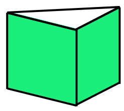
i.   ii.   iii.



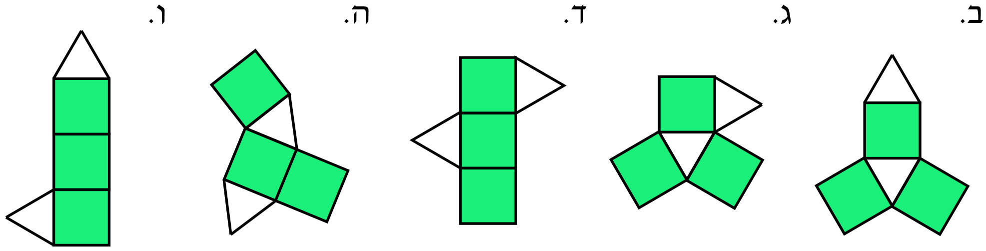
א.   ב.   ג.



2. לפניכם מנסרה.
קבעו אילו מהפריסות הבאות עשויות להיות פריסה שלה:



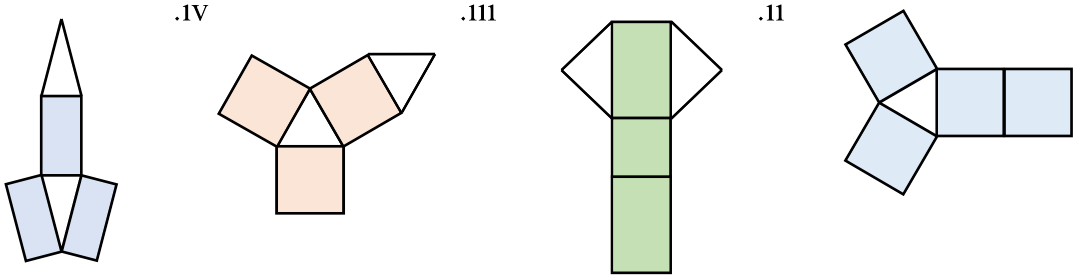
א.   ב.   ג.   ד.   ה.   ו.



3. נתונה מנסרה ישרה משולשת שכל פאותיה הצדדיות חופפות.
איזה משולש הוא בסיס המנסרה?

4. קבעו איזו מהפריסות הבאות היא פריסה של מנסרה ישרה משולשת:

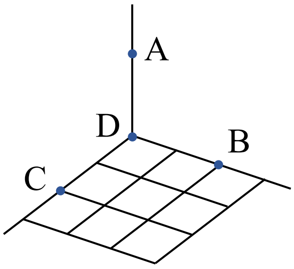
i.   ii.   iii.   iv.



5. נתונה מנסרה ישרה משולשת שרק שתיים מפאותיה הצדדיות חופפות.
איזה משולש הוא בסיס המנסרה?

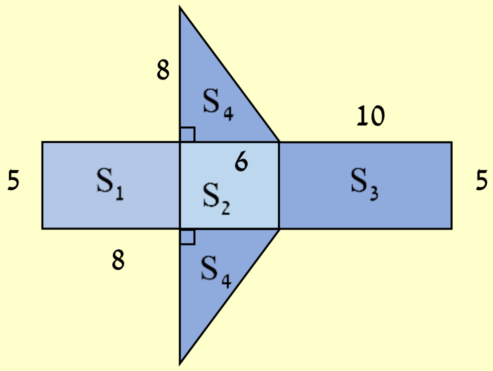
© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס** - צילום או שכפול מספר זה הוא עבירה על החוק

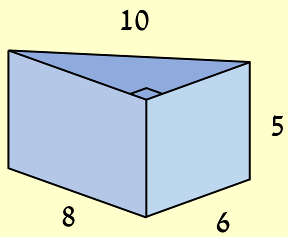
6. (*) לפניכם פינה של חדר. על קווי המפגש בין הקירות לבין הרצפה
מסומנות הנקודות A, B, C ו־D.
דמיינו שנעביר את הישרים AB, AC ו־BC.
קבעו אם הצורה התלת־ממדית ABCD היא מנסרה ישרה משולשת.



שטח פנים של מנסרה ישרה משולשת

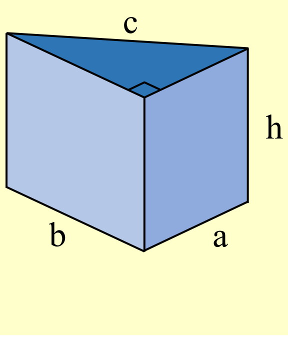
חישוב שטח הפנים של מנסרה ישרה משולשת דומה לחישוב שעשינו בתיבה.
שטח הפנים שווה לסכום השטחים של חמש הפאות של המנסרה המשולשת.
נתבונן במנסרה מימין, שבסיסיה משולשים ישר זווית. משמאל נציג את חישובי השטחים.
האורכים בשרטוט הם בסנטימטרים.



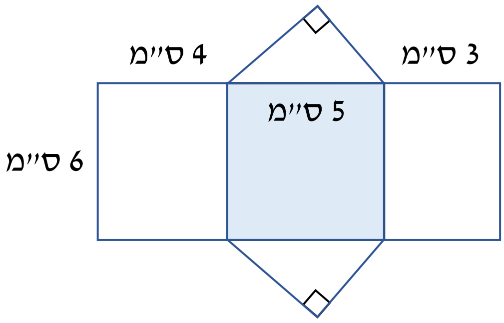


$$S_{\text{פנים}} = S_1 + S_2 + S_3 + 2\cdot S_4 = 5\cdot 8 + 5\cdot 6 + 5\cdot 10 + 2\cdot(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8) = 168 \text{ סמ"ר}$$

כעת נציג את הנוסחאות שבעזרתן נוכל לחשב את שטח
הפנים במנסרה ישרה משולשת שבסיסיה משולשים
ישרי זווית והגובה שלה הוא h:
שטח הפנים ניתן לחישוב בנוסחה: $S = h\cdot(a+b+c) + a\cdot b$.

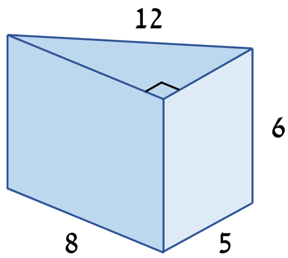


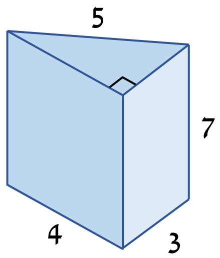
7. לפניכם פריסה של מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית.
היעזרו בנתונים המופיעים בשרטוט, וחשבו את:
א. שטחי הבסיסים המשולשים.
ב. שטח הפאה הצבועה בתכלת.
ג. שטחי הפאות המלבניות הלבנות.

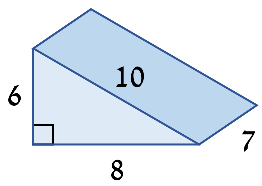


שימו לב! כאשר אנו מחשבים את שטח הפנים של מנסרה משולשת, יש לכלול בחישוב גם פאות שאינן נראות לעין - הפאות האחוריות והפאה התחתונה.

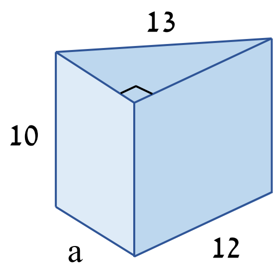
8. לפניכם מנסרות ישרות שבסיסיהן הם משולשים ישרי זווית. האורכים בשרטוט בסנטימטרים.
חשבו את שטח הפנים של כל מנסרה:

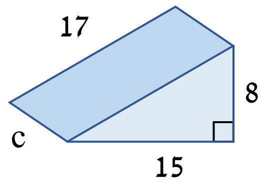
א.


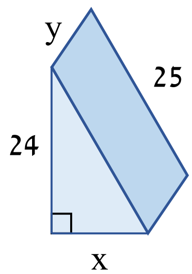
ב.


ג.


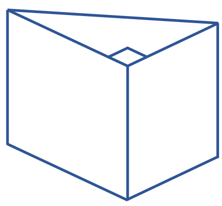
9. לפניכם מנסרות ישרות שבסיסיהן הם משולשים ישרי זווית.
הביעו באמצעות האותיות את שטח הפנים של כל מנסרה:

א.


ב.


ג.


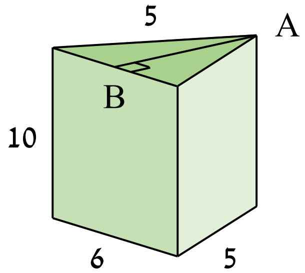
10. לפניכם מנסרה משולשת שבסיסה משולש ישר זווית.
עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה, והסבירו את תשובתכם:
א. אם נגדיל את גובה המנסרה פי 2, אז שטח הפנים יגדל פי 2.
ב. אם נגדיל את גובה המנסרה פי 2, אז שטח הבסיסים יגדל פי 2.
ג. אם נגדיל את גובה המנסרה ב־2 ס"מ, אז שטח הפנים בהכרח יגדל.



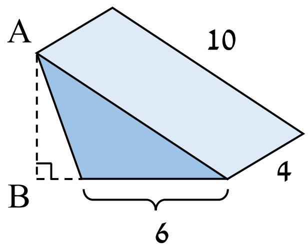
© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס** - צילום או שכפול מספר זה הוא עבירה על החוק

11. לפניכם מנסרות ישרות שבסיסיהן משולשים שווי שוקיים **שאינם** ישרי זווית. האורכים הם בס"מ.
היעזרו בנתון לגבי גובה הבסיס AB, וחשבו את שטח הפנים של כל מנסרה:

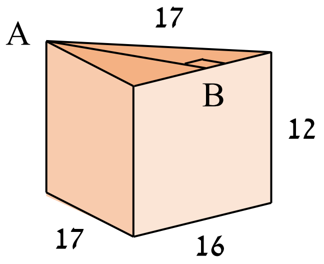
א. 4 ס"מ = AB



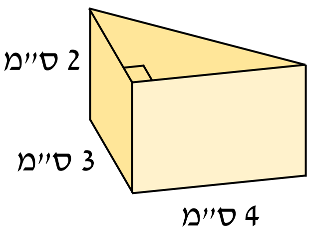
ב. 5 ס"מ = AB

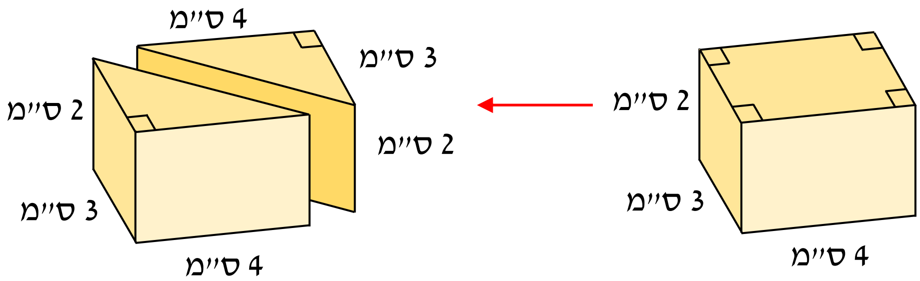


ג. 15 ס"מ = AB



12. עמית התבקשה לחשב את הנפח של המנסרה המשורטטת משמאל,
אך טרם למדה כיצד לחשב נפח של מנסרה משולשת.
לעמית היה רעיון המסתמך על הידע שלה בחישוב נפח של תיבה,
והיא שרטטה שני שרטוטים:





א. התבוננו בשרטוטים שעמית הכינה, וסייעו לה לחשב את נפח המנסרה המשולשת.
ב. קבעו אם שטח הפנים של התיבה שבנתה עמית שווה לסכום שטחי הפנים של שתי המנסרות שמהן יצרה את התיבה. הסבירו את תשובתכם.

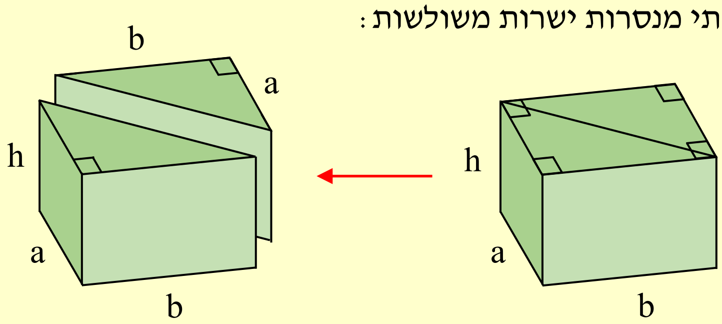
חידה!

המשקל הכולל של אננס ואבטיח יחד הוא 11 ק"ג.
המשקל הכולל של אבטיח ודלעת יחד הוא 28 ק"ג.
המשקל הכולל של אננס ודלעת יחד הוא 23 ק"ג.

מהו המשקל הכולל של אננס, אבטיח ודלעת יחד?

נפח של מנסרה ישרה שבסיסיה הם משולשים ישרי זווית

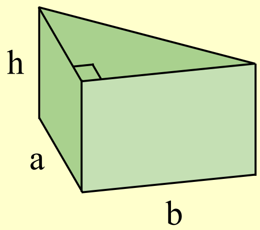
נתבונן בתיבה שממדי הבסיס שלה הם a ו־b וגובהה h.
נחלק אותה לשתי מנסרות ישרות משולשות:



התקבלו שתי מנסרות ישרות שגובהן h, והבסיס שלהן הוא משולש ישר זווית שניצביו a ו־b.
הנפח שלהן הוא מחצית מנפח התיבה. הביטוי המייצג את נפח התיבה הוא $V = a \cdot b \cdot h$.

בהתאם, נפח המנסרה המשולשת שבסיסה
משולש ישר זווית ניתן לחישוב בנוסחה:

$$V = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot h$$

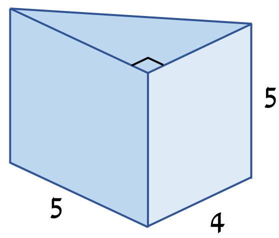


נשים לב שהביטוי $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ בנוסחה מייצג את שטח הבסיס שהוא משולש ישר זווית.

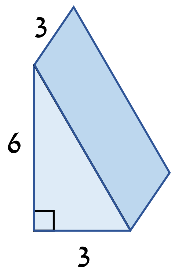
לסיכום, נפח מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית שווה **למכפלת שטח הבסיס בגובה המנסרה**.
נזכיר שיחידות המידה שבהן נפח נמדד הן לרוב סמ"ק (סנטימטר מעוקב) ומ"ק (מטר מעוקב).

13. לפניכם מנסרות. האורכים בשרטוט בס"מ. חשבו את הנפח של כל מנסרה:

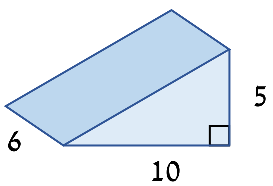
א.



ב.

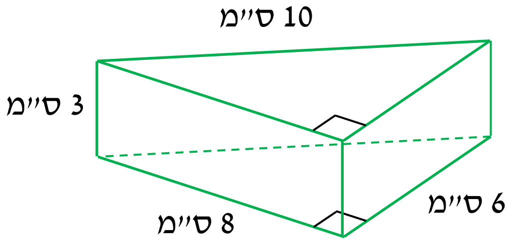


ג.

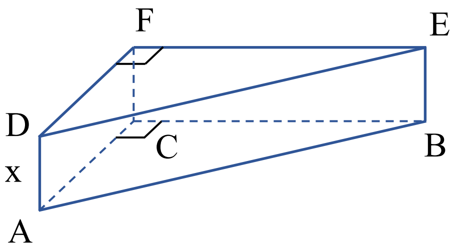


© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס** - צילום או שכפול מספר זה הוא עבירה על החוק

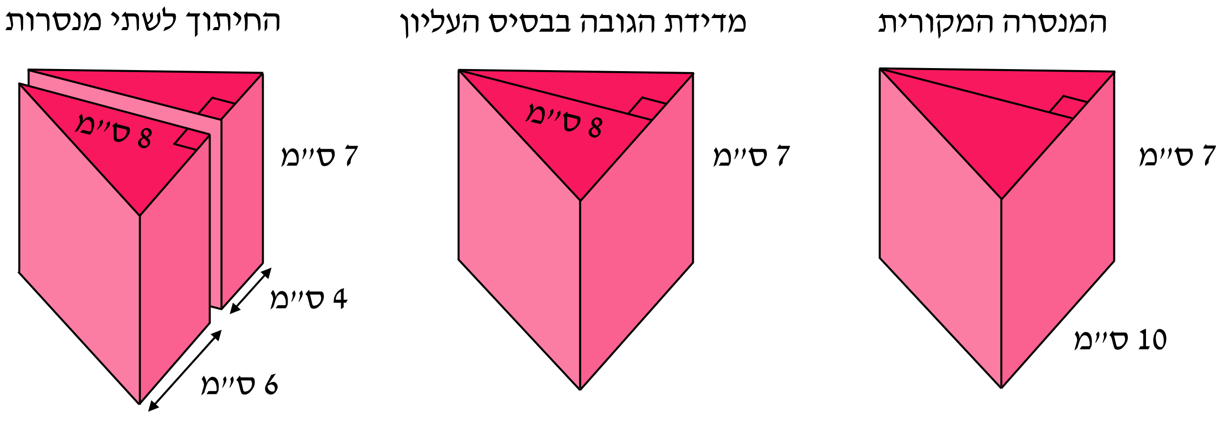
14. לפניכם מנסרה ישרה שבבסיסיה משולשים ישרי זווית.
מאריכים את גובה המנסרה ב-a.
לאחר השינוי, הביעו באמצעות a את:
א. שטח הפנים של המנסרה.
ב. נפח המנסרה.



15. (*) לפניכם מנסרה משולשת שבבסיסיה משולשים ישרי זווית.
היקף הפאה ACFD הוא 16 ס"מ. נסמן $AD = x$.
א. הביעו באמצעות x את אורך המקצוע DF.
ב. נתון שהיקף הפאה ABED הוא 32 ס"מ.
הביעו באמצעות x את אורך המקצוע DE.
ג. נתון שהיקף המשולש ΔDEF הוא 30 ס"מ.
הביעו באמצעות x את אורך המקצוע EF.
ד. נתון שהמקצוע EF ארוך ב-7 ס"מ מהמקצוע DF. מצאו את x.
ה. חשבו את נפח המנסרה.



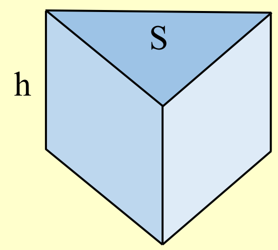
16. חן רצה לחשב את נפח המנסרה הישרה שלפניכם, שבסיסה אינו משולש ישר זווית. הוא הוריד גובה בבסיס העליון של המנסרה. הוא מדד את אורכו וחתך את המנסרה לשתי מנסרות נפרדות.
כל אחת מהמנסרות שהתקבלו היא מנסרה ישרה שבסיסה משולש ישר זווית, כמתואר בשרטוט.



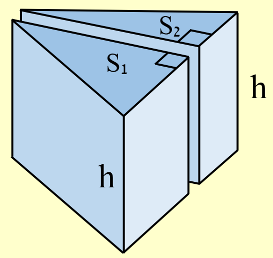
א. השתמשו ברעיון של חן, וחשבו את נפח המנסרה הנתונה.
ב. קבעו אם שטח הפנים של המנסרה המשולשת שחתך חן, שווה לסכום שטחי הפנים של שתי המנסרות שהתקבלו. הסבירו את תשובתכם.

נפח של מנסרה שבסיסה משולש חד זווית או קהה זווית

נתבונן במנסרה שגובהה h ושטח הבסיס שלה הוא S:



כעת נחלק אותה לשתי מנסרות שבסיסיהן S_1 ו־S_2 הם משולשים ישרי זווית.



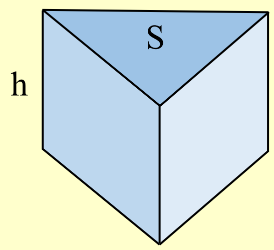
לאחר החלוקה, נקבל שמתקיים: $S_1 + S_2 = S$.

נפח המנסרה המקורית שווה **לסכום הנפחים** של שתי המנסרות שהתקבלו בחלוקה.

סכום הנפחים שלהן הוא: $V_{\text{2 המנסרות}} = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h$

לפי חוק הפילוג נקבל: $V_{\text{2 המנסרות}} = (S_1 + S_2) \cdot h$

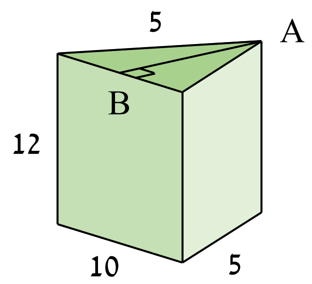
מכיוון שמתקיים: $S_1 + S_2 = S$, נקבל: $V_{\text{2 המנסרות}} = S \cdot h$



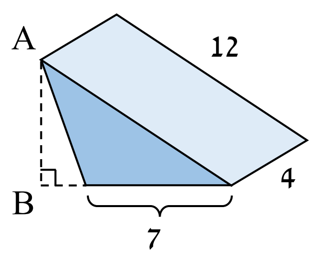
לסיכום, נפח מנסרה ישרה משולשת ששטח הבסיס שלה הוא S, והגובה שלה הוא h, ניתן לחישוב בנוסחה: $V = S \cdot h$.

17. לפניכם מנסרות ישרות שבסיסן אינו משולש ישר זווית. האורכים בשרטוט הם בס"מ.
חלק מהנתונים מיותרים. היעזרו בנתון לגבי גובה הבסיס AB וחשבו את נפח המנסרה:

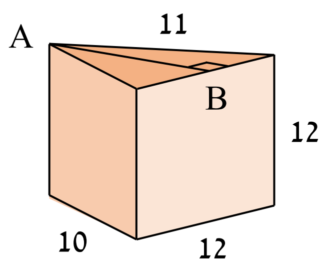
א. 6 ס"מ = AB



ב. 8 ס"מ = AB

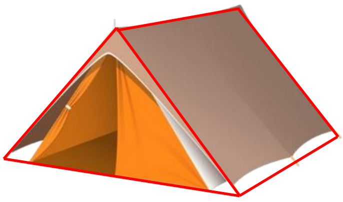


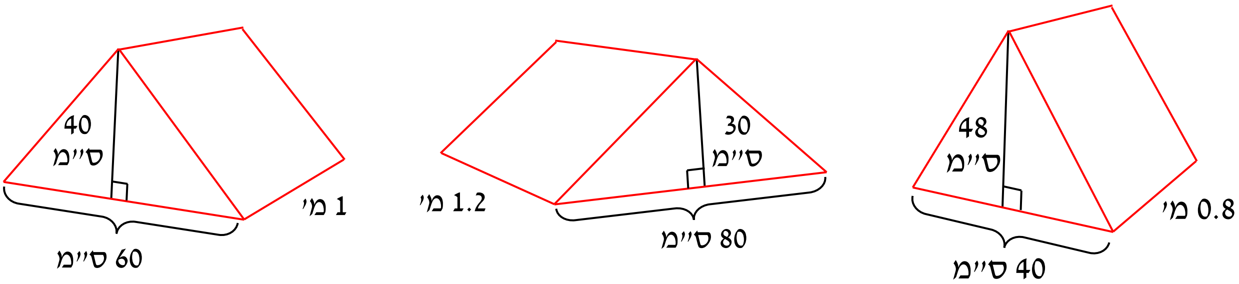
ג. 8 ס"מ = AB



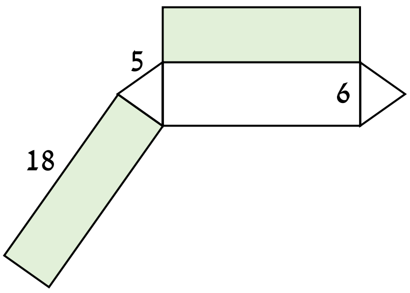
© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס** - צילום או שכפול מספר זה הוא עבירה על החוק

18. לפניכם תרשימים של שלושה אוהלי שטח בצורת מנסרה משולשת.
בשלושת האוהלים פתח הכניסה הוא בצורת משולש שווה שוקיים כך שהבסיס מונח על הקרקע. בתנועת הנוער מתלבטים איזה אוהל לרכוש למדריכים המעוניינים **בנפח המרבי**.
היעזרו בגובה הבסיס המופיע בכל שרטוט, שימו לב ליחידות המידה, וקבעו לאיזה מהאוהלים יש הנפח הגדול ביותר:

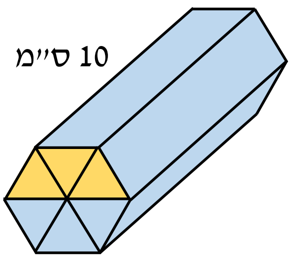




19. לפניכם פריסה של מנסרה משולשת. האורכים בשרטוט בס"מ.
שטח הפאה המשולשת הוא 24 סמ"ר.
הפאות הירוקות חופפות זו לזו. חשבו את:
א. נפח המנסרה.
ב. שטח הפנים של המנסרה.

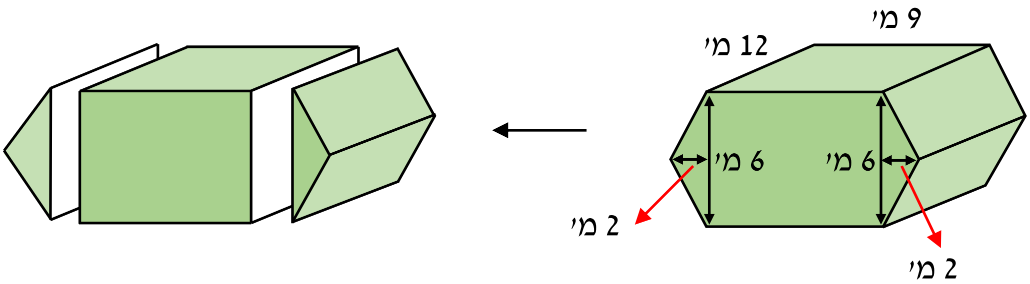


20. (*) את הגוף התלת־ממדי המופיע משמאל הרכיבו מ־6 מנסרות משולשות זהות שבסיסן משולש **שווה צלעות**. נתון שהשטח הצבוע בכתום הוא 30b, והיקף הצורה הצבועה בכתום הוא 30a.
הביעו באמצעות a ו־b את:
א. שטח הפנים של הגוף.
ב. הנפח של הגוף.

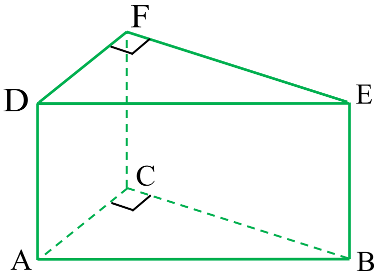


© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס** - צילום או שכפול מספר זה הוא עבירה על החוק

21. (*) מהנדסים בנו גוף של חללית כמתואר באיור מימין.
היעזרו בפירוק של גוף החללית לגופים מוכרים, וחשבו את נפח גוף החללית.



22. (*) נתונה מנסרה ישרה שבסיסה המשולש ישר הזווית ΔABC.
הפאה ACFD היא ריבועית.
נתון: 3 ס״מ $= AC$. נפח המנסרה $18a$.
א. הביעו באמצעות a את:
1. שטח הבסיס התחתון של המנסרה
2. אורך המקצוע BC.
ב. נתון: 5 ס״מ $= DE$.
הביעו באמצעות a את שטח הפנים של המנסרה.
ג. נתון ששטח הפנים של המנסרה גדול ב־42 סמ״ר משטח הבסיס העליון. מצאו את a.



סיכום הפרק

למדנו מהי מנסרה ישרה משולשת, והכרנו נוסחאות הקשורות אליה:

אם שטח הבסיס של המנסרה הוא S אז:

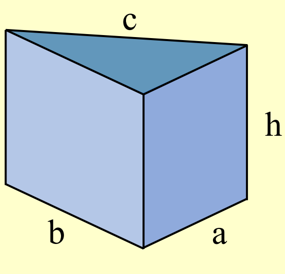
הנוסחה לחישוב **שטח הפנים**: $S_{\text{פנים}} = h\cdot(a+b+c)+2S$

הנוסחה לחישוב **נפח**: $V=S\cdot h$

במנסרה שבסיסיה משולשים ישרי זווית:

הנוסחה לחישוב **הנפח**: $V=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot h$

הנוסחה לחישוב **שטח הפנים**: $S_{\text{פנים}} = h\cdot(a+b+c)+ab$



שאלות ותרגילים נוספים בנושאי פרק זה זמינים
עבורך באתר הוצאת ארכימדס בסריקת הברקוד:

© כל הזכויות שמורות **להוצאת ארכימדס** - צילום או שכפול מספר זה הוא עבירה על החוק

תשובות:

1) i-ב', ii-ג', iii-א'. **2)** א', ב', ד', ה'. **3)** משולש שווה צלעות. **4)** iii. **5)** משולש שווה שוקיים.

6) זו אינה מנסרה משולשת. ניתן לראות שאין בה פאות מלבניות.

7) א. 6 סמ"ר. **ב.** 30 סמ"ר. **ג.** הימנית 18 סמ"ר והשמאלית 24 סמ"ר.

8) א. 190 סמ"ר. **ב.** 96 סמ"ר. **ג.** 216 סמ"ר.

9) א. $10(25+a)+12a=250+22a$.

ב. $40c+120$.

ג. $y(49+x)+24x=49y+xy+24x$.

10) א. שגויה. **ב.** שגויה. **ג.** נכונה.

11) א. 184 סמ"ר. **ב.** 118 סמ"ר. **ג.** 840 סמ"ר.

12) א. 12 סמ"ק. **ב.** לא. יש לכלול בחישוב את שתי הפאות המלבניות שנוצרו מהחיתוך.

פתרון החידה: המשקל הכולל של שלושת הפירות הוא 31 ק"ג. אם נחבר את שלושת המשקלים **הנתונים** לנו, למעשה אנו שוקלים שני פירות **מכל סוג**. הסכום הכולל המתקבל הוא 62 ק"ג. אם נחלק אותו ב־2 נקבל את המשקל של שלושת הפירות - 31 ק"ג.

13) א. 50 סמ"ק. **ב.** 27 סמ"ק. **ג.** 150 סמ"ק.

14) א. $24(a+3)+48=24a+120$. **ב.** $\frac{6\cdot 8}{2}\cdot(a+3)=24(a+3)=24a+72$.

15) א. $8-x$. **ב.** $16-x$. **ג.** $6+2x$. **ד.** $x=3$. **ה.** 90 סמ"ק.

16) א. 280 סמ"ק. נחשב את הנפח של כל אחת משתי המנסרות שהתקבלו, ונחבר את התוצאות:

נקבל: $\frac{4\cdot 8}{2}\cdot 7+\frac{6\cdot 8}{2}\cdot 7=112+168=280$.

ב. לא. יש לכלול בחישוב את שתי הפאות המלבניות שנוצרו מהחיתוך.

17) א. 360 סמ"ק. **ב.** 112 סמ"ק. **ג.** 576 סמ"ק.

18) אוהל ב'.

19) א. 432 סמ"ק. **ב.** 336 סמ"ר.

20) א. $360a+120b$. **ב.** $600b$.

21) 792 מ"ק.

22) א. 1. $6a$. **2.** $4a$. **ב.** $24(a+1)=24+24a$. **ג.** $a=1$.