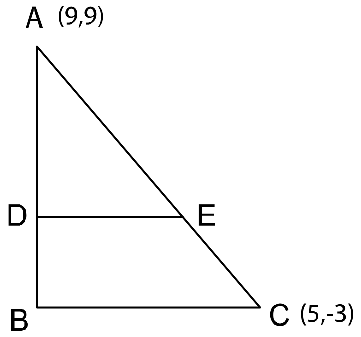
פתרון מלא - מבחן 9

שאלה 1



א. נתבונן בשרטוט. על מנת למצוא את שיעורי הנקודה E עלינו לדעת באיזה יחס היא מחלקת את הקטע AC. ניתן לראות כי המשולשים ΔADE ו- ΔABC דומים (הזווית $\sphericalangle BAC$ משותפת והזוויות $\sphericalangle ADE$ ו- $\sphericalangle ABC$ הן זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים).

לפי הנתונים, יחס השטחים בין שני המשולשים הוא:

$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{18}{18+14}=\frac{9}{16}$$

יחס השטחים בין משולשים דומים הוא ריבוע יחס הדמיון ולכן יחס הדמיון בין המשולשים ΔADE ו- ΔABC הוא: $\frac{AE}{AC}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$.

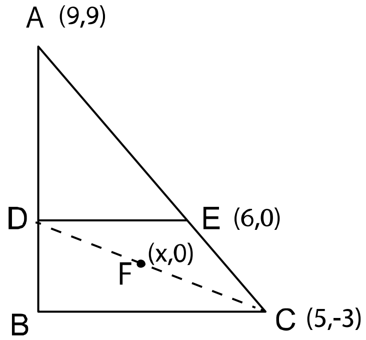
אם $\frac{AE}{AC}=\frac{3}{4}$ הרי שמהיחס הזה נובע היחס: $\frac{AE}{EC}=\frac{3}{1}$.

כעת נוכל למצוא את שיעורי הנקודה E בעזרת הנוסחה לחלוקת קטע ביחס נתון:

$$x_E=\frac{x_A+3x_C}{3+1}\rightarrow x_E=\frac{9+3\cdot 5}{3+1}=6 \qquad \text{וכן} \qquad y_E=\frac{y_A+3y_C}{3+1}\rightarrow y_E=\frac{9-3\cdot 3}{3+1}=0$$

מכאן ששיעורי הנקודה הם: $\boxed{E(6,0)}$.

ב. הנקודה F היא אמצע הקטע CD. מהנתון ניתן להסיק כי שיעור ה-y של הנקודה F הוא 0.



נמצא את שיעור ה-y של הנקודה D לפי הנוסחה לאמצע קטע:

$$y_F=\frac{y_D+y_C}{2}\rightarrow 0=\frac{y_D-3}{2}=0\rightarrow \boxed{y_D=3}$$

נמצא את שיעור ה-x של נקודה D בעזרת חישוב שטח המשולש ΔADE.

בסיס המשולש הוא AE וניתן למצוא את אורכו בעזרת הנוסחה לחישוב מרחק:

$$AE=\sqrt{(9-6)^2+(9-0)^2}=\sqrt{90}$$

הגובה לבסיס AE הוא מרחקה של הנקודה D מהישר AE.

נסמן את הגובה ב-h ונמצא את אורכו:

$$S_{\Delta ADE}=\frac{AE\cdot h}{2}\rightarrow 18=\frac{\sqrt{90}\cdot h}{2}\rightarrow h=\frac{36}{\sqrt{90}}\rightarrow h=\sqrt{14.4}$$

כעת נחשב את המרחק בין הנקודה D לישר AE ונשווה את המרחק ל- $\sqrt{14.4}$.

תחילה נמצא את משוואת הישר AE. שיפוע הישר על פי הנוסחה לשיפוע בין שתי נקודות הוא:

$$m_{AE}=\frac{9-0}{9-6}\rightarrow m_{AE}=3$$

משוואת הישר היא:

$$AE: \ y - y_1 = m(x - x_1) \ \rightarrow \ y - 0 = 3(x - 6) \ \rightarrow \ AE: \ -3x + y + 18 = 0$$

נחשב את מרחק הנקודה D מהישר AE על פי הנוסחה למרחק בין נקודה לישר ונשווה את המרחק לגובה $\sqrt{14.4}$:

$$d = \frac{|-3x_D + y_D + 18|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} \ \rightarrow \ \sqrt{14.4} = \frac{|-3x_D + 3 + 18|}{\sqrt{10}} \ \rightarrow \ \sqrt{144} = |-3x_D + 21| \ \rightarrow \ 12 = |-3x_D + 21|$$

בגלל הערך המוחלט קיימות שתי אפשרויות:

$$12 = -3x_D + 21 \ \rightarrow \ x_D = 3 \ \rightarrow \ \boxed{D(3,3)}$$

$$-12 = -3x_D + 21 \ \rightarrow \ x_D = 11 \ \rightarrow \ \boxed{D(11,3)}$$

ג. על פי הנתון נבחר בנקודה: $\boxed{D(3,3)}$.

הקטע DE מקביל לקטע BC ולכן לפי משפט תאלס מתקיים: $\frac{AE}{CE} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{1}$.

נמצא את שיעורי הנקודה B לפי הנוסחה לחלוקת קטע ביחס נתון:

$$x_D = \frac{x_A + 3x_B}{3+1} \ \rightarrow \ 3 = \frac{9 + 3x_B}{4} \ \rightarrow \ x_B = 1$$

ובנוסף:

$$y_D = \frac{y_A + 3y_B}{3+1} \ \rightarrow \ 3 = \frac{9 + 3y_B}{4} \ \rightarrow \ y_B = 1$$

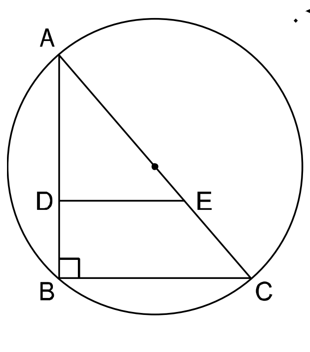
לכן: $\boxed{B(1,1)}$.

ד. נתון כי AC הוא קוטר. אם הנקודה B נמצאת על המעגל, אז הזווית $\measuredangle ABC$ היא זווית היקפית שנשענת על קוטר וצריכה להיות זווית ישרה. לכן, יש לבדוק האם: $\measuredangle ABC = 90°$.

נמצא את שיפועי הישרים AB ו-BC: $m_{AB} = \frac{9-1}{9-1} = 1$ וכן $m_{BC} = \frac{-3-1}{5-1} = -1$.

ניתן לראות כי $m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$ ולכן הישרים מאונכים והזווית $\measuredangle ABC = 90°$.

כלומר, הנקודה B אכן נמצאת על המעגל ש-AC קוטרו.

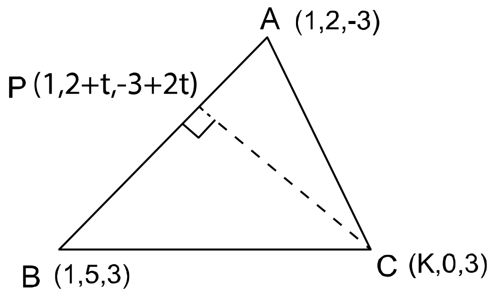


שאלה 2

א. נתבונן בשרטוט.

על מנת להשתמש בנתון לגבי שטח המשולש נשתמש בבניית עזר: CP הוא הגובה היורד מקדקוד C.

שטח המשולש הוא: $S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot PC}{2}$. נחשב את אורך הבסיס AB:



$$d_{AB}=\sqrt{(1-1)^2+(5-2)^2+(3-(-3))^2}=\sqrt{45}$$

נציב במשוואת שטח המשולש ונמצא את אורך הגובה PC:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot PC}{2}\ \rightarrow\ 15=\frac{\sqrt{45}\cdot PC}{2}$$

$$\rightarrow\ PC=\frac{30}{\sqrt{45}}\ \rightarrow\ PC=\sqrt{20}$$

אורך PC הוא המרחק בין הנקודה $C(k,0,3)$ לבין הישר AB ועלינו לחשבו.

נעשה זאת בעזרת הנקודה הכללית P על הישר AB.

ההצגה הפרמטרית של הישר AB היא:

$$\overrightarrow{AB}:(1,2,-3)+t(1-1,5-2,3-(-3))\ \rightarrow\ \overrightarrow{AB}:(1,2,-3)+t(0,3,6)\ \rightarrow\ \overrightarrow{AB}:(1,2,-3)+t(0,1,2)$$

כלומר, הנקודה P היא נקודה כללית על הישר AB ושיעוריה הם: $P(1,2+t,-3+2t)$.

כיוונו של הווקטור $\overrightarrow{CP}$ העובר דרך הנקודה $C(k,0,3)$ והנקודה $P(1,2+t,-3+2t)$ הוא:

$$(k-1,0-2-t,3+3-2t)\rightarrow(k-1,-2-t,6-2t)$$

כיוון שהווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{CP}$ מאונכים זה לזה, הרי שמכפלת כיווניהם שווה ל-0. כלומר:

$$(k-1,-2-t,6-2t)\cdot(0,1,2)=0$$

ומכאן המשוואה $-2-t+12-4t=0$ שפתרונה: $t=2$. נציב את $t=2$ בהצגה הכללית של הנקודה P ונקבל את שיעוריה: $P(1,4,1)$. המרחק בינה לבין הנקודה $C(k,0,3)$ הוא:

$$d_{PC}=\sqrt{(k-1)^2+(-4)^2+(3-1)^2}=\sqrt{20}\ \rightarrow\ (k-1)^2+(-4)^2+(3-1)^2=20$$

$$\rightarrow\ (k-1)^2=0\ \rightarrow\ \boxed{k=1}$$

ב. נסמן את הגובה היורד מהקדקוד D לבסיס ABC באמצעות h. נפח הטטראדר הוא:

$$V_{ABCD}=\frac{S_{ABC}\cdot h}{3}\ \rightarrow\ \frac{15h}{3}=30\ \rightarrow\ h=6$$

h הוא המרחק שבין קדקוד D ובין המישור ABC.

כדי להביע את אורכו של h עלינו למצוא את משוואת המישור ABC.

על מנת למצוא את משוואת המישור ABC, נחלץ שני ווקטורי כיוון הנמצאים במישור:

$\overrightarrow{AB}=(1-1,5-2,3+3)=(0,3,6)=(0,1,2)$ $\overrightarrow{AC}=(1-1,0-2,3+3)=(0,-2,6)=(0,-1,3)$

נמצא את וקטור המקדמים (a,b,c) של המישור ABC . וקטור המקדמים מאונך למישור ולכל וקטור העובר במישור ולכן :

$$\begin{matrix}(a,b,c)\cdot(0,-1,3)=0\\(a,b,c)\cdot(0,1,2)=0\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}-b+3c=0\\b+2c=0\end{matrix} \longrightarrow 5c=0 \longrightarrow c=0 \longrightarrow b=0$$

נניח כי : $a=1$ ונקבל כי משוואת המישור היא : $\pi: x+D=0$. על מנת למצוא את ערך D נציב במשוואה את נקודה A הנמצאת במישור ונקבל : $1+D=0$ ולכן $D=-1$.

משוואת המישור ABC המתקבלת היא : $\boxed{\pi:\ x-1=0}$.

כעת נביע את אורכו של h כמרחק הנקודה $D(p,p,p)$ ממישור הבסיס $\pi:\ x-1=0$.

$$d_h=\frac{|p-1|}{\sqrt{1^2}} \rightarrow 6=|p-1|$$

בגלל הערך המוחלט יתכנו שתי האפשרויות : $6=p-1$ ולכן $\boxed{p=7}$ או $-6p-1$ ולכן $\cancel{p=-5}$ (שנפסל כי $p>0$) כלומר שיעורי הנקודה הם : $D(7,7,7)$.

ההצגה הפרמטרית של הישר AD היא :

$$\underline{x}:\ (1,2,-3)+t(7-1,7-2,7+3) \rightarrow \boxed{\underline{x}:\ (1,2,-3)+t(6,5,10)}$$

ג. ההצגה הפרמטרית של הישר AD היא : $\underline{x}:(1,2,-3)+t(6,5,10)$.

ההצגה הפרמטרית של הישר BC היא : $\underline{x}:\ (1,5,3)+s(0,-5,0)$.

נבדוק תחילה אם יש תלות בין כיווני הווקטורים : $\frac{0}{6}\neq\frac{-5}{5}\neq\frac{0}{10}$.

ניתן לראות שאין תלות בין הכיוונים ולכן הישרים נחתכים או מצטלבים.

נבדוק האם יש נקודת חיתוך בין הישרים (האם יש פתרון למערכת המשוואות) :

$$\text{(I)}\quad 1+0\cdot s=1+6t \rightarrow \boxed{t=0}$$

$$\text{(II)}\quad 5-5\cdot s=2+5t \rightarrow 5t+5s=3$$

$$\text{(III)}\quad 3+0\cdot s=-3+10t \rightarrow \boxed{t=\frac{3}{5}}$$

למערכת המשוואות אין פתרון ולכן הישרים AD ו-BC מצטלבים.

ד. נתבונן בשיעורי ארבעת קדקודי הטטראדר. לכל הקדקודים שיעור x חיובי (הקטן שבהם הוא 1 והגדול הוא 7). שיעור ה-x של הנקודה בסעיף ד׳ הוא שלילי ולכן ניתן לקבוע בוודאות כי הנקודה נמצאת <u>מחוץ לטטראדר</u>. (שיעורי ה-x של כל הנקודות בתוך הטטראדר מוכרחות להימצא בתחום : $1<x<7$).

שאלה 3

בסדרה חשבונית שסכומה $210(1+i)$, האיבר הראשון הוא $i+20$ וההפרש $i-1$.

א. נמצא את מספר איברי הסדרה בעזרת הצבת הנתונים בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

$$S=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]:$$

$$210(i+1)=\frac{n}{2}\left[2(i+20)+(n-1)(i-1)\right]$$

$$\rightarrow\ 420(i+1)=n\left[2(i+20)+(n-1)(i-1)\right]$$

$$\rightarrow\ 420i+420=n\left[2i+40+ni-n-i+1\right]$$

$$\rightarrow\ 420i+420=n\left[i+ni+41-n\right]$$

$$\rightarrow\ 420i+420=ni+n^2i+41n-n^2$$

וכעת נשווה בין החלק הממשי והמדומה בכל אחד מהאגפים:

$$\begin{cases}420=41n-n^2\\420=n+n^2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}n^2-41n+420=0\\n^2+n-420=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}n_1=20\ ,\ n_2=21\\n_1=20\ ,\ n_2=-21\end{cases}\rightarrow\ n=20$$

הפתרון חייב לקיים את שתי המשוואות ולכן מספר האיברים בסדרה הוא: $\boxed{n=20}$.

ב. $Z_1=210(1+i)=210+210i$ הוא אחד מקדקודיו של מצולע משוכלל בעל $2m$ צלעות, אשר חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קודקודי המצולע לפי הסדר **נגד** כיוון השעון הם: $Z_1,Z_2,Z_3,...,Z_{2m}$.

1. נביע באמצעות m את שני הקדקודים הסמוכים ל- Z_1 משני צדיו:

נמצא את ההצגה הקוטבית של Z_1:

$$r=\sqrt{(210)^2+(210)^2}=\sqrt{2\cdot(210)^2}=210\cdot\sqrt{2}$$

$$\tan\alpha=\frac{210}{210}=1\ \rightarrow\ \alpha=45^\circ$$

ולכן מתקיים: $\boxed{Z_1=210\sqrt{2}\text{cis}45^\circ}$.

כיוון שבמצולע $2m$ צלעות, גודלה של כל אחת מהזוויות המרכזיות הוא: $\frac{360^\circ}{2m}=\frac{180^\circ}{m}$ ולכן זה ההפרש בין הזוויות המתאימות לכל אחד מקדקודי המצולע.

לכן, כדי למצוא את הקדקודים Z_2 ו- Z_{2m} יש להוסיף ולהחסיר בהתאמה $\frac{180^\circ}{m}$ מהזווית של Z_1.

קיבלנו ש: $\boxed{Z_2=210\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ+\frac{180^\circ}{m}\right)}$ וגם: $\boxed{Z_{2m}=210\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ-\frac{180^\circ}{m}\right)}$.

2. א. ראשית הצירים בנקודה O. נתון שהמכפלה $Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4$ היא מספר הנמצא ברביע השני במישור גאוס.

ראשית נבטא באמצעות m את הקדקודים Z_3 ו- Z_4 ואת ערך המכפלה:

$$Z_3 = 210\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ + \frac{180^\circ}{m} + \frac{180^\circ}{m}\right) = 210\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ + \frac{360^\circ}{m}\right)$$

$$Z_4 = 210\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ + \frac{180^\circ}{m} + \frac{180^\circ}{m} + \frac{180^\circ}{m}\right) = 210\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ + \frac{540^\circ}{m}\right)$$

ולכן:

$$Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 = \left(210\sqrt{2}\right)^3 \text{cis}\left(45^\circ + \frac{180^\circ}{m} + 45^\circ + \frac{360^\circ}{m} + 45^\circ + \frac{540^\circ}{m}\right) = \left(210\sqrt{2}\right)^3 \text{cis}\left(135^\circ + \frac{1080^\circ}{m}\right)$$

כעת, כיוון שנתון שהמכפלה מייצגת מספר הנמצא ברביע השני, נסיק שהזווית נמצאת בין 90° ל- 180°:

$$90^\circ < 135^\circ + \frac{1080^\circ}{m} \rightarrow -45^\circ < \frac{1080^\circ}{m} \rightarrow -45^\circ m < 1080^\circ \rightarrow -24 < m$$

וגם:

$$135^\circ + \frac{1080^\circ}{m} < 180^\circ \rightarrow \frac{1080^\circ}{m} < 45^\circ \rightarrow 1080^\circ < 45^\circ m \rightarrow 24 < m \rightarrow 25 \le m$$

ולכן נסיק ש: $50 \le 2m$.

כלומר למצולע יש מספר זוגי של צלעות הגדול או שווה ל-50.

ב. הזווית $\sphericalangle Z_7OZ_8$ היא זווית מרכזית במעגל החוסם ולכן לפי סעיף ב'1 גודלה הוא $\frac{180^\circ}{m}$.

בסעיף הקודם ראינו ש: $25 \le m$ ולכן מתקיים:

$$25 \le m \rightarrow \frac{1}{m} \le \frac{1}{25} \rightarrow \frac{180^\circ}{m} \le \frac{180^\circ}{25} \rightarrow \frac{180^\circ}{m} \le 7.2^\circ$$

מכאן שהזווית $\sphericalangle Z_7OZ_8$ קטנה או שווה ל- 7.2°.

שאלה 4

א. נתבונן בפונקציות $f(x)=\ln\left(e^{x}-e^{-x}\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)$.

הפונקציות מוגדרות כאשר הביטוי שבתוך ה-ln גדול מ-0.

בשתי הפונקציות מופיע סכום של שני ביטויים מעריכיים. ביטויים מעריכיים הם חיוביים לכל x ולכן שתי הפונקציות מוגדרות עבור כל x **ו<u>אין</u>** להן אסימפטוטות אנכיות.

למציאת אסימפטוטות <u>אופקיות</u> נבדוק מה קורה כאשר x שואף לאינסוף ולמינוס אינסוף.

בפונקציה $f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\ln\left(e^{\infty}+e^{-\infty}\right)\approx\ln\left(\infty+0^{+}\right)\approx\infty$$

כלומר, גרף הפונקציה שואף לאינסוף ולכן **<u>אין</u>** אסימפטוטה אופקית בתחום החיובי.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ln\left(e^{-\infty}+e^{\infty}\right)\approx\ln\left(0^{+}+\infty\right)\approx\infty$$

כלומר, גרף הפונקציה שואף לאינסוף ולכן **<u>אין</u>** אסימפטוטה אופקית בתחום השלילי.

בפונקציה $g(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\ln\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)=\ln\left(e^{-\infty}+e^{-2\infty}\right)\approx\ln\left(0^{+}+0^{+}\right)=-\infty$$

כלומר, גרף הפונקציה שואף למינוס אינסוף ולכן **<u>אין</u>** אסימפטוטה אופקית בתחום החיובי.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\ln\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)=\ln\left(e^{\infty}+e^{2\infty}\right)\approx\infty$$

כלומר, גרף הפונקציה שואף לאינסוף ולכן **<u>אין</u>** אסימפטוטה אופקית בתחום השלילי.

ב. פונקציה היא זוגית כאשר מתקיים $f(x)=f(-x)$ והיא אי זוגית כאשר מתקיים $-f(x)=f(-x)$.

נציב (x) ו- (-x) בכל אחת מהפונקציות ונבדוק האם הביטויים שווים:

$$f(x)=\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right),\ f(-x)=\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)\ \to\ \boxed{\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\ln\left(e^{-x}+e^{x}\right)}$$

כלומר, קיבלנו ש: $f(x)=f(-x)$ ולכן הפונקציה $f(x)$ זוגית.

$$g(x)=\ln\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)\ ,g(-x)=\ln\left(e^{x}+e^{2x}\right)\ \to\ \boxed{\ln\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)\neq\ln\left(e^{x}+e^{2x}\right)}$$

במקרה זה, ניתן להתקדם עם הפיתוח האלגברי של הביטויים שבתוך ה-ln ולהראות שהפונקציה $g(x)$ אינה זוגית ואינה אי זוגית. לשם הפשטות, במקרה זה ניתן להציב בפונקציה 1 ו: -1- ולהוכיח זאת על דרך השלילה.

ג. נגזור את הפונקציות ונשווה את הנגזרת ל-0. הביטוי בצד ימין חיובי לכל x ולכן אין נקודות קיצון:

$$g'(x)=\frac{-e^{-x}-2e^{-2x}}{e^{-x}+e^{-2x}}=0 \to -e^{-x}=2e^{-2x}$$

$$f'(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=0 \to e^{x}-e^{-x}=0 \to e^{x}=e^{-x} \to x=-x \to 2x=0 \to \boxed{x=0}$$

על מנת לבדוק את סוג הקיצון, נציב את $\boxed{x=0}$ בנגזרת השניה ונבדוק את <u>הסימן</u>.
לשם כך, מספיק לגזור את המונה בלבד:

$$f''(x)=e^{x}+e^{-x} \to f''(0)=e^{0}+e^{0} \to \boxed{+}$$ (מקוצרת למציאת סימן)

הנגזרת השניה חיובית כאשר $x=0$ ולכן הנקודה היא נקודת מינימום.
נציב $x=0$ בפונקציה המקורית ונמצא את שיעור ה-y של הנקודה:

$$f(0)=\ln\left(e^{0}+e^{0}\right)=\ln 2 \to \boxed{\min(0,\ln 2)}$$

ד. הערך המוחלט של שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B שווה, לכן נסמן: $x_B=t$ ו-$x_A=-t$.
הנקודות A ו-B נמצאות על הפונקציה $g(x)$ ולכן שיעוריהן הם: $A\left(-t,\ln\left(e^{t}+e^{2t}\right)\right)$ ו-
$B\left(t,\ln\left(e^{-t}+e^{-2t}\right)\right)$.
נביע את שיפוע הישר AB בעזרת הנוסחה לשיפוע דרך שתי נקודות:

$$m_{AB}=\frac{\ln\left(e^{-t}+e^{-2t}\right)-\ln\left(e^{t}+e^{2t}\right)}{t-(-t)}=\frac{\ln\left(\frac{1}{e^{t}}+\frac{1}{e^{2t}}\right)-\ln\left(e^{t}+e^{2t}\right)}{2t}=\frac{\ln\left(\frac{e^{2t}+e^{t}}{e^{t}\cdot e^{2t}}\right)-\ln\left(e^{t}+e^{2t}\right)}{2t}$$

$$\to m_{AB}=\frac{\ln\left(\frac{\frac{e^{2t}+e^{t}}{e^{t}\cdot e^{2t}}}{\frac{e^{t}+e^{2t}}{1}}\right)}{2t}=\frac{\ln\left(\frac{\cancel{e^{2t}+e^{t}}}{e^{t}\cdot e^{2t}}\cdot\frac{1}{\cancel{e^{t}+e^{2t}}}\right)}{2t}=\frac{\ln\left(\frac{1}{e^{t}\cdot e^{2t}}\right)}{2t}=\frac{\ln\left(\frac{1}{e^{3t}}\right)}{2t}=\frac{\ln\left(e^{-3t}\right)}{2t}=\frac{-3t}{2t}$$

$$\to \boxed{m_{AB}=-1.5}$$

כעת נמצא את שיפוע הפונקציה $g(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y. כלומר, נציב $x=0$ ב-$g'(x)$:

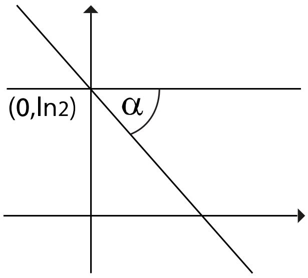
$$g'(0)=\frac{-e^{0}-2e^{0}}{e^{0}+e^{0}} \to \frac{-1-2}{1+1}=-\frac{3}{2} \to \boxed{g'(0)=-1.5}$$

כלומר, $m_{AB}=g'(0)=-1.5$ ולכן שני הישרים מקבילים.

ה. ראשית, נמצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות:

$$f(x)=g(x) \to \ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\ln\left(e^{-x}+e^{-2x}\right) \to e^{x}+e^{-x}=e^{-x}+e^{-2x} \to e^{x}=e^{-2x}$$

$\rightarrow\ x = 2x\ \rightarrow \boxed{x = 0}$



מצאנו בסעיף ג' כי הנקודה $x = 0$ היא נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.
כלומר שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה זו הוא 0.

מצאנו בסעיף ד' כי $g'(0) = -1.5$ וזהו שיפוע המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודה זו.

עלינו לבדוק מהי הזווית בין ישר ששיפועו -1.5 לבין ישר המקביל לציר ה-x.
נחשב זווית זו על פי הנוסחה:

$$\tan\alpha = m \rightarrow \tan\alpha = -1.5 \rightarrow \alpha = |-56.3^\circ| \rightarrow \boxed{\alpha = 56.3^\circ}$$

שאלה 5

א. נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)=\frac{4x\ln(x^2-1)}{x^2-1}$:

ראשית, עבור הביטוי במכנה נדרוש שיתקיים : $x^2-1\neq 0$ כלומר : $\boxed{x\neq \pm 1}$.

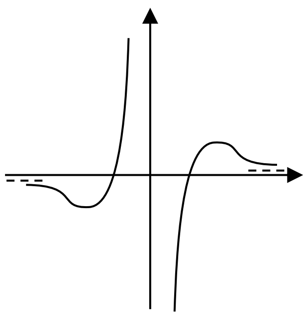
שנית, עבור הביטוי שבתוך ה-ln נדרוש שיתקיים : $0<x^2-1$ כלומר : $\boxed{x<-1 \text{ או } 1<x}$.

תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא חיתוך התחומים שמצאנו : $\boxed{x<-1 \text{ או } 1<x}$.

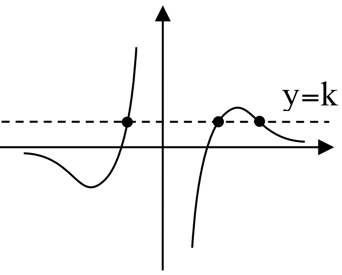
ב. נקבע אם הפונקציה זוגית או אי-זוגית על ידי הצבת הביטוי $(-x)$ במקום x :

$$f(-x)=\frac{4(-x)\ln\left((-x)^2-1\right)}{(-x)^2-1}=\frac{-4x\ln(x^2-1)}{x^2-1}=-f(x)$$

קיבלנו $f(-x)=-f(x)$ ומכאן שהפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.



ג. בסעיף ב' ראינו שהפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. לכן, גרף הפונקציה סימטרי ביחס לראשית הצירים. כלומר, החלק של הגרף הנמצא משמאל לציר ה-y הוא שיקוף הפוך של החלק של הגרף הנמצא מימין לציר ה-y.
מכאן שגרף הפונקציה בכל תחום הגדרתה הוא הגרף המופיע משמאל.



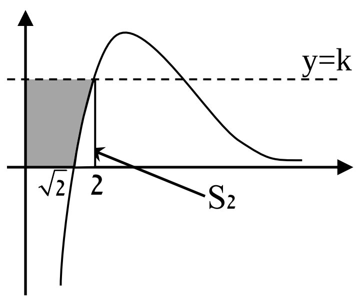
ד. הישר $y=k$ מקביל לציר ה-x וחותך את גרף הפונקציה $f(x)$ ב-3 נקודות. כיוון שנתון ששתיים מבין נקודות החיתוך שלו עם הפונקציה הן ברביע הראשון נוכל להסיק ש- $0<k$ וגם שהישר $y=k$ עובר מתחת לנקודת המקסימום של הפונקציה.
נתון ששיעור ה-x של נקודת החיתוך האמצעית הוא 2. נמצא את שיעור ה-y :

$$f(2)=\frac{4\cdot 2\cdot \ln\left(2^2-1\right)}{2^2-1}=\frac{8\ln 3}{3}$$

כמו כן, נמצא את נקודת החיתוך של הגרף עם הקרן החיובית של ציר ה-x :

$$f(x)=0\ \rightarrow\ \frac{4x\ln\left(x^2-1\right)}{x^2-1}=0\ \xrightarrow{x\neq 0}\ \ln\left(x^2-1\right)=0$$

$$\rightarrow\ x^2-1=1\ \rightarrow\ x^2=2\ \rightarrow\ x=\sqrt{2}$$



כעת נוכל לסמן את השטח המבוקש S_1 בשרטוט שמשמאל :

כדי לחשב את השטח המבוקש S_1, נמצא את שטח המלבן המופיע בשרטוט ונחסר ממנו את השטח S_2.

ראשית, אורכו ורוחבו של המלבן נקבעים לפי שיעורי הנקודה $\left(2,\ \frac{8\ln 3}{3}\right)$ ולכן:

$$S_{\text{מלבן}} = 2\cdot\frac{8\ln 3}{3} = \frac{16\ln 3}{3}$$

שנית, כדי למצוא את השטח S_2 נחשב את האינטגרל הבא בעזרת שיטת ההצבה:

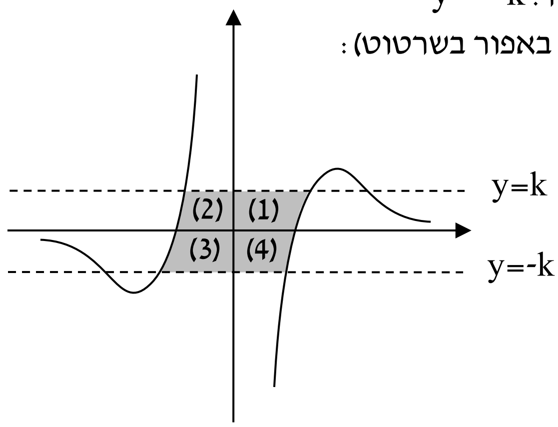
$$S_2 = \int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{2\cdot 2x\ln\left(x^2-1\right)}{x^2-1}dx \rightarrow \begin{bmatrix} u=\ln\left(x^2-1\right) \\ du=\frac{2x}{x^2-1}dx \end{bmatrix} \rightarrow \int 2u\,du = u^2\Big| \rightarrow \left[u=\ln\left(x^2-1\right)\right]$$

$$\rightarrow \ln^2\left(x^2-1\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = \ln^2\left(2^2-1\right) - \left[\ln^2\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-1\right)\right] = \ln^2 3$$

לסיכום, השטח S_1 המבוקש הוא:

$$S_1 = S_{\text{מלבן}} - S_2 = \frac{16\ln 3}{3} - \ln^2 3 \approx 4.65 \text{ יח״ר}$$

ה. נשרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ואת הישרים $y=k$ ו: $y=-k$
על אותה מערכת צירים ונסמן את השטח S המבוקש (מודגש באפור בשרטוט):



השטח (1) הוא השטח שחושב בסעיף ד׳. בסעיף ב׳ מצאנו שהפונקציה $f(x)$ אי-זוגית ולכן השטח (3) שווה לשטח (1).

השטח (4) חסום מלמטה על ידי הישר $y=-k$ ולכן המרחק בין "הרצפה" של השטח לבין ציר ה-x שווה למרחק בין "התקרה" של השטח (1) לבין ציר ה-x. כמו כן, שני השטחים חסומים משמאל על ידי ציר ה-y ומימין על ידי גרף הפונקציה.
שני השטחים נבדלים זה מזה בכך שבשטח (4) הפונקציה התוחמת מימין הולכת ומתקרבת לציר ה-y כיוון שהיא הולכת ושואפת לאסימפטוטה האנכית שלה. מכך נוכל להסיק ששטח (4) קטן משטח (1).

ושוב, כיוון שהפונקציה $f(x)$ אי-זוגית, השטח (2) שווה לשטח (4) ונוכל להסיק שהשטח S מורכב מפעמיים השטח שחושב בסעיף ד׳: השטחים (1) + (3) ופעמיים שטח שקטן מהשטח שחושב בסעיף ד׳: השטחים (2) + (4) ולכן הוא קטן מ-4 פעמים השטח שחושב בסעיף ד׳.

לסיכום, השטח S אינו גדול **יותר מפי ארבעה** מהשטח שבסעיף ד׳ ולכן הטענה שגויה.

פתרון מלא - מבחן 10

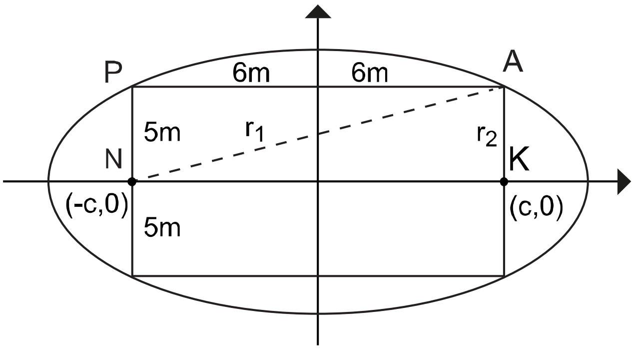
שאלה 1

א. נתבונן בשרטוט. הצירים חוצים את צלעות המלבן.

לכן, ערך ה-x של הנקודה $K(c,0)$ (מוקד הפרבולה) הוא 6m. לכן נקבל: $\boxed{c = 6m}$.

נזכור כי באליפסה מתקיים: $r_1 + r_2 = 2a$.

נחשב את אורכם של שני הרדיוסים לנקודה A.



את אורכו של r_1 נמצא בעזרת משפט פיתגורס:

$$r_1 = \sqrt{(12m)^2 + (5m)^2} = \sqrt{169m^2} = 13m$$

$$r_2 = 5m$$

$$r_1 + r_2 = 2a \rightarrow 13m + 5m = 2a \rightarrow \boxed{a = 9m}$$

נזכור כי $a^2 = b^2 + c^2$ ונקבל:

$$81m^2 = b^2 + 36m^2 \rightarrow \boxed{b^2 = 45m^2}$$

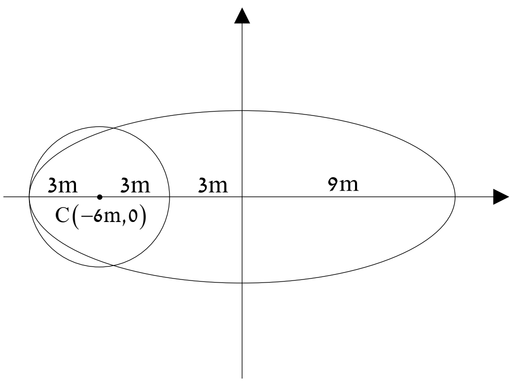
כלומר, משוואת האליפסה היא:

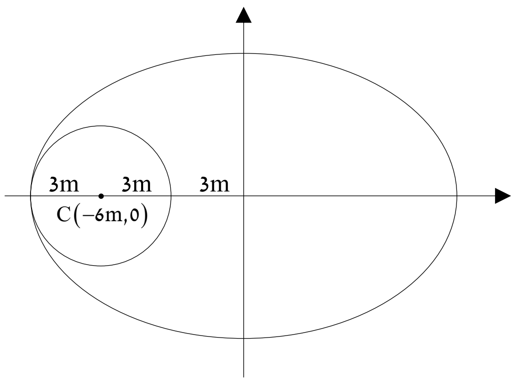
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{81m^2} + \frac{y^2}{45m^2} = 1}$$

ב. הנקודה C היא המוקד השמאלי של האליפסה ונתונה הנקודה D כך ש: $CD = t$. ידוע שמרחקה של הנקודה D מהנקודה C הוא <u>קבוע</u> וערכו t. כיוון שאוסף כל הנקודות במרחק קבוע מנקודה מגדיר מעגל סביב נקודה זו נסיק שהמקום הגיאומטרי הוא מעגל שמרכזו ב-$C(-6m,0)$ ורדיוסו שווה למרחק t.

כעת נוכל לקבוע עבור כל טענה האם היא נכונה או שגויה:

i. <u>ייתכן שקיימת נקודת מפגש אחת</u>: **הטענה נכונה**. נבחן את המצבים האפשריים המתקבלים כאשר רדיוס המעגל שווה למרחק שלו מנקודת הקצה השמאלית של האליפסה:





כפי שניתן לראות, עבור האפשרות הימנית קיבלנו מעגל שמשיק לאליפסה מבפנים ולכן קיימת נקודת מפגש אחת כנדרש. במידה ועבור $t = 3m$ האליפסה חותכת את המעגל בנקודות נוספות פרט לנקודת ההשקה עומדת בפנינו האפשרות השנייה וכעת נוכל לבחור $t = 15m$ ולקבל מעגל שמשיק לאליפסה מבחוץ (בנקודת

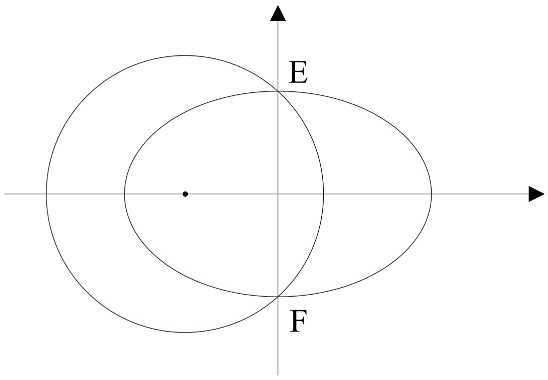
הקצה הימנית שלה). מכאן שבכל מקרה ניתן לבחור ערך של t עבורו קיימת נקודת מפגש יחידה בין האליפסה והמעגל ולכן **הטענה נכונה**.

ii. <u>יתכן שהמקום הגיאומטרי משיק לאליפסה בנקודה אחת וגם משיק לציר ה-y</u> : **הטענה שגויה**.

כיוון שמרכז המעגל נמצא משמאל לציר ה-y ההשקה ביניהם אפשרית רק עבור הקצה הימני של המעגל. ראינו בסעיף הקודם שאפשרות זו מתקיימת עבור $t = 3m$ אך במצב זה הקצה הימני ביותר של המעגל חותך את ציר ה-x בנקודה $(-3m,0)$ ואינו פוגש כלל את ציר ה-y (כמתואר בשרטוט הימני בסעיף הקודם) ולכן הטענה שגויה.

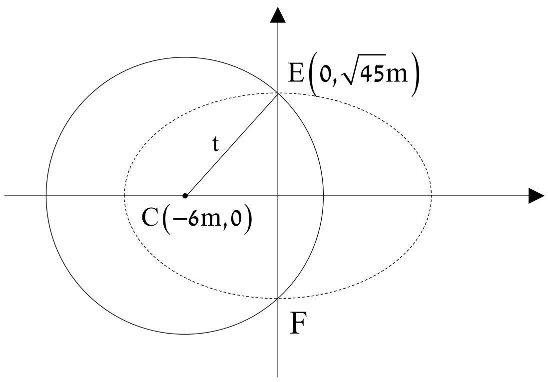
ג. ראשית הצירים בנקודה O. נתון שהאליפסה והמקום הגיאומטרי נפגשים בנקודות E ו-F. המעגל והאליפסה סימטריים ביחס לציר ה-x ולכן נוכל להסיק שנקודות החיתוך ביניהם E ו-F הן בעלות אותו שיעור x.

כמו כן, ידוע שהמרחק EF הוא מקסימלי וכיוון שמדובר על שתי נקודות <u>בעלות אותו שיעור x</u> על היקף האליפסה נסיק שבהכרח מדובר על נקודות החיתוך עם ציר ה-y.



כעת נביע את משוואת האליפסה באמצעות t:

ממשוואת האליפסה שמצאנו בסעיף א' ניתן להסיק את שיעורי הנקודה: $E\left(0,\sqrt{45}\cdot m\right)$ ובסעיף הקודם מצאנו גם את המוקד השמאלי: $C(-6m,0)$.



כיוון שרדיוס המעגל הוא t נוכל לחשב:

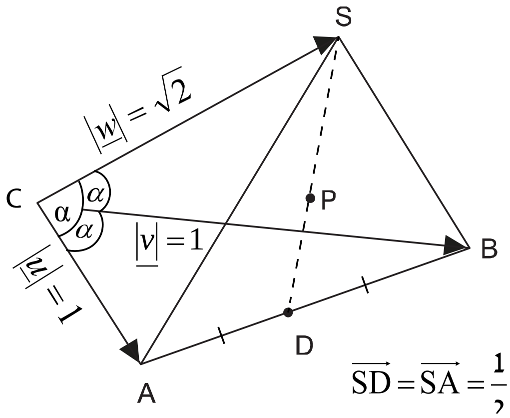
$$t=\sqrt{(-6m-0)^2+\left(0-\sqrt{45}m\right)^2} \rightarrow t=\sqrt{36m^2+45m^2} \rightarrow t=\sqrt{81m^2} \rightarrow t=9m \rightarrow m=\frac{1}{9}t$$

לבסוף נציב במשוואת האליפסה $\frac{x^2}{81m^2}+\frac{y^2}{45m^2}=1$ ונקבל:

$$\frac{x^2}{81m^2}+\frac{y^2}{45m^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{81\left(\frac{1}{9}t\right)^2}+\frac{y^2}{45\left(\frac{1}{9}t\right)^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{81\cdot\frac{1}{81}t^2}+\frac{y^2}{45\cdot\frac{1}{81}t^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{t^2}+\frac{9y^2}{5t^2}=1 \ /\cdot 5t^2$$

$$\rightarrow \boxed{5x^2+9y^2=5t^2}$$

שאלה 2



א. נסמן את הנתונים בשרטוט:

הנקודה P היא מפגש התיכונים (מרכז הכובד) במשולש ΔABS.

כלומר: $\overrightarrow{SP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SD}$. נביע תחילה את הווקטור $\overrightarrow{SD}$:

$$\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{SD}=-\underline{w}+\underline{u}+\frac{1}{2}(-\underline{u}+\underline{v}) \rightarrow \overrightarrow{SD}=-\overline{w}+\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$$

$$\overrightarrow{SP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SD} \rightarrow \overrightarrow{SP}=\frac{2}{3}\left(-\underline{w}+\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}\right) \rightarrow \boxed{\overrightarrow{SP}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}-\frac{2}{3}\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SP}=\underline{w}+\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}-\frac{2}{3}\underline{w} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}}$$

ב. על מנת להביע את הזווית $\sphericalangle SPC$ ניעזר במכפלה הסקלארית של הווקטורים $\overrightarrow{SP}$ ו- $\overrightarrow{CP}$:

$$\cos(\sphericalangle SPC)=\frac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{SP}}{|\overrightarrow{CP}|\cdot|\overrightarrow{SP}|} \rightarrow \cos(\sphericalangle SPC)=\frac{\left(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}-\frac{2}{3}\underline{w}\right)}{|\overrightarrow{CP}|\cdot|\overrightarrow{SP}|}$$

כעת נשים לב שאין צורך להמשיך ולפתח את המכנה. על מנת להוכיח שהזווית $\sphericalangle SPC$ קהה, מספיק להוכיח כי $\cos(\sphericalangle SPC)<0$, כיוון שלפי המעגל הטריגונומטרי, קוסינוס של זווית קהה ייתן תמיד תוצאה שלילית.

במכנה מופיעה מכפלת האורכים $|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{PS}|$ ולכן המכנה חיובי. כדי לוודא ש: $\cos(\sphericalangle SPC)$ הוא שלילי, מספיק לבדוק את סימן המונה בלבד. נפתח את המכפלה במונה:

$$\cos(\sphericalangle SPC)=\frac{-\frac{2}{9}\underline{u}\cdot\underline{w}+\frac{1}{9}\underline{u}^2+\frac{1}{9}\underline{u}\cdot\underline{v}-\frac{2}{9}\underline{v}\cdot\underline{w}+\frac{1}{9}\underline{u}\cdot\underline{v}+\frac{1}{9}\underline{v}^2-\frac{2}{9}\underline{w}^2+\frac{1}{9}\underline{u}\cdot\underline{w}+\frac{1}{9}\underline{v}\cdot\underline{w}}{|\overrightarrow{CP}|\cdot|\overrightarrow{SP}|}$$

נכנס איברים דומים:

$$\cos(\sphericalangle SPC)=\frac{-\frac{1}{9}\underline{u}\cdot\underline{w}+\frac{2}{9}\underline{u}\cdot\underline{v}-\frac{1}{9}\underline{v}\cdot\underline{w}+\frac{1}{9}\underline{u}^2+\frac{1}{9}\underline{v}^2-\frac{2}{9}\underline{w}^2}{|\overrightarrow{CP}|\cdot|\overrightarrow{SP}|}$$

בטרם נשווה את שני האגפים יש להביע בנפרד כל אחת משלוש המכפלות הסקלריות שאינן ניתנות לפירוק:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha \rightarrow \underline{u}\cdot\underline{v}=1\cdot1\cdot\cos\alpha \rightarrow \boxed{\underline{u}\cdot\underline{v}=\cos\alpha}$$

$$\underline{u}\cdot\underline{w}=|\underline{u}|\cdot|\underline{w}|\cdot\cos\alpha \rightarrow \boxed{\underline{u}\cdot\underline{w}=\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}$$

$\underline{v}\cdot\underline{w}=|\underline{v}|\cdot|\underline{w}|\cdot\cos\alpha \;\rightarrow\; \boxed{\underline{v}\cdot\underline{w}=\sqrt{2}\cos\alpha}$

נחזור ונציב במשוואה:

$$\cos(\sphericalangle SPC)=\frac{-\frac{1}{9}\cdot\sqrt{2}\cos\alpha+\frac{2}{9}\cos\alpha-\frac{1}{9}\cdot\sqrt{2}\cos\alpha+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\cdot 2}{|\overrightarrow{CP}|\cdot|\overrightarrow{SP}|}$$

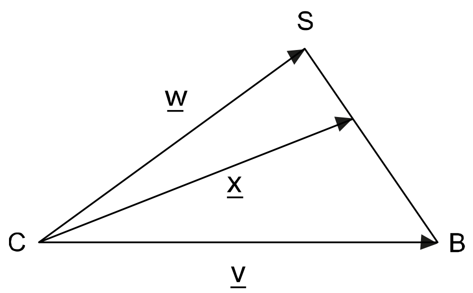
$$\rightarrow\; \cos(\sphericalangle SPC)=\frac{-0.222-0.092\cos\alpha}{|\overrightarrow{CP}|\cdot|\overrightarrow{SP}|}$$

על פי הנתון $0^\circ<\alpha<90^\circ$ ולכן $0<\cos\alpha$.

מכך נובע כי הביטוי במונה הוא שלילי ומתקבל היחס: $\boxed{\cos(\sphericalangle SPC)=\frac{-}{+}}$.

לסיכום, הזווית $\sphericalangle SPC$ היא קהה בתחום שהוגדר.

ג. הווקטור: $\underline{x}=\frac{(m+1)}{2}\cdot\underline{v}+\frac{(2-3m)}{4}\cdot\underline{u}+\frac{2m}{3}\cdot\underline{w}$ יוצא מהקדקוד C לכיוון המישור ABC.



1) נתבונן בשרטוט של המישור BCS. הוקטורים $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ יוצאים מהקדקוד C וניתן לומר שהם מגדירים את המישור וכל וקטור נוסף שיעבור במישור, כמו הווקטור $\underline{x}$, הוא קומבינציה ליניארית של שניהם ולכן: $\boxed{\underline{x}=a\cdot\underline{v}+b\cdot\underline{w}}$. כלומר, כל עוד הווקטור $\underline{x}$ מוכל במישור המוגדר על ידי הוקטורים $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$, אין לו רכיב של $\underline{u}$ ולכן למעשה, המקדם של $\underline{u}$ במשוואה שלו צריך להיות 0. כלומר, **התנאי הראשון** ש-m צריך לקיים הוא: $\boxed{m=\frac{2}{3}} \leftarrow \frac{2-3m}{4}=0$.

בנוסף, במקרה המיוחד המוצג בשאלה, בו הוקטור $\underline{x}$ יוצא מאותה נקודה כמו שני הוקטורים $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ המגדירים את המישור ומסתיים על הישר המחבר את קצותיהם, מתקיים גם התנאי: $\boxed{a+b=1}$.

נשים לב כי בווקטור $\underline{x}$ המקדמים הם: $a=\frac{m+1}{3}$ ו- $b=\frac{2m}{3}$.

כלומר, **התנאי השני** ש-m צריך לקיים הוא: $\boxed{m=\frac{2}{3}} \leftarrow \frac{m+1}{3}+\frac{2m}{3}=1$.

כיוון **שבשני התנאים** קיבלנו: $m=\frac{2}{3}$, נוכל לקבוע כי עבורו, אכן מתקיים המצב הדרוש. אם היינו מקבלים ערכים שונים של m בכל אחד משני התנאים שהצגנו, הרי שהמשמעות היתה שאין ערך m אחיד שמקיים את המצב המבוקש ובמקרה היפותטי זה התשובה היתה: אף m.

2) שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ יוצאים מהקדקוד C וניתן לומר שהם מגדירים את המרחב. כלומר, כל וקטור נוסף שיעבור במרחב, כמו הווקטור $\underline{x}$, הוא קומבינציה ליניארית של שלושתם

ולכן : $\boxed{\underline{x} = a \cdot \underline{v} + b \cdot \underline{u} + c \cdot \underline{w}}$.

בנוסף, במקרה המיוחד המוצג בשאלה, בו הוקטור $\underline{x}$ יוצא מאותה נקודה כמו שלושת הוקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ ומסתיים על אותו מישור כמוהם, מתקיים גם התנאי : $a+b+c=1$.

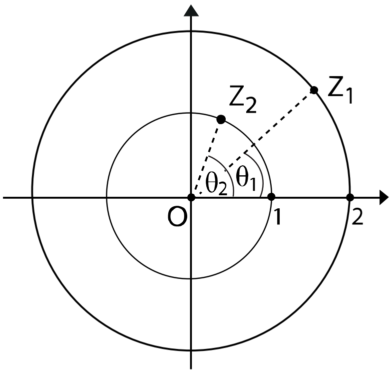
בהתאם, על מנת שהווקטור $\underline{x}$ יחתוך את המישור ABC ויסתיים <u>מעבר</u> אליו מוכרח להתקיים : $\boxed{a+b+c>1}$.

נשים לב כי בווקטור $\underline{x}$: $a=\frac{m+1}{3}$, $b=\frac{2-3m}{4}$ ו- $c=\frac{2m}{3}$. נציב ונקבל :

$$a+b+c>1 \;\rightarrow\; \frac{m+1}{3}+\frac{2-3m}{4}+\frac{2m}{3}>1 \;\rightarrow\; 4(m+1)+3(2-3m)+8m>12$$

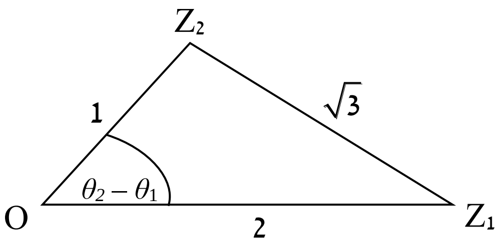
$$\rightarrow\; 3m>2 \;\rightarrow\; \boxed{m>\frac{2}{3}}$$

שאלה 3



א. נכתוב את המספרים בתצוגה הקוטבית: $Z_1 = 2\text{cis}\theta_1$ ו- $Z_2 = \text{cis}\theta_2$.

לפי הנתון מתקיים: $\theta_1 < \theta_2$ ולכן הזווית הכלואה בין רדיוסי המספרים Z_1 ו- Z_2 היא למעשה הזווית $\theta_2 - \theta_1$.



נתבונן בשרטוט של המשולש OZ_1Z_2.

נתונים לנו אורכי שלוש הצלעות.

נוכל למצוא את הזווית $\theta_2 - \theta_1$ בעזרת משפט הקוסינוסים:

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos\left(\theta_2-\theta_1\right) \rightarrow \cos\left(\theta_2-\theta_1\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\theta_2-\theta_1 = 60^\circ}$$

כעת נחשב את היחס $\frac{Z_2}{Z_1}$:

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\text{cis}\theta_2}{2\text{cis}\theta_1} = \frac{1}{2}\text{cis}\left(\underbrace{\theta_2-\theta_1}_{60^\circ}\right) \rightarrow \boxed{\frac{Z_2}{Z_1} = 0.5\text{cis}60^\circ}$$

ב. נתונה סדרה הנדסית שבה: $a_1 = Z_1$ ו: $a_2 = Z_2$.

נתון: $\arg(Z_1) = \alpha$ ולכן האיבר הראשון בסדרה הוא: $a_1 = 2\text{cis}\alpha$.

בעזרת סעיף א' נסיק שמנת הסדרה היא: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{Z_2}{Z_1} = 0.5\text{cis}60^\circ$.

כדי למצוא את **הארגומנט** של האיבר הכללי נציב את a_1 ואת q בנוסחת האיבר הכללי a_n:

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1} \rightarrow a_n = 2\text{cis}\alpha\cdot\left(0.5\text{cis}60^\circ\right)^{n-1}$$

כיוון שנדרשנו למצוא את ה**ארגומנט** בלבד, נוכל להתעלם מהחלקים בביטוי שאינם בתוך cis. נקבל:

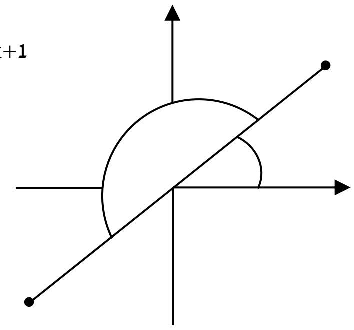
$$\text{cis}\alpha\cdot\left(\text{cis}\left[\left(n-1\right)60^\circ\right]\right) = \text{cis}\left[\alpha+\left(n-1\right)60^\circ\right] \rightarrow \arg(a_n) = \alpha+\left(n-1\right)60^\circ$$

ג. כדי להראות שהאיברים שמיקומיהם $3k+1$ ו: $6k+1$ נמצאים על אותו ישר העובר דרך ראשית הצירים, עלינו להראות שלשני האיברים האלו יש את אותו הארגומנט. אורך הרדיוס של כל אחד מהאיברים, אינו רלבנטי. נציב את המיקומים $3k+1$ ו: $6k+1$ בארגומנט שמצאנו לאיבר הכללי בסדרה:

$$\text{Arg}(a_{3k+1})=\alpha+60^\circ(3k+1-1)\rightarrow\ \alpha+180^\circ k$$

$$\text{Arg}(a_{6k+1})=\alpha+60^\circ(6k+1-1)\rightarrow\ \alpha+360^\circ k=\alpha$$

נציג את המספרים במישור גאוס.
הפרש הזוויות בין הארגומנטים של שני האיברים הוא $180^\circ k$.
מכאן, שעבור כל k טבעי, שני האיברים נמצאים על אותו ישר העובר דרך ראשית הצירים.



שאלה 4

א. נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת ל-0:

$$f'(x)=\cancel{e^{\frac{2x-b}{x^2-4}}}\cdot\left(\frac{2(x^2-4)-2x(2x-b)}{\cancel{(x^2-4)^2}}\right)=0\ \rightarrow\ 2(x^2-4)-2x(2x-b)=0\ \rightarrow\ 2x^2-8-4x^2+2xb=0$$

נציב $x=1$, שיעור ה-x של נקודת הקיצון:

$$2\cdot1-8-4\cdot1+2b=0\ \rightarrow\ 2b=10\ \rightarrow\ \boxed{b=5}$$

הפונקציה אינה מוגדרת כאשר הביטוי במכנה של המעריך מתאפס: $x^2-4=0\ \rightarrow\ \boxed{x\neq\pm2}$

ב. 1) כדי למצוא את נקודת החיתוך עם ציר ה-y, נציב $x=0$ בפונקציה $f(x)$:

$$f(0)=e^{\frac{-5}{-4}}\ \rightarrow\ 3.49\ \rightarrow\ \boxed{(0,3.49)}$$

ניתן לראות כי הביטוי המעריכי $f(x)=e^{\frac{2x-5}{x^2-4}}$ אינו מתאפס ולכן <u>אין</u> נקודת חיתוך עם ציר ה-x.

2) כמו שראינו בסעיף א', רק הביטוי שבתוך הסוגריים יכול להתאפס. נציב $b=5$ ונשווה את הביטוי ל-0:

$$2x^2-8-4x^2+2xb=0\ \rightarrow\ 2x^2-8-4x^2+10x=0\ \rightarrow\ -2x^2+10x-8=0$$

פתרונות המשוואה הם: $x=1$ ו- $x=4$.

נציב בפונקציה $f(x)$ את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון ונמצא את שיעורי ה-y שלהן:

$$f(1)=e\ \rightarrow\ \boxed{(1,e)}$$

$$f(4)=1.28\rightarrow\ \boxed{(4,1.28)}$$

כדי למצוא את סוגי נקודות הקיצון, נבדוק את תחומי העליה והירידה בעזרת טבלת ערכים :

תחום x	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$2<x<4$	$x=4$	$4<x$
נציב בנגזרת	-3	אס'	0	קיצון	1.5	אס'	3	קיצון	5
סימן הנגזרת	-		+		+		-		-
הפונקציה עולה/יורדת	↘		↘	min	↗		↗	max	↘

מכאן שתחומי העליה הם : $\boxed{1<x<2}$ או $\boxed{2<x<4}$ ותחומי הירידה : $\boxed{x<-2}$ או $\boxed{-2<x<1}$ או $\boxed{4<x}$.

בהתאם, נקודות הקיצון שקיבלנו הן : $\boxed{\min(1,e)}$, $\boxed{\max(4,1.28)}$.

3) האסימפטוטות האנכיות הן $\boxed{x=2}$ ו : $\boxed{x=-2}$

למציאת אסימפטוטות אופקיות נבדוק מה קורה כאשר x שואף לאינסוף ולמינוס אינסוף.

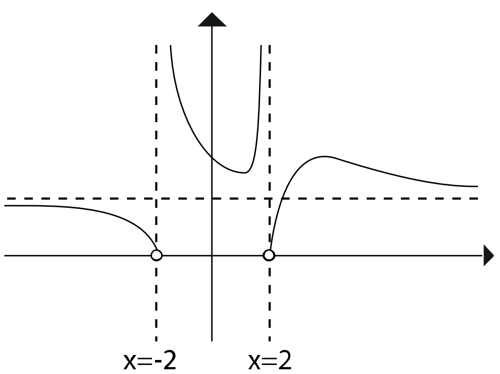
$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x-5}{x^2-4}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\frac{2x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{0^+-0^+}{1-0^+}} = e^0 = 1$$

כלומר, הפונקציה שואפת ל-1 ולכן האסימפטוטה האופקית בתחום החיובי היא $\boxed{y=1}$.

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{2x-5}{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{\frac{2x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{0^--0^+}{1-0^+}} = e^0 = 1$$

ולכן גם בתחום השלילי האסימפטוטה האופקית היא $\boxed{y=1}$.

ג. נשרטט את הסקיצה על סמך החקירה עד כה.
ניתן לשרטט את הפונקציה בתחום שבין שתי האסימפטוטות האנכיות אך אנו נתקלים בבעיה ככל שמתקרבים לשתי האסימפטוטות האנכיות, מימין ל- $x=2$ ומשמאל ל- $x=-2$.
לגרף הפונקציה אין נקודות חיתוך עם ציר ה-x ולכן נחשוד כי לפונקציה יש למעשה שתי נקודות אי רציפות סליקה ("חורים" בגרף הפונקציה) : $(-2,0)$ ו- $(2,0)$.
בדיקה קצרה על ידי הצבת $x=2.001$ ו- $x=-2.001$ תראה שהפונקציה אכן שואפת ל-0 ולכן אלו אכן נקודות אי רציפות סליקה.



ד. נתון: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$. כלומר $g(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{2x-5}{x^2-4}}}$ ולאחר סידור, למעשה נקבל: $g(x)=e^{-\frac{2x-5}{x^2-4}}$.

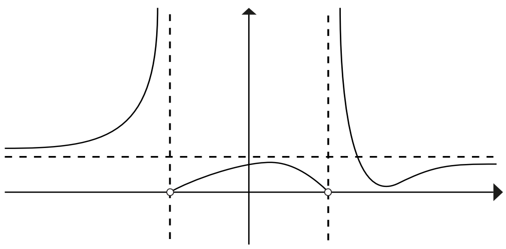
הטרנספורמציה $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ מוסיפה סימן (-) ל<u>מעריך</u> של הפונקציה $f(x)$. **אין צורך** בחקירה מלאה של הפונקציה $g(x)$ כדי לשרטט את גרף הפונקציה. נבחן כיצד משתנים ערכי ה-y במעבר מגרף $f(x)$ לגרף $g(x)$. למעשה, עבור ערך x ספציפי, ערך ה-y בפונקציה $g(x)$ **הופכי** לערך ה-y בפונקציה $f(x)$.

נחקור את השינויים שמתרחשים במעבר מהגרף של $f(x)$ לגרף של $g(x)$:

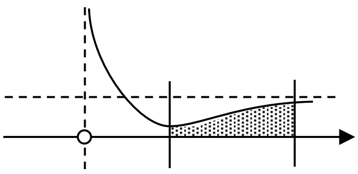
- **אסימפטוטות:** האסימפטוטות האופקיות והאנכיות לא צפויות להשתנות וכך גם ערכי ה-x של נקודות הקיצון. בניתוח ה-lim שביצענו עבור $f(x)$, הוספת מינוס לא תשפיע על התוצאה הסופית.
- **תחומי העליה והירידה:** הוספת סימן (-) למעריך החזקה, תגרום לשינוי סימן הנגזרת בכל אחד מהתחומים ולמעשה יתהפכו תחומי העליה והירידה של כל הגרף: <u>תחומי העליה הם כעת תחומי הירידה ולהפך</u>.
- כל ערכי ה-y, של כל הנקודות על הגרף הם כעת בחזקת (-1). מכאן שנקודות הקיצון החדשות הן:

$\boxed{\max\left(1,\frac{1}{e}\right)}$ ו: $\boxed{\min\left(4,\frac{1}{1.28}\right)}$ ונקודת החיתוך עם ציר ה-y היא: $\boxed{\left(0,\frac{1}{3.49}\right)}$.

על סמך ממצאים אלו, נשרטט את הסקיצה של הפונקציה $g(x)$:

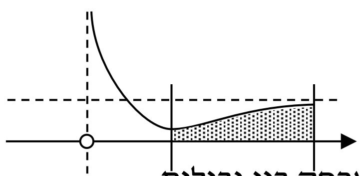


ה. i. ככל ש-n גדול יותר, גדל ערכו של הביטוי: $\int_{n+4}^{n+7} g(x)\ dx$: <u>הטענה נכונה</u>.



הגבול השמאלי של האינטגרל הוא $n+4$ וכיוון שלכל בחירה של n טבעי נקבל: $4<n+4$ נסיק שהשטח המבוקש נמצא <u>כולו</u> מימין לנקודת המינימום שבה $x=4$, כמתואר בשרטוט משמאל.

כיוון שגרף הפונקציה הולך ומתקרב אל האסימפטוטה האופקית $y=1$ ככל ש"נזיז" את השטח הצבוע ימינה, על ידי בחירה של ערכי n הולכים וגדלים, נקבל ש"התקרה" של השטח הולכת ומתקרבת לאסימפטוטה האופקית ולכן השטח הולך וגדל והטענה נכונה.



ii. קיים ערך של n שעבורו מתקיים: $\int_{n+4}^{n+7} g(x)\ dx>3$: <u>הטענה שגויה</u>.

לכל בחירה של n טבעי, השטח המתקבל חסום על ידי מלבן שאורכו שווה למרחק בין גבולות האינטגרל: $n+7-(n+4)=3$ ורוחבו נקבע על ידי האסימפטוטה האופקית $y=1$.

לכן שטח המלבן החוסם הוא: $S=3\cdot 1=3$.

המלבן חוסם את השטח באינטגרל ולכן השטח המבוטא על ידי האינטגרל בהכרח קטן משטח המלבן ומכאן שהוא בהכרח תמיד יהיה קטן מ-3 והטענה שגויה.

שאלה 5

א. לפי הגדרת פונקציית ה-ln, הפונקציה הנתונה מוגדרת לכל $x > 0$ ויש לה אסימפטוטה אנכית ב-$x = 0$.

ב. נקודת החיתוך עם ציר ה-y מתקבלת עבור $x = 0$. כיוון שהפונקציה לא מוגדרת עבור שיעור x זה, לא קיימת נקודת חיתוך עם ציר ה-y. נמצא את נקודות החיתוך עם ציר ה-x:

$$f(x) = 0 \rightarrow (\ln^2 x - 2\ln x)^n = 0 \rightarrow \ln^2 x - 2\ln x = 0 \rightarrow \ln x(\ln x - 2) = 0$$

מכאן ששני הפתרונות הם:

$$\ln x = 0 \rightarrow x_1 = e^0 \rightarrow x_1 = 1$$

$$\ln x - 2 = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x_2 = e^2$$

לכן, נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים הן: $(1,0)$, $(e^2,0)$.

ג. נמצא את הנגזרת $f'(x)$:

$$f'(x) = n(\ln^2 x - 2\ln x)^{n-1} \cdot \left(\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right) = \frac{2n}{x}(\ln^2 x - 2\ln x)^{n-1} \cdot (\ln x - 1)$$

הנגזרת מתאפסת עבור:

$$\text{I. } \ln^2 x - 2\ln x = 0 \rightarrow x_1 = 1 ,\ x_2 = e^2 \qquad \text{II. } \ln x - 1 = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x_3 = e$$

את שיעורי ה-y של x_1, x_2 מצאנו בסעיף ב'. נמצא את שיעור ה-y של x_3:

$$f(e) = (\ln^2 e - 2\ln e)^n = (1^2 - 2)^n = (-1)^n$$

לכן, הנקודות עבורן מתקיים $f'(x) = 0$ הן: $\boxed{(1,0),\ (e^2,0) \text{ ו- } (e,(-1)^n)}$.

כיוון ששיעור ה-y של הנקודה השלישית תלוי בזוגיות של n, נבדוק את סוג הקיצון בעזרת טבלאות עליה וירידה עבור n זוגי ועבור n אי-זוגי:

עבור n זוגי:

תחום x	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < e$	$x = e$	$e < x < e^2$	$x = e^2$	$e^2 < x$
נציב בנגזרת	0.5	קיצון	2	קיצון	3	קיצון	8
סימן הנגזרת	-		+		-		+
הפונקציה עולה/יורדת	↘	min	↗	max	↘	min	↗

עבור n אי-זוגי:

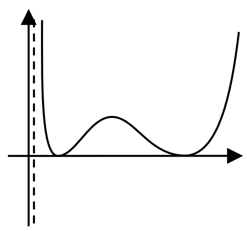
תחום x	$e^2 < x$	$x = e^2$	$e < x < e^2$	$x = e$	$1 < x < e$	$x = 1$	$0 < x < 1$
נציב בנגזרת	8	פיתול	3	קיצון	2	פיתול	0.5
סימן הנגזרת	+		+		-		-
הפונקציה עולה/יורדת	↗		↗	min	↘		↘

לכן, עבור ערכי n זוגיים נקבל: $\min(1,0)$, $\min(e^2,0)$ ו- $\max(e,1)$.

ואילו עבור ערכי n אי-זוגיים נקבל: $(1,0)$ פיתול, $(e^2,0)$ פיתול ו- $\min(e,-1)$.

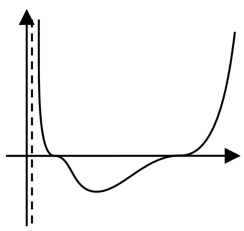
ד. כאשר $n = 2k$, כלומר כאשר n זוגי

גרף הפונקציה הוא:



כאשר $n = 2k+1$ כלומר כאשר n אי-זוגי

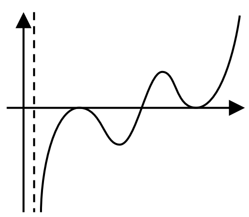
גרף הפונקציה הוא:



ה. נתון: $\int_1^{e^2} f(x)\,dx < 0$.

בתחום זה הגרף עבור n זוגי נמצא מעל ציר ה-x ולכן האינטגרל חיובי ואינו מתאים לנתון.

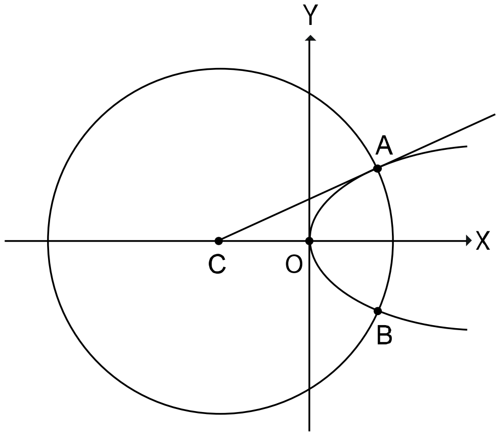
לעומת זאת, הגרף עבור n אי-זוגי נמצא מתחת לציר ה-x ולכן האינטגרל שלילי ומתאים לנתון החדש. נסיק ש-<u>n אי-זוגי</u> ולכן <u>גרף הפונקציה המתאים מסעיף ד' הוא השמאלי</u>. כדי לשרטט את גרף הנגזרת נשים לב שתחום ההגדרה אינו משתנה ולכן $x = 0$ נשארת אסימפטוטה אנכית. כמו כן, קיימות 3 נקודות בהן הנגזרת מתאפסת ואת תחומי החיוביות והשליליות ביניהן נקבע לפי תחומי העליה והירידה של הפונקציה. נקבל שגרף הנגזרת הוא המופיע משמאל:



ו. אינטגרל בתחום בו גרף הפונקציה נמצא מתחת לציר ה-x הוא בעל סימן שלילי. נסמן את התחומים הנתונים על גבי גרף הנגזרת שמצאנו ונראה שבהשוואה ל- $\int_1^{e^2} f'(x)\,dx$, האינטגרל $\int_{0.5}^{e^2} f'(x)\,dx$ בעל <u>יותר שטחים בעלי סימן שלילי</u>, ולכן קטן ממנו בערכו ואילו האינטגרל $\int_1^{e^3} f'(x)\,dx$ מכיל <u>יותר שטחים בעלי סימן חיובי</u> ולכן גדול ממנו בערכו. מכאן שהביטוי בעל הערך הגדול ביותר הוא **ביטוי 2**: $\int_1^{e^3} f'(x)\,dx$.

פתרון מלא - מבחן 11

שאלה 1



א. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A באמצעות t.

$$y^2=9x \;\rightarrow\; y=\sqrt{9x} \;\rightarrow\; \boxed{A(t,\sqrt{9t})}$$

נמצא את משוואת המשיק באמצעות נוסחת המשיק לפרבולה

$yy_0=p(x+x_0)$, כמו כן נשים לב כי $p=4.5$:

$$y\sqrt{9t}=4.5(x+t) \;\rightarrow\; y=\frac{4.5x+4.5t}{\sqrt{9t}}$$

בנקודה C שיעור ה-y של המשיק שווה ל-0:

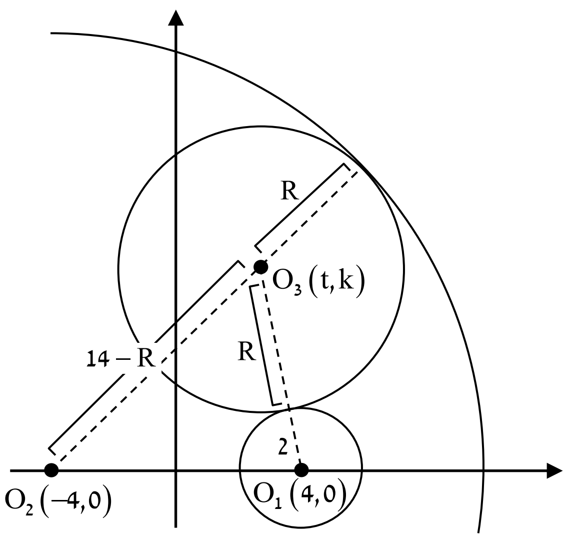
$$0=\frac{4.5x+4.5t}{\sqrt{9t}} \;\rightarrow\; 4.5x+4.5t=0 \;\rightarrow\; x=-t \;\rightarrow\; \boxed{C(-t,0)}$$

רדיוס המעגל הוא 10 יחידות וזהו המרחק שבין הנקודות A ו-C:

$$10=\sqrt{\left(t-(-t)\right)^2+\left(\sqrt{9t}\right)^2} \;\rightarrow\; 100=4t^2+9t \;\rightarrow\; 4t^2+9t-100=0$$

פתרונות המשוואה הריבועית הם: $t=4$ ~~ו-~~ $t=\cancel{-6.25}$. הנקודה A ברביע הראשון ולכן הפתרון השלילי נפסל.

מכאן ששיעורי מרכז המעגל הם $C(-4,0)$ ומשוואת המעגל היא: $\boxed{(x+4)^2+y^2=100}$.



ב. נתבונן בשרטוט:

נסמן את מרכז המעגל שמרכזו O_3 באמצעות פרמטרים:

$\boxed{O_3(t,k)}$, ואת רדיוסו כ-R. ניתן לראות כי המרחק בין מרכז המעגל O_3 לבין מרכז המעגל O_1 הוא $R+2$. כמו כן ניתן לראות כי המרחק בין מרכז המעגל O_3 לבין מרכז המעגל O_2 הוא $14-R$. נבנה שתי משוואות בהתאם:

$$\text{(I)}\quad R+2=\sqrt{(t-4)^2+k^2} \;\rightarrow\; R^2+4R+4=t^2-8t+16+k^2 \;\rightarrow\; R^2=t^2-8t+12+k^2-4R$$

$$\text{(II)}\quad 14-R=\sqrt{(t+4)^2+k^2} \;\rightarrow\; 196-28R+R^2=t^2+8t+16+k^2$$

$$\rightarrow\; R^2=t^2+8t+k^2-180+28R$$

נשווה בין I ו- II :

$$\cancel{t^2}-8t+12+\cancel{k^2}-4R=\cancel{t^2}+8t+\cancel{k^2}-180+28R \;\rightarrow\; 32R=192-16t \;\rightarrow\; R=6-\frac{t}{2}$$

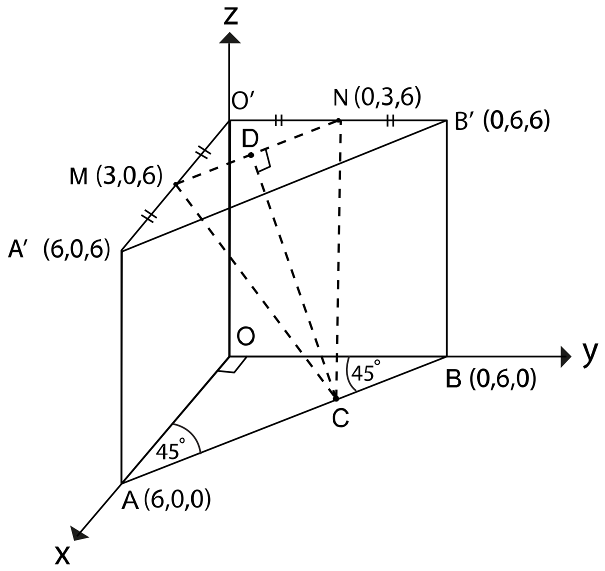
נציב את ערך R באחת המשוואות I או II ונקבל :

$$\left(6-\frac{t}{2}\right)^2=t^2-8t+12+k^2-4\left(6-\frac{t}{2}\right) \;\rightarrow\; 36-6t+\frac{t^2}{4}=t^2-8t+12+k^2-24+2t \;\rightarrow$$

$$48+\frac{t^2}{4}=t^2+k^2 \;\rightarrow\; 192+t^2=4t^2+4k^2 \;\rightarrow\; 3t^2+4k^2=192 \;\rightarrow\; \frac{t^2}{64}+\frac{k^2}{48}=1 \;\rightarrow\; \boxed{\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1}$$

המקום הגיאומטרי המתקבל הוא אליפסה קנונית.

שאלה 2



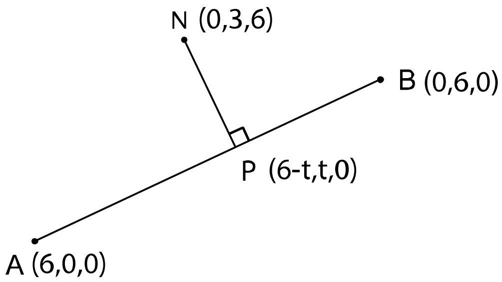
א. נשרטט במשולש ΔMNC גובה מהקדקוד C אל הצלע MN, החותך אותה בנקודה D. כך נוכל להביע את שטח המשולש ΔMNC כ: $S_{\Delta MNC} = \frac{MN \cdot CD}{2}$.

נוסיף את שיעורי הנקודה $B(0,6,0)$ לשרטוט (בעלת אותו שיעור y כמו הנקודה B', ונמצאת על ציר ה-y). נשים לב כי על פי חישובי זוויות ניתן לראות כי המשולש ΔABO הוא ישר זווית שווה שוקיים, ונקבל את שיעורי הנקודה $A(6,0,0)$. באופן דומה נמצא את שיעורי הנקודה $A'(6,0,6)$. הנקודה N היא אמצע הקטע O'B' ולכן שיעוריה הם: $N(0,3,6)$. באופן דומה נקבל את שיעורי הנקודה $M(3,0,6)$. נחשב את אורך הקטע MN:

$$d_{MN} = \sqrt{(3-0)^2+(0-3)^2+(6-6)^2} \rightarrow \boxed{d_{MN} = \sqrt{18}}$$

ניתן לראות כי MN הוא קטע אמצעים במשולש $\Delta A'B'O'$, מכאן ש: $MN \parallel A'B'$. כמו כן, $AB \parallel A'B'$, ולכן על פי כלל המעבר: $MN \parallel AB$. כעת, ניתן לראות כי אורכו של הקטע CD הוא למעשה המרחק שבין שני הישרים המקבילים AB ו- MN. נבחר באופן אקראי נקודה על הישר MN, למשל הנקודה $N(0,3,6)$, ונחשב את מרחקה מהישר AB. ההצגה הפרמטרית של AB היא:

$$\underline{x} : (6,0,0)+t(0-6,6-0,0-0) \rightarrow \underline{x} : (6,0,0)+t(-6,6,0) \rightarrow \boxed{\underline{x} : (6,0,0)+t(-1,1,0)}$$



כדי לחשב את המרחק של הנקודה N מהישר AB, יש למצוא אנך לישר AB העובר דרך הנקודה N. נעשה זאת בעזרת הנקודה הכללית P המייצגת את הישר AB: $P(6-t,t,0)$.

כיוונו של הווקטור $\overrightarrow{NP}$ הוא: $(6-t-0,t-3,0-6)$, ולאחר סידור: $(6-t,t-3,-6)$.

הווקטורים $\overrightarrow{NP}$ ו- $\overrightarrow{AB}$ מאונכים זה לזה, ומכפלת כיווניהם היא 0. כלומר מתקיים: $(6-t,t-3,-6)\cdot(-1,1,0)=0$. מתקבלת המשוואה $t-6+t-3=0$ שפתרונה: $t=4.5$.

נציב $t=4.5$ בהצגה הפרמטרית של הישר AB ונקבל את הנקודה $P(1.5,4.5,0)$.

אורך הווקטור $\overrightarrow{NP}$ הוא: $d_{NP} = \sqrt{(1.5-0)^2+(4.5-3)^2+(0-6)^2}$. כיוון שאורכו שווה לאורך הווקטור $\overrightarrow{NP}$, מתקיים: $\boxed{CD = \sqrt{40.5}}$. נציב את אורכי הישרים MN ו-CD בנוסחת

השטח: $S_{\Delta MNC}=\frac{\sqrt{18}\cdot\sqrt{40.5}}{2}=$ 13.5 יח"ר.

ב. על מנת לחשב את הזווית שבין שני הישרים MB ו- A'N, נמצא תחילה את הוקטורים המחברים בין הנקודות:

$$\overrightarrow{MB}:(0-3,6-0,0-6)\ \rightarrow\ \overrightarrow{MB}:(-3,6,-6)$$

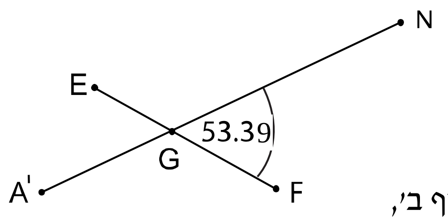
$$\overrightarrow{A'N}:(0-6,3-0,6-6)\ \rightarrow\ \overrightarrow{A'N}:(-6,3,0)$$

נחשב את הזווית שבין שני הווקטורים בעזרת המכפלה הסקלארית של שני הווקטורים:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{A'N}}{\left|\overrightarrow{MB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A'N}\right|}=\frac{(-3,6,-6)\cdot(-6,3,0)}{\sqrt{(-3)^2+6^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{(-6)^2+3^2+0^2}}=\frac{18+18}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{45}}$$

$$\rightarrow\cos\alpha=\frac{36}{60.37}\ \rightarrow\ \boxed{\alpha=53.39^\circ}$$

ג. נתבונן בישר A'N, ונמקם עליו את הנקודה G.



נשרטט את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, שהנקודה G היא אמצעו.

לפי הנתון, $\left|\overrightarrow{FG}\right|=2$ ומכאן שאורך EF הוא 4 יח' אורך.

הווקטור $\overrightarrow{EF}$ מקביל לווקטור $\overrightarrow{MB}$, ומכאן שהזווית שמצאנו בסעיף ב',

היא גם הזווית בין הוקטורים $\overrightarrow{A'N}$ ו- $\overrightarrow{EF}$: $\alpha=53.39^\circ$.

כמו שראינו בסעיף ב', $\left|\overrightarrow{A'N}\right|=\sqrt{45}$.

נחשב את שטח המרובע A'ENF, באמצעות מכפלת אורכי האלכסונים והזווית שביניהם:

$$S_{A'ENF}=\frac{\left|\overrightarrow{A'N}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EF}\right|\cdot\sin 53.39^\circ}{2}=\frac{\sqrt{45}\cdot 4\cdot\sin 53.39^\circ}{2}\ \rightarrow\ \boxed{S_{A'ENF}=10.77}\ \text{(יח"ר)}$$

שאלה 3

א. תחילה נסדר את המקומות הגיאומטריים הנתונים. נזכור כי כאשר: $Z=x+yi$

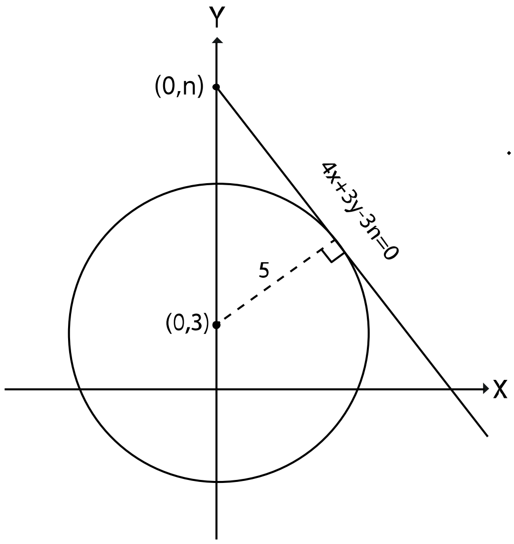
מתקיים: $|Z|=\sqrt{x^2+y^2}$:

$$|i\cdot Z+3|=5 \rightarrow |i\cdot(x+yi)+3|=5 \rightarrow |xi-y+3|=5 \rightarrow \sqrt{x^2+(-y+3)^2}=5 \rightarrow \boxed{x^2+(y-3)^2=25}$$

$$|Z-bi-a|=10 \rightarrow |x+yi-bi-a|=10 \rightarrow |x-a+(y-b)i|=10$$

$$\rightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=10 \rightarrow \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=100}$$

מצאנו כי שני המקומות הגיאומטריים הם מעגלים ועלינו למצוא את שיעורי מרכז המעגל השני, כלומר, למצוא את ערכם של a ושל b.



נשרטט את המעגל הראשון ולצידו את המשיק ששיפועו $-\frac{4}{3}$.

נסמן את שיעורי נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-y כ: $(0,n)$.

בהתאם, משוואת המשיק תהיה: $y=-\frac{4}{3}x+n$ ולאחר

סידור: $\boxed{4x+3y-3n=0}$.

רדיוס המעגל הוא המרחק שבין מרכז המעגל $\boxed{(0,3)}$ לבין המשיק.

נחשב את המרחק באמצעות נוסחת המרחק בין נקודה לישר.

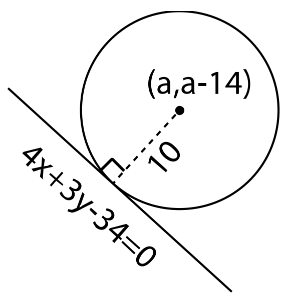
לפי השרטוט, הנקודה נמצאת <u>מתחת</u> לישר ונוכל לכתוב את נוסחת המרחק <u>ללא ערך מוחלט</u>, תוך הקפדה <u>שהמקדם של y הוא חיובי</u>:

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=d \rightarrow \frac{4\cdot 0+3\cdot 3-3n}{\sqrt{4^2+3^2}}=-5 \rightarrow \frac{9-3n}{5}=-5 \rightarrow -3n=-34 \rightarrow n=\frac{34}{3}$$

מכאן, שמשוואת המשיק היא: $\boxed{4x+3y-34=0}$.

מרכזו של המעגל השני, $(x-a)^2+(y-b)^2=100$, נמצא על הישר $y=x-14$, ולכן: $b=a-14$. נחשב את המרחק שבין מרכז המעגל, $(a,a-14)$ לבין המשיק $4x+3y-34=0$. הפעם <u>איננו יודעים</u> האם הנקודה נמצאת מעל או מתחת לישר ולכן לא נוכל לוותר על הערך המוחלט:

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=d \rightarrow \frac{|4a+3a-42-34|}{\sqrt{4^2+3^2}}=10 \rightarrow |7a-76|=50$$



במשוואה עם ערך מוחלט יש לבדוק את שתי אפשרויות המשוואה $|7a-76|=50$:

$$7a-76=50 \rightarrow 7a=126 \rightarrow a=18$$

$$7a-76=-50 \rightarrow 7a=26 \rightarrow a=3.71$$

כיוון שנתון ששיעורי מרכז המעגל הם מספרים <u>שלמים</u>, הרי שהפתרון הנכון הוא $\boxed{a=18}$ ובהתאם נקבל: $\boxed{b=4}$. לסיכום - מרכז המעגל בנקודה ששיעוריה: $(18,4)$.

ב. ראשית נפרק את המספר המרוכב $Z_1 = 6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{1-k}+0.25\cdot16^k+6i$ לשיעורי x ו-y במישור גאוס. נקבל:

$$x = 6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{1-k}+0.25\cdot16^k \quad , \quad y=6$$

המספר יהיה בתוך המעגל $x^2+(y-3)^2=25$ כאשר המרחק בין הנקודה הכללית:

$$\left(6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{1-k}+0.25\cdot16^k, 6\right)$$

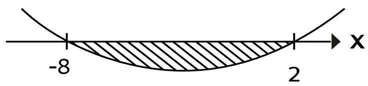
לבין מרכז המעגל $(0,3)$ יהיה <u>קטן</u> מרדיוס המעגל $(R=5)$:

$$\sqrt{\left(6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{1-k}+0.25\cdot16^k-0\right)^2+(6-3)^2} < 5 \rightarrow$$

$$\sqrt{\left(6\cdot4^{k-1}+0.25\cdot4^{2k}\right)^2+9}<5 \rightarrow \left(\frac{6\cdot4^k}{4}+0.25\cdot4^{2k}\right)^2+9<25 \rightarrow \left(\frac{6\cdot4^k}{4}+0.25\cdot4^{2k}\right)^2<16$$

נוציא שורש משני האגפים ונקבל: $\frac{6\cdot4^k}{4}+0.25\cdot4^{2k}<4$. נסמן $t=4^k$:

$$\frac{6t}{4}+0.25\cdot t^2<4 \rightarrow 0.25t^2+1.5t-4<0$$



המאפסים הם: $t=2$ ו-$t=-8$.

נשרטט את המאפסים על ציר ונצייר דרכם פרבולה 'מחייכת' (מקדם t^2 הוא חיובי):

ניתן לראות כי הפרבולה שלילית בתחום $-8<t<2$. אולם, יש לזכור כי $t=4^k$, ולכן בהכרח $0<t$.

כלומר הפתרון המתאים הוא: $0<t<2$. נציב בחזרה $t=4^k$ ונקבל כי:

$$0<4^k<2 \rightarrow 4^k<4^{0.5} \rightarrow k<0.5$$

נשים לב שאי השוויון השמאלי $0<t$ מתקיים לכל t מכיוון ש: $0<4^k$. ולכן התשובה הסופית היא: $\boxed{k<0.5}$.

שאלה 4

א. נמלא את הנתונים בטבלה:

	דגים	עופות
כמות התחלתית M_0	y	x
קצב הגידול q	q_2	q_1
זמן t	t	t
כמות סופית M_t	$5y$	$3x$

על פי הנוסחה: $M_t = M_0 \cdot q^t$ נבנה משוואה על פי הנתון המתייחס לעופות: $(I)\ 3\cancel{x} = \cancel{x} \cdot q_1^{\,t} \rightarrow 3 = q_1^{\,t}$

נבנה משוואה על פי הנתון המתייחס לדגים: $(II)\ 5\cancel{y} = \cancel{y} \cdot q_2^{\,t} \rightarrow 5 = q_2^{\,t}$

לפי הנתון הנוסף: $q_2 = 1.02q_1$. נציב ב-(II) ונקבל:

$$5 = q_2^{\,t} \rightarrow 5 = (1.02q)^t \rightarrow 5 = 1.02^t \cdot q_1^{\,t}$$

נציב את (I) ונקבל:

$$5 = 1.02^t \cdot q_1^{\,t} \rightarrow 5 = 1.02^t \cdot 3 \rightarrow 1.02^t = \frac{5}{3} \rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln 1.02} \rightarrow \boxed{t = 25.79}$$ (שבועות)

ב. נציב את ערך t שמצאנו ב-(I) ונמצא את q_1:

$$3 = q_1^{\,t} \rightarrow 3 = q_1^{\,25.79} \rightarrow q_1 = \sqrt[25.79]{3} \rightarrow \boxed{q_1 = 1.043}$$

כמו כן:

$$q_2 = 1.02q_1 \rightarrow q_2 = 1.02 \cdot 1.043 \rightarrow \boxed{q_2 = 1.064}$$

כעת נמלא את נתוני השאלה בטבלה:

	דגים	עופות
כמות התחלתית M_0	x	$2x$
קצב הגידול q	q_2	q_1
זמן t	t	t
כמות סופית M_t	$x \cdot q_2^{\,t}$	$2x \cdot q_1^{\,t}$

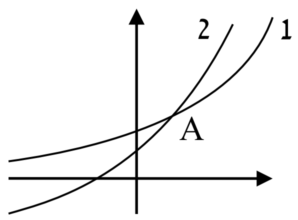
על פי הנתון, הכמות הסופית של <u>הדגים</u> גדולה פי שלושה מהכמות הסופית של <u>העופות</u> ולכן נקבל את המשוואה:

$$3 \cdot 2\cancel{x} \cdot q_1^{\,t} = \cancel{x} \cdot q_2^{\,t}$$

נזכור כי: $q_2 = 1.02q_1$ ונקבל:

$$6 \cdot q_1^{\,t} = (1.02q_1)^t \rightarrow 6\cancel{q_1^{\,t}} = 1.02^t \cancel{q_1^{\,t}} \rightarrow 6 = 1.02^t \rightarrow t = \frac{\ln 6}{\ln 1.02} \rightarrow \boxed{t = 90.48}$$ (שבועות)

שאלה 5



נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=e^{2x}+mx$ ו- $g(x)=6e^{x}$ הנחתכים בנקודה A בלבד.

א. כדי לשייך כל אחד מהגרפים לפונקציות הנתונות נמצא את נקודות החיתוך שלהן עם ציר ה-y:

עבור $f(x)=e^{2x}+mx$:

$$f(0)=e^{2\cdot 0}+m\cdot 0 \rightarrow f(0)=e^{0}+0 \rightarrow f(0)=1$$

עבור $g(x)=6e^{x}$:

$$g(0)=6e^{0} \rightarrow g(0)=6\cdot 1 \rightarrow g(0)=6$$

בשרטוט הנתון ניתן לראות שנקודת החיתוך עם ציר ה-y של גרף 2 היא בעלת שיעור y הנמוך מבין השתיים ולכן הגרף המתאים לפונקציה $f(x)$ הוא <u>גרף 2</u>.

ב. נתון ששיעור ה-x של הנקודה A הוא: $x_A=1.544$. כיוון ש-A נקודת החיתוך של שני הגרפים ערכי ה-y של הפונקציות זהים בנקודה זו ומתקיים:

$$f(x_A)=g(x_A) \rightarrow e^{2x_A}+m\cdot x_A=6e^{x_A} \rightarrow e^{2\cdot 1.544}+m\cdot 1.544=6e^{1.544}$$
$$\rightarrow 21.933+1.544m=28.0997 \rightarrow 1.544m=6.1667 \rightarrow m=3.99$$

וכיוון שנתון ש-m מספר <u>שלם</u> נעגל את הפתרון כלפי מעלה ונקבל: $m=4$.

ג. הגדירו את הפונקציה: $h(x)=[f(x)-g(x)]^{n}$ (n טבעי וגדול מ- 1).

נציב את הפונקציות הנתונות ואת ערך m שמצאנו בכדי לקבל את הביטוי המפורש: $h(x)=\left[e^{2x}+4x-6e^{x}\right]^{n}$.

1. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $h(x)$ עם הצירים:

<u>נקודת החיתוך עם ציר ה-y</u>:

$$h(0)=\left[e^{2\cdot 0}+4\cdot 0-6e^{0}\right]^{n} \rightarrow h(0)=[1-6\cdot 1]^{n} \rightarrow h(0)=(-5)^{n}$$

כלומר הנקודה היא: $\left(0,(-5)^{n}\right)$.

<u>נקודת החיתוך עם ציר ה-x</u>:

הפונקציה $h(x)=[f(x)-g(x)]^{n}$ תתאפס בכל שיעורי ה-x עבורם ההפרש בין הפונקציות f ו-g שווה ל-0. ההפרש יתאפס אך ורק עבור אותם ערכי x בהם הפונקציות שוות זה לזה. הפונקציות f ו-g שוות זו לזו אך ורק בנקודות בהן הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים. נתון שהנקודה $x_A=1.544$ היא הנקודה <u>היחידה</u> בה הגרפים נחתכים ולכן נקודת האפס היחידה של הפונקציה h היא: $x=1.544$.

כלומר נקודת החיתוך היחידה של הפונקציה h עם ציר ה-x היא: $(1.544,0)$.

2. נגזור את הפונקציה h ונשווה לאפס :

$$h'(x)=0 \rightarrow n\cdot\left[e^{2x}+4x-6e^{x}\right]^{n-1}\cdot\left(2e^{2x}+4-6e^{x}\right)=0$$

המכפלה שמצאנו תתאפס כאשר אחד הגורמים : $\left[e^{2x}+4x-6e^{x}\right]^{n-1}$ או $\left(2e^{2x}+4-6e^{x}\right)$ מתאפס.

עבור הגורם השמאלי תתקבל המשוואה :

$$\left[e^{2x}+4x-6e^{x}\right]^{n-1}=0 \,/\sqrt[n-1]{\ } \rightarrow e^{2x}+4x-6e^{x}=0$$

שפתרונותיה מתלכדים עם נקודות החיתוך של הפונקציה h עם ציר ה-x ולכן הפתרון היחיד הוא : $x=1.544$.

עבור הגורם הימני תתקבל המשוואה :

$$2e^{2x}+4-6e^{x}=0 \xrightarrow{e^{x}=t} 2t^{2}+4-6t=0 \rightarrow t^{2}-3t+2=0 \rightarrow t_1=1\,,\, t_2=2$$

ולאחר הצבה בחזרה :

$$t_1:\ e^{x_1}=1 \rightarrow x_1=0$$

$$t_2:\ e^{x_2}=2 \rightarrow x_2=\ln 2\approx 0.693$$

לסיכום, הנקודות עבורן מתקיים : $h'(x)=0$ הן : $x_1=0$, $x_2=0.693$, $x_3=1.544$.

כעת נבדוק את סימן הנגזרת לפני ואחרי כל אחת מהנקודות שמצאנו כדי לקבוע את סוגן. נשים לב שבמידה ובביטוי $\left[e^{2x}+4x-6e^{x}\right]^{n-1}$ מתקבל ערך שלילי <u>בתוך הסוגריים</u> הסימן יתבטל עבור חזקות זוגיות ויישמר עבור חזקות אי-זוגיות. לכן נבחין בין שני מקרים : התנהגות הנגזרת עבור ערכי n זוגיים ובנוסף עבור ערכים אי-זוגיים.

עבור ערכי n <u>זוגיים</u> :

תחום x	$x<0$	$x=0$	$0<x<0.693$	$x=0.693$	$0.693<x<1.544$	$x=1.544$	$1.544<x$
סימן הנגזרת	-	קיצון	+	קיצון	-	קיצון	+
הפונקציה עולה/יורדת	↘	min	↗	max	↘	min	↗

ולכן : $x_1=0$ ו- $x_3=1.544$ הן נקודות קיצון מסוג מינימום ו : $x_2=0.693$ היא נקודת קיצון מסוג מקסימום.

עבור ערכי n <u>אי-זוגיים</u> :

תחום x	$x<0$	$x=0$	$0<x<0.693$	$x=0.693$	$0.693<x<1.544$	$x=1.544$	$1.544<x$
סימן הנגזרת	+	קיצון	-	קיצון	+	פיתול	+
הפונקציה עולה/יורדת	↗	max	↘	min	↗		↗

ולכן : $x_1=0$ היא נקודת קיצון מסוג מקסימום, $x_2=0.693$ היא נקודת קיצון מסוג מינימום ו : $x_3=1.544$ היא נקודת פיתול.

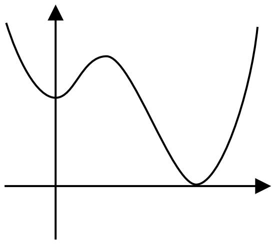
3. תחילה נחשב את שיעור ה-y של הנקודה $x = 0.693$:

$$h(0.693) = \left[e^{2\cdot 0.693} + 4\cdot 0.683 - 6e^{0.683}\right]^n \;\rightarrow\; h(0.693) = (-5.227)^n$$

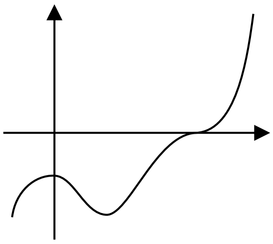
את שיעורי ה-y של שתי הנקודות הנוספות מצאנו בסעיף ג'1 : $h(0) = (-5)^n$ ו : $h(1.544) = 0$.

כיוון שסוג הנקודות שמצאנו שונה עבור ערכי n שונים, גם בשרטוט נבחין בין ערכי n זוגיים וערכים אי-זוגיים ועל סמך סעיפי החקירה הקודמים נקבל את השרטוטים הבאים :

עבור ערכי n זוגיים :



עבור ערכי n אי-זוגיים :



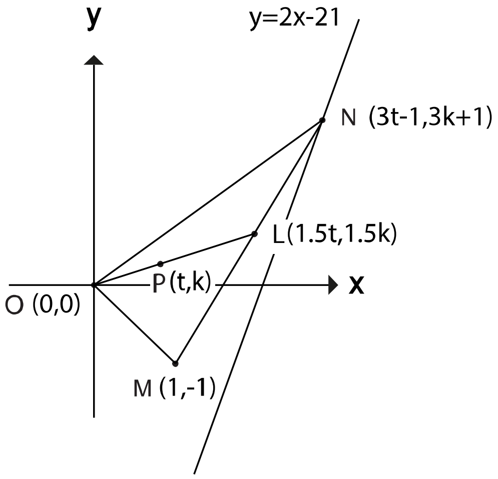
פתרון מלא - מבחן 12

שאלה 1

א. זוהי שאלת מקום גיאומטרי.

בתרגילים מסוג זה, נפעל לפי ארבעת השלבים:

1. נסמן את הנקודה המבוקשת כ: $P(t,k)$.
2. נביע את שאר הנתונים באמצעות הפרמטרים t ו- k.
3. נמצא משוואה המקשרת בין **כל** הנתונים בשאלה וזוהי משוואת המקום הגיאומטרי באמצעות הפרמטרים t ו- k.
4. לאחר סידור המשוואה נחליף בחזרה את הפרמטרים t ו- k בפרמטרים x ו-y בהתאמה.



נתבונן בשרטוט. הנקודה $P(t,k)$ היא מפגש התיכונים ולכן היא מחלקת את התיכון OL ביחס של $2:1$.

נבטא את שיעורי הנקודה L באמצעות הנוסחה לחלוקת קטע ביחס נתון:

$$\frac{x_O+2x_L}{3}=t \ \rightarrow\ \frac{2x_L}{3}=t \ \rightarrow\ x_L=1.5t$$

$$\frac{y_O+2y_L}{3}=k \ \rightarrow\ \frac{2y_L}{3}=k \ \rightarrow\ y_L=1.5k$$

הנקודה $L(1.5t,1.5k)$ היא אמצע הצלע MN.

נבטא את שיעורי הקדקוד N באמצעות הנוסחה לאמצע קטע:

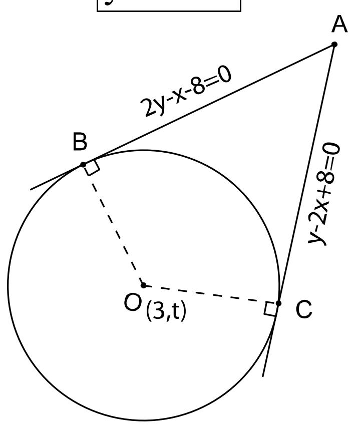
$$\frac{x_N+1}{2}=1.5t \ \rightarrow\ x_N+1=3t \ \rightarrow\ x_N=3t-1$$

$$\frac{y_N-1}{2}=1.5k \ \rightarrow\ y_N-1=3k \ \rightarrow\ y_N=3k+1$$

הקדקוד $N(3t-1,3k+1)$ נמצא על הישר $y=2x-21$ ולכן נציב את שיעורי הנקודה במשוואת הישר:

$$y=2x-21 \ \rightarrow\ 3k+1=2(3t-1)-21 \ \rightarrow\ 3k+1=6t-2-21 \ \rightarrow\ 3k=6t-24 \ \rightarrow\ k=2t-8$$

כעת, לאחר שקיבלנו משוואה המקשרת בין t ו-k, נחליף את האותיות ב-x ו-y בהתאמה: $\boxed{y=2x-8}$.



ב. נסמן את מרכז המעגל כנקודה: $O(3,t)$.

אורך הרדיוס OB הוא מרחק הנקודה O מהמשיק AB.

נבטא את האורך באמצעות הנוסחה למרחק נקודה מישר: $d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$OB=\frac{|2t-3-8|}{\sqrt{2^2+1}} \rightarrow OB=\frac{|2t-11|}{\sqrt{5}}$$

באופן דומה נבטא את אורך הרדיוס OC:

$$OC=\frac{|t-2\cdot 3+8|}{\sqrt{2^2+1}} \rightarrow OC=\frac{|t+2|}{\sqrt{5}}$$

אורכי הרדיוסים שווים, ולכן נשווה את שני הביטויים:

$$OB=OC \rightarrow \frac{|2t-11|}{\cancel{\sqrt{5}}}=\frac{|t+2|}{\cancel{\sqrt{5}}} \rightarrow |2t-11|=|t+2|$$

במשוואות עם ערך מוחלט יש שתי אפשרויות לפתרון:

$$|2t-11|=|t+2| \rightarrow 2t-11=t+2 \rightarrow t=13$$

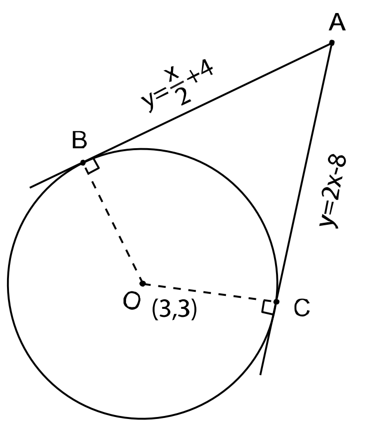
$$|2t-11|=|t+2| \rightarrow 2t-11=-(t+2) \rightarrow t=3$$

שני הפתרונות שהתקבלו הם $t=3$ ו- $t=13$ ומכאן שמרכז המעגל נמצא בנקודה $\boxed{O(3,3)}$ או בנקודה $\boxed{O(3,13)}$.

נציב את הערך $t=3$ בביטוי $R=\frac{|2t-11|}{\sqrt{5}}$ ונמצא את אורכו של רדיוס המעגל: $R=\frac{|2\cdot 3-11|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

כלומר, משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $\boxed{O(3,3)}$ היא: $\boxed{(x-3)^2+(y-3)^2=5}$.

באופן דומה נמצא כי משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $\boxed{O(3,13)}$ היא: $\boxed{(x-3)^2+(x-13)^2=45}$.



ג. הנקודה B היא נקודת ההשקה של המשיק AB והרדיוס OB.

נמצא תחילה את משוואת הישר OB. הרדיוס OB מאונך למשיק AB

ולכן מתקיים: $m_{OB}\cdot\frac{1}{2}=-1$ ולבסוף: $\boxed{m_{OB}=-2}$.

נמצא את משוואת הרדיוס OB: $y-3=-2(x-3) \rightarrow y=-2x+9$

כדי למצוא את שיעורי הנקודה B, נשווה בין משוואות הישרים OB

ו-AB: $\frac{x}{2}+4=-2x+9 \rightarrow x+8=-4x+18 \rightarrow 5x=10 \rightarrow \boxed{x=2}$

לאחר הצבה באחת המשוואות נקבל את הנקודה: $B(2,5)$.

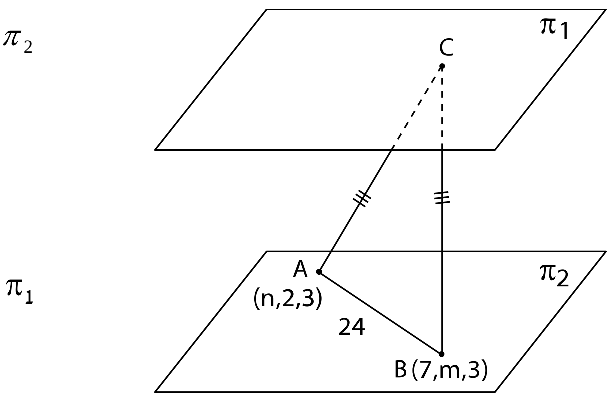
נחזור על התהליך עבור הנקודה C. משוואת OC היא: $y=-\frac{1}{2}x+4.5$.

לאחר חיתוך עם המשיק AC נקבל: $\boxed{C(5,2)}$. אורך בסיס המשולש BC הוא המרחק שבין הנקודות B ו-C:

$$BC=\sqrt{(2-5)^2+(5-2)^2} \rightarrow \boxed{BC=\sqrt{18}\text{ יח"ר}}$$

שאלה 2

א.



לפי הנתון, הנקודה $A(n,2,3)$ נמצאת על המישור $\pi_1: 4x-3z-2n-5=0$.

נציב את שיעורי הנקודה A במשוואת המישור ונגלה את n:

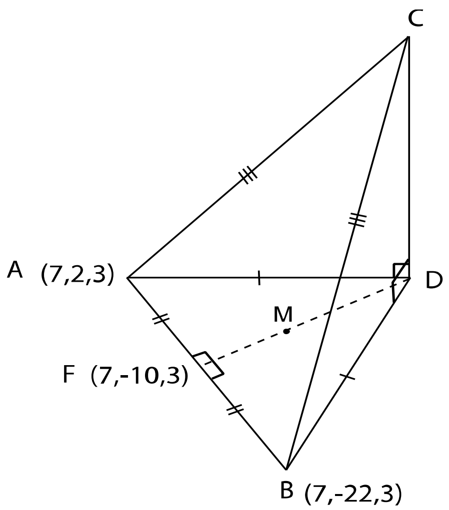
$\pi_1: 4n-3\cdot 3-2n-5=0 \to 2n=14 \to \boxed{n=7}$

$\to A(7,2,3)$

לפי הנתון הנוסף, המרחק בין הנקודה A לנקודה B הוא 24, ולכן נקבל לפי נוסחת המרחק בין שתי נקודות:

$$\sqrt{(7-7)^2+(m-2)^2+(3-3)^2}=24 \to \sqrt{(m-2)^2}=24 \to m-2=\pm 24 \to \cancel{m=26},\ m=-22$$

נבחר בפתרון $\boxed{m=-22}$ לפי הנתון כי m שלילי.



ב. מבין כל הנקודות הנמצאות על המישור π_1, הנקודה D היא הנקודה הקרובה ביותר לנקודה C. ומכאן שהקטע CD מאונך לשני המישורים המקבילים, והוא המרחק שביניהם. נשתמש בנתון על נפח הפירמידה על מנת למצוא את המרחק שבין שני המישורים, ולבסוף את משוואת המישור π_2. נפח הפירמידה שווה למכפלת שטח הבסיס, המשולש ΔABD, בגובה CD שהוא המרחק שבין המישורים π_1 ו- π_2.

בכדי למצוא את שטח המשולש ΔABD, נראה תחילה כי הוא שווה שוקיים $(AD=BD)$:

המשולשים ΔACD ו- ΔBCD חופפים (לפי צ.צ.ז: $AC=BC$, $CD=CD$, $\sphericalangle CDA=\sphericalangle CDB=90^\circ$),

ומכאן: $AD=BD$ (צלעות מתאימות במשולשים חופפים).

נתבונן במשולש שווה השוקיים ΔABD. נמצא את הנקודה F, אמצע הקטע AB, באמצעות הנוסחה לאמצע קטע:

$$x_F=\frac{7+7}{2}=7\ ,\ y_F=\frac{2-22}{2}=-10\ ,\ z_F=\frac{3+3}{2}=3 \to F(7,-10,3)$$

הקטע DF, גובה ותיכון לבסיס במשולש ΔABD, ארוך פי שלושה מהקטע MF (מפגש התיכונים מחלק את התיכונים ביחס של 2:1. נמצא תחילה את הקטע MF באמצעות הנוסחה למרחק בין שתי נקודות:

$$d_{MF}=\sqrt{(7-8)^2+(-10+10)^2+\left(3-4\frac{1}{3}\right)^2} \to d_{MF}=\frac{5}{3}.$$

מכאן ש: $DF=3MF \rightarrow DF=3\cdot\frac{5}{3} \rightarrow DF=5$

לסיכום נחשב את שטח המשולש ΔABD: $S_{\Delta ABD}=\frac{24\cdot 5}{2} \rightarrow S_{\Delta ABD}=60$ יח"ר

לפי הנתון, נפח הפירמידה $ABCD$ הוא 780 יחידות נפח. נמצא את CD, גובה הפירמידה $ABCD$:

$$V_{ABCD}=\frac{S_{\Delta ABD}\cdot CD}{3} \rightarrow 780=\frac{60\cdot CD}{3} \rightarrow CD=39$$

כלומר המרחק שבין שני המישורים π_1 ו- π_2 הוא 39. ניעזר בנוסחה למרחק שבין שני מישורים מקבילים:

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \rightarrow 39=\frac{|-19-D_2|}{\sqrt{4^2+0^2+3^2}}=39 \rightarrow |-19-D_2|=195$$

שתי האפשרויות הן: $-19-D_2=195 \rightarrow \boxed{D_2=-214}$ או: $-19-D_2=-195 \rightarrow \boxed{D_2=176}$

מכאן שמשוואת המישור π_2 היא: $\boxed{\pi_2: 4x-3z-214=0}$ או: $\boxed{\pi_2: 4x-3z+176=0}$.

שאלה 3

בסדרה חשבונית שהפרשה $i-1$ נתון: $a_1=18-i$. האיבר האחרון בסדרה הוא $a_n=18i-1$.

א. בסדרה חשבונית, נוסחת האיבר במיקום ה-n היא: $a_n=a_1+(n-1)d$.
נציב את הנתונים ונקבל את המשוואה הבאה:

$$18i-1=(18-i)+(n-1)(i-1)$$

$$\rightarrow 19i-19=(n-1)(i-1)$$

$$\rightarrow 19i-19=(n-1)i-n+1$$

על מנת שהשוויון יתקיים צריך להיות שוויון בין החלקים הממשיים של שני האגפים ובין החלקים המדומים של שני האגפים ולכן יש לפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}-19=-n+1\\ 19=n-1\end{cases} \rightarrow n=20$$

מכאן שבסדרה הנתונה יש <u>20 איברים</u>. נחשב את סכום הסדרה החשבונית:

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$$

$$S_{20}=\frac{20}{2}\left[2\cdot(18-i)+(20-1)(i-1)\right]=10\left[36-2i+20i-20-i+1\right]=10\left[17+17i\right]=170+170i$$

$$\rightarrow \boxed{S_{20}=170+170i}$$

ב. סכום הסדרה הוא המספר $Z_1 = 170 + 170i$.

Z_1 הוא אחד מקדקודיו של מצולע משוכלל בעל $2n+1$ צלעות אשר חסום במעגל קנוני במישור גאוס.

קודקודי המצולע לפי הסדר **נגד** כיוון השעון הם: $Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_{2n+1}$.

נמצא את ההצגה הקוטבית של Z_1:

$$r = \sqrt{(170)^2 + (170)^2} = \sqrt{2 \cdot (170)^2} = 170 \cdot \sqrt{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{170}{170} = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

לכן מתקיים: $\boxed{Z_1 = 170\sqrt{2}\text{cis}45^\circ}$.

1. כיוון שבמצולע $2n+1$ צלעות, גודלה של כל אחת מהזוויות המרכזיות הוא: $\frac{360^\circ}{2n+1}$ ולכן <u>זה ההפרש בין הארגומנטים של כל אחד מקדקודי המצולע</u>. מכאן שכדי למצוא את הקדקוד Z_2 יש להוסיף $\frac{360^\circ}{2n+1}$ פעם אחת לארגומנט של Z_1 וקיבלנו ש: $\boxed{Z_2 = 170\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ + \frac{360^\circ}{2n+1}\right)}$.

2. מכפלה של שני מספרים מרוכבים בהצגתם הקוטבית מתבצעת לפי הנוסחה הבאה:

$$(r_1\text{cis}\theta_1) \cdot (r_2\text{cis}\theta_2) = r_1 \cdot r_2\text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

כדי לחשב את המכפלה $Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot ... \cdot Z_{2n+1}$ <u>נכפול</u> את כל הרדיוסים <u>ונסכום</u> את כל הזוויות:

$$Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot ... \cdot Z_{2n+1}$$

$$= \left(170\sqrt{2}\right)^{2n} \text{cis}\left[\underbrace{\left(45^\circ + \frac{360^\circ}{2n+1}\right)}_{\arg Z_2} + \underbrace{\left(45^\circ + 2 \cdot \frac{360^\circ}{2n+1}\right)}_{\arg Z_3} + \underbrace{\left(45^\circ + 3 \cdot \frac{360^\circ}{2n+1}\right)}_{\arg Z_4} + \cdots + \underbrace{\left(45^\circ + 2n \cdot \frac{360^\circ}{2n+1}\right)}_{\arg Z_{2n+1}}\right]$$

ראשית נרצה לחשב את הסכום הפנימי ולשם כך נסדר מחדש את המחוברים:

$$= 45^\circ \cdot 2n + \frac{360^\circ}{2n+1} + 2 \cdot \frac{360^\circ}{2n+1} + 3 \cdot \frac{360^\circ}{2n+1} + \cdots + 2n \cdot \frac{360^\circ}{2n+1}$$

$$= 90^\circ \cdot n + \frac{360^\circ}{2n+1}(1 + 2 + 3 + \cdots + 2n) \quad (*)$$

נחשב את סכום הסדרה החשבונית $1+2+3+\cdots+2n$:

$$S_{2n}=\frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}}\left[2\cdot1+(2n-1)\cdot1\right]=n(2n+1)$$

ונציב בחזרה ב-(*) :

$$=90^\circ\cdot n+\frac{360^\circ}{\cancel{2n+1}}\cdot n\left(\cancel{2n+1}\right)$$

$$=90^\circ\cdot n+360^\circ\cdot n$$

לאחר שמצאנו את הסכום הפנימי נציב אותו בביטוי המקורי :

$$=\left(170\sqrt{2}\right)^{2n}\text{cis}\left(90^\circ\cdot n+360^\circ\cdot n\right)$$

לבסוף, כיוון שניתן לחסר כל כפולה שלמה של 360° מהארגומנט ניתן לחסר ממנו n כפולות שלמות, כלומר את הביטוי $360^\circ\cdot n$, ולקבל שתוצאת המכפלה היא :

$$Z_2\cdot Z_3\cdot Z_4\cdot\ldots\cdot Z_{2n+1}=\left(170\sqrt{2}\right)^{2n}\text{cis}\left(90^\circ\cdot n\right)$$

ג. כדי לקבוע האם ייתכן שהמכפלה היא מספר טבעי נבחן בנפרד את הגורמים : $\left(170\sqrt{2}\right)^{2n}$ ו- $\text{cis}\left(90^\circ\cdot n\right)$.

I. כיוון לכל ערך n שנבחר החזקה בביטוי $\left(170\sqrt{2}\right)^{2n}$ היא כפולה של 2 הרי שמדובר על חזקה זוגית.

לכן השורש יתבטל ונקבל מספר טבעי לכל בחירה של n.

II. נציב את $n=1,2,3,4$ בביטוי $\text{cis}\left(90^\circ\cdot n\right)$ ונקבל:

$$n=1:\ \text{cis}\left(90^\circ\cdot1\right)=\cos90^\circ+i\sin90^\circ=i$$

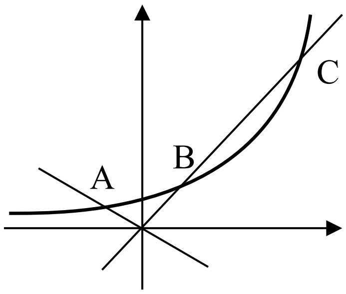
$$n=2:\ \text{cis}\left(90^\circ\cdot2\right)=\cos180^\circ+i\sin180^\circ=-1$$

$$n=3:\ \text{cis}\left(90^\circ\cdot3\right)=\cos270^\circ+i\sin270^\circ=-i$$

$$n=4:\ \text{cis}\left(90^\circ\cdot4\right)=\cos360^\circ+i\sin360^\circ=1$$

בכך השלמנו מחזור שלם על מעגל היחידה ומכאן והלאה הערכים המתקבלים חוזרים על עצמם.
מבין הערכים שמצאנו רק עבור $n=4$ קיבלנו את המספר הטבעי 1. לכן, ייתכן שהמכפלה היא מספר טבעי אך היא מתקבלת רק עבור ערכי n שהם כפולות של 4.

שאלה 4



על מערכת הצירים מופיעים הישר: $y=-2x$ וגרף הפונקציה: $f(x)=e^x$ הנחתכים בנקודה $A(x_A,y_A)$ בלבד. ישר שני העובר דרך ראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות $B(x_B,y_B)$ ו-$C(x_C,y_C)$ בלבד. נתון: $x_A=-0.35$, $x_B=0.62$, $y_C=4.536$.

א. הישר BC עובר בראשית הצירים. כדי למצוא את משוואת הישר נמצא תחילה את שיעוריה של נקודה נוספת הנמצאת על ישר זה.

מציאת שיעור ה-y של הנקודה B:

$$y_B=f(x_B)=f(0.62)=e^{0.62}\approx 1.8589 \rightarrow B(0.62,\ 1.8589)$$

אנו יודעים שהישר BC עובר בראשית הצירים ולכן נוכל כעת לחשב את שיפועו:

$$m_{BC}=\frac{y_B-0}{x_B-0}=\frac{1.85}{0.62}\approx 3$$

מכאן שמשוואת הישר BC היא:

$$BC:\ y-0=3(x-0) \rightarrow \boxed{BC:\ y=3x}$$

ב. נתונה הפונקציה: $g(x)=\dfrac{e^x-3x}{e^x+2x}$.

1. נמצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

כדי למצוא את האסימפטוטות האנכיות נמצא את ערכי x המאפסים את המכנה.
כלומר, נמצא את ערכי x המקיימים את המשוואה $e^x+2x=0$:

$$e^x+2x=0 \rightarrow e^x=-2x$$

קיבלנו משוואה שאין באפשרותנו לפתור בכלים אלגבריים ולכן ניעזר בגרפים של הפונקציות e^x , $-2x$ ובמסקנות מסעיף א':
לפי הנתון אנו יודעים שהגרפים הללו נחתכים <u>בנקודה אחת בלבד</u>:
הנקודה $A(-0.35,y_A)$ ולכן למשוואה: $e^x=-2x$ יש <u>פתרון אחד בלבד</u>.
כמו כן, כיוון שנתון לנו שיעור ה-x של הנקודה A למעשה יש בידינו את אותו הפתרון היחיד של המשוואה.

נסיק שלפונקציה $g(x)$ קיימת אסימפטוטה אנכית יחידה והיא: $\boxed{x=-0.35}$.

כדי למצוא את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה $g(x)$ נבחן את התנהגות הפונקציה כאשר x שואף לאינסוף ולמינוס אינסוף:

לשם כך ניעזר בתכונות הבאות של הפונקציה המעריכית: $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ וגם $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

עבור x שואף לאינסוף מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-3x}{e^x+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}\cdot\frac{1-\frac{3x}{e^x}}{1+\frac{2x}{e^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-3\cdot\frac{x}{e^x}}{1+2\cdot\frac{x}{e^x}}$$

נתבונן בביטוי $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$:

עבור ערכי x חיוביים, הולכים וגדלים, קצב השינוי של הפונקציה הקווית x הוא זניח בהשוואה לקצב השינוי של הפונקציה המעריכית e^x. בהתאם, הביטוי $\frac{x}{e^x}$ הוא שבר שקצב השינוי של המונה שלו נמוך מקצב השינוי של המכנה שלו. לכן, <u>ערך המנה כולה</u> הולך וקטן כאשר x שואף לאינסוף.

כלומר, ככל ש-x חיובי הולך וגדל, כך הביטוי e^x שואף לאינסוף ובהתאם הביטוי $\frac{x}{e^x}$ שואף בערכו ל-0.

לסיכום, נקבל: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^\infty}=0$

לכן: $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-3x}{e^x+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-3\cdot\frac{x}{e^x}}{1+2\cdot\frac{x}{e^x}}=\frac{1-3\cdot 0}{1+2\cdot 0}=1$

לסיכום, כאשר x שואף לאינסוף, הפונקציה שואפת ל-1 וזו האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$.

עבור x שואף למינוס אינסוף, כיוון שאנו יודעים שמתקיים $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ נסיק שהביטויים המעריכיים מתאפסים ולכן מתקיים:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-3x}{e^x+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{0-3x}{0+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3\cancel{x}}{2\cancel{x}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$$

כלומר כש-x שואף למינוס אינסוף הפונקציה שואפת ל- $-\frac{3}{2}$ וזו האסימפטוטה האופקית הנוספת של הפונקציה $g(x)$.

לסיכום, מצאנו שהאסימפטוטות האופקיות של $g(x)$ הן: $\boxed{y=1\ ,\ y=-\frac{3}{2}}$.

2. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה $g(x)=\frac{e^x-3x}{e^x+2x}$.

חיתוך עם ציר ה-y:

$$g(0)=\frac{e^0-3\cdot 0}{e^0+2\cdot 0}=\frac{1}{1}=1 \rightarrow \boxed{(0,1)}$$

חיתוך עם ציר ה-x:

$$g(x)=0 \rightarrow \frac{e^x-3x}{e^x+2x}=0 \rightarrow e^x-3x=0 \rightarrow e^x=3x$$

שוב קיבלנו משוואה שאין ביכולתנו לפתור בכלים אלגבריים.

לכן ניעזר בגרפים של הפונקציות e^x ו- $3x$ ובמסקנות מסעיף א':

לפי הנתון אנו יודעים שהגרפים הללו נחתכים <u>בשתי נקודות בלבד</u>: $B(0.62,\ 1.8589)$ ו- $C(x_C\ ,4.536)$.

לכן למשוואה: $e^x=3x$ יש <u>שני פתרונות</u> המייצגים את הנקודות B ו-C במערכת הצירים.

נותר לנו למצוא את שיעור ה-x של הנקודה C בעזרת משוואת הישר: $y=3x$.

$$y=3x \rightarrow y_C=3x_C \rightarrow 4.536=3x_C \rightarrow x_C=1.512 \rightarrow C(1.512,4.536)$$

מצאנו שפתרונות המשוואה $e^x=3x$ הם: $x_B=0.62$ ו- $x_C=1.512$ ומכאן שנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x הן: $\boxed{(0.62,0)\ ,\ (1.512,0)}$.

3. כדי למצוא את נקודות הקיצון של הפונקציה נגזור אותה ונשווה את הנגזרת ל-0:

$$g'(x)=\frac{\left(e^x-3\right)\left(e^x+2x\right)-\left(e^x-3x\right)\left(e^x+2\right)}{\left(e^x+2x\right)^2}=\frac{e^{2x}+2xe^x-3e^x-6x-e^{2x}-2e^x+3xe^x+6x}{\left(e^2+2x\right)^2}$$

$$=\frac{5xe^x-5e^x}{\left(e^x+2x\right)^2}=\frac{5e^x\left(x-1\right)}{\left(e^x+2x\right)^2}$$

ולכן:

$$g'(x)=0 \rightarrow \frac{5e^{x}(x-1)}{\left(e^{x}+2x\right)^{2}}=0 \rightarrow 5e^{x}(x-1)=0 \;/:5e^{x}\neq 0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$$

נמצא את שיעור ה-y של הנקודה החשודה:

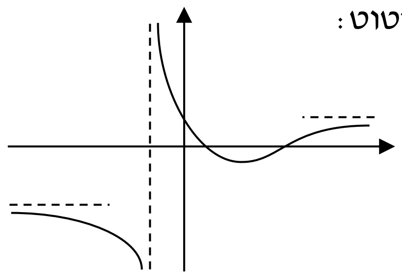
$$g(1)=\frac{e^{1}-3\cdot 1}{e^{1}+2\cdot 1}=-0.06$$

כעת נקבע את סוג הקיצון בעזרת טבלת עלייה וירידה:

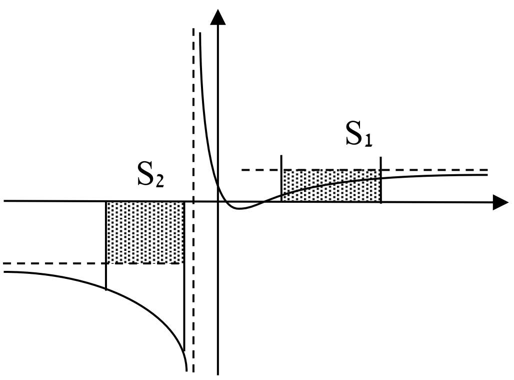
תחום x	$x<-0.35$	$x=-0.35$	$-0.35<x<1$	$x=1$	$1<x$
נציב בנגזרת	$x=-1$	אס'	$x=0$	קיצון	$x=2$
סימן הנגזרת	-		-		+
הפונקציה עולה/יורדת	↘		↘	min	↗

מכאן שלפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון יחידה: $\min(1,-0.06)$.

ג. השרטוט:



ד. נסמן: $\int_{2}^{5} g(x)\,dx = S_1$ ו- $\int_{-3}^{-1} g(x)\,dx = S_2$. נסמן את השטחים הללו בשרטוט של גרף הפונקציה:



ניתן לראות ששטח האינטגרל S_1 <u>מוכל</u> בתוך מלבן

ששטחו: $3\cdot 1=3$ ולכן השטח <u>קטן מ-3</u>.

לעומת זאת, ניתן לראות ששטח האינטגרל S_2 <u>מכיל</u> מלבן

ששטחו: $2\cdot 1.5=3$ ולכן שטח זה, בערכו המוחלט, <u>גדול מ-3</u>.

מכאן שהאינטגרל הגדול יותר בערכו המוחלט הוא <u>אינטגרל ii</u>: $\int_{-3}^{-1} g(x)\,dx$.

שאלה 5

נתונה הפונקציה: $f(x)=(-\ln^2 x+4\ln x-3)^n$ (n מספר טבעי גדול מ-1).

א.1. מבין הגורמים השונים שמרכיבים את $f(x)$ רק לפונקציות ה-ln יש אילוץ הנוגע לתחום ההגדרה. מכאן שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$: $\boxed{0<x}$.

2. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים:

חיתוך עם ציר ה-y לא קיים כיוון שלפי הסעיף הקודם $x=0$ אינו בתחום ההגדרה של הפונקציה.

חיתוך עם ציר ה-x:

$$f(x)=0 \to (-\ln^2 x+4\ln x-3)^n=0 \ /\sqrt[n]{\ } \to -\ln^2 x+4\ln x-3=0$$

$$\to \ln^2 x-4\ln x+3=0 \to (\ln x-3)(\ln x-1)=0$$

ולכן הפתרונות הם:

$$\ln x=1 \to x_1=e$$

ובנוסף:

$$\ln x=3 \to x_2=e^3$$

כלומר נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x הם: $\boxed{(e,0)\,,\,(e^3,0)}$.

ב. נמצא את הנקודות על גרף הפונקציה בהן מתקיים $f'(x)=0$. ראשית נגזור את הפונקציה:

$$f'(x)=n(-\ln^2 x+4\ln x-3)^{n-1}\cdot\left(-2\ln x\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{x}\right)=n(-\ln^2 x+4\ln x-3)^{n-1}\cdot\left(\frac{-2\ln x+4}{x}\right)$$

$$\to f'(x)=\frac{n}{x}(-\ln^2 x+4\ln x-3)^{n-1}\cdot(-2\ln x+4)$$

כעת נשווה את הנגזרת ל-0:

$$f'(x)=0 \to \frac{n}{x}(-\ln^2 x+4\ln x-3)^{n-1}\cdot(-2\ln x+4)=0$$

ולכן הפתרונות הם:

$$(-\ln^2 x+4\ln x-3)^n=0 \to \to x_1=e\,,\,x_2=e^3$$

כאשר אין צורך לפתור שנית את המשוואה כיוון שהיא זהה למשוואה מהסעיף הקודם.

ובנוסף:

$$-2\ln x+4=0 \to 2\ln x=4 \to \ln x=2 \to x_3=e^2$$

כעת נותר רק למצוא את שיעור ה-y של x_3:

$$f(e^2)=(-\left(\ln e^2\right)^2+4\ln e^2-3)^n=1^n=1$$

נקבע כעת את סוג הקיצון בעזרת טבלאות עלייה וירידה עבור n זוגי ועבור n אי-זוגי:

עבור n זוגי:

תחום x	$0<x<e$	$x=e$	$e<x<e^2$	$x=e^2$	$e^2<x<e^3$	$x=e^3$	$e^3<x$
נציב בנגזרת	1	קיצון	5	קיצון	10	קיצון	21
סימן הנגזרת	-		+		-		+
הפונקציה עולה/יורדת	↘	min	↗	max	↘	min	↗

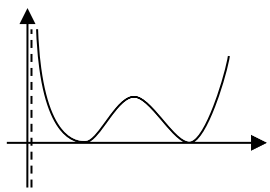
עבור n אי-זוגי:

תחום x	$0<x<e$	$x=e$	$e<x<e^2$	$x=e^2$	$e^2<x<e^3$	$x=e^3$	$e^3<x$
נציב בנגזרת	1	פיתול	5	קיצון	10	פיתול	21
סימן הנגזרת	-		-		+		+
הפונקציה עולה/יורדת	↗		↗	max	↘		↘

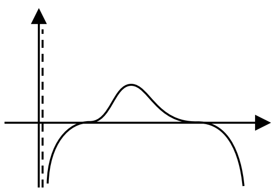
לכן, עבור ערכי n זוגיים נקבל: $\min(e,0)$, $\max(e^2,1)$ ו-$\min(e^3,0)$.

ואילו עבור ערכי n אי-זוגיים נקבל: $(e,0)$ פיתול, $\max(e^2,0)$ ו-$(e^3,0)$ פיתול.

ג. עבור n זוגי:



עבור n אי-זוגי:



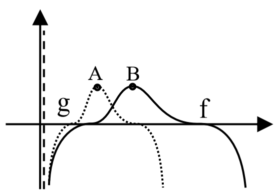
ד. נתונה הפונקציה: $g(x)=\left[-\ln^2(3x)+4\ln(3x)-3\right]^5$ בתחום: $0<x$. ראשית הצירים בנקודה O.

נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ היא A ונקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ היא B.

מבלי לגזור את הפונקציה $g(x)$, נקבע אילו מהישרים, AO או BO, הוא בעל שיפוע גדול יותר:

ראשית נשים לב שמתקיים: $g(x)=f(3x)$ כלומר קיימת התאמה בין ערכי הפונקציות f ו-g. לכל $0<x$, ערך הפונקציה g זהה לערך הפונקציה f המתקבל עבור $3\cdot x$, כלומר עבור שיעור x אחר הנמצא על המשך ציר ה-x במרחק הגדול פי 3 מציר ה-y. כלומר גרף הפונקציה g הוא "כיווץ" פי 3 לכיוון ציר ה-y של גרף הפונקציה f.

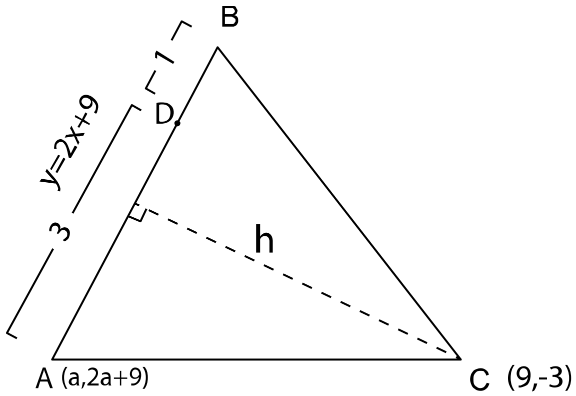
נוסיף את גרף g לשרטוט מהסעיף הקודם, עבור $n=5$ אי-זוגי:



כעת ניתן לראות שאילו נעביר את הישרים AO ו-BO,

הישר AO עולה בקצב המהיר מבין השניים ולכן <u>AO הוא</u>
<u>הישר בעל השיפוע הגדול יותר</u>.

<u>פתרון מלא - מבחן 13</u>



שאלה 1

א. תחילה נמצא את אורך גובה המשולש היורד מהקדקוד
C. זהו המרחק בין הנקודה $C(9,-3)$ לישר AB :
$-2x+y-9=0$.

ניעזר בנוסחה למרחק בין נקודה לישר :

$$h=\frac{|-2\cdot 9-3-9|}{\sqrt{2^2+1}} \rightarrow h=\sqrt{180}$$

כעת נחשב את אורך AB, בסיס המשולש :

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot h}{2} \rightarrow 60=\frac{AB\cdot\sqrt{180}}{2} \rightarrow AB=\sqrt{80}$$

נסמן את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-D באותיות a ו-d בהתאמה. הנקודות נמצאות על הישר $y=2x+9$

ולכן שיעוריהן : $A(a,2a+9)$ ו : $D(d,2d+9)$. נתון : $AD=3BD$. כלומר : $AD=\frac{3}{4}\cdot AB=\frac{3\sqrt{80}}{4}$.

ניעזר במרחק בין הנקודות A ו-D, כדי לבטא את שיעורי הנקודה D באמצעות a :

$$\frac{3\sqrt{80}}{4}=\sqrt{(a-d)^2+(2a+9-2d-9)^2}$$

נעלה בריבוע את שני האגפים :

$$45=a^2-2ad+d^2+4a^2-8ad+4d^2 \rightarrow 5d^2-10ad+5a^2-45=0$$

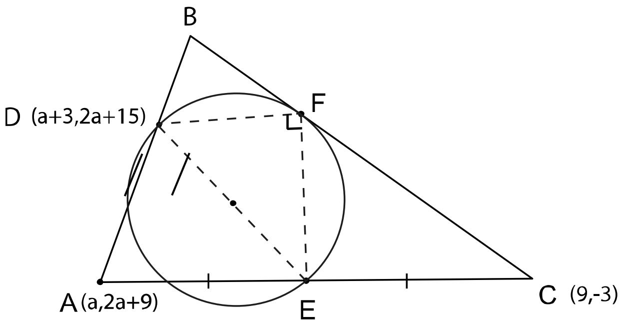
$$d^2-2ad+a^2-9=0$$

ניעזר בנוסחת השורשים כדי למצוא את הערך של d :

$$d_{1,2}=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2-4(a^2-9)}}{2} \rightarrow d_{1,2}=\frac{2a\pm 6}{2} \rightarrow \boxed{d_1=a+3} \quad \text{או} \quad d_2=\cancel{a-3}$$

(הפתרון הימני נפסל כי על פי הנתון, שיעור ה-x של הנקודה D גבוה משיעור ה-x של הנקודה A).

נציב את שיעור d שמצאנו ונקבל את שיעורי הנקודה : $\boxed{D(a+3,2a+15)}$.



ב. תחילה נמצא את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ΔDEF . ניעזר בנוסחה לחישוב שטח מעגל:

$$16.25\pi = \pi \cdot r^2 \;\rightarrow\; r = \sqrt{16.25}$$

נמצא את שיעורי E באמצעות הנוסחה לאמצע הקטע AC:

$$x_E = \frac{a+9}{2}\;,\; y_E = \frac{2a+9-3}{2} \;\rightarrow\; \boxed{E\left(\frac{a}{2}+4.5,\, a+3\right)}$$

הזווית ההיקפית $\measuredangle DFE$ ישרה, ומכאן שהקטע DE הוא קוטר המעגל.

מרכז המעגל הוא אמצע הקטע DE:

$$x_O = \frac{a+3+\frac{a}{2}+4.5}{2}\;,\; y_O = \frac{2a+15+a+3}{2} \;\rightarrow\; \boxed{O\left(\frac{3a+15}{4}\,,\, 1.5a+9\right)}$$

הקוטר DE ארוך פי שניים מהרדיוס. כלומר, אורך הקוטר $2\sqrt{16.25}$.

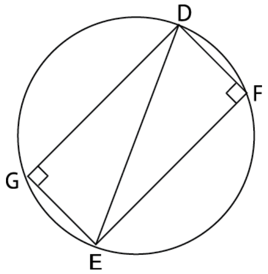
ניעזר בנוסחה לחישוב המרחק בין שתי הנקודות D ו-E ונמצא את a:

$$2\sqrt{16.25} = \sqrt{\left(a+3-\frac{a}{2}-4.5\right)^2 + (2a+15-a-3)^2}$$

נעלה בריבוע את שני האגפים:

$$65 = \frac{a^2}{4} - 1.5a + 2.25 + a^2 + 24a + 144 \;\rightarrow\; a^2 + 18a + 65 = 0$$

פתרונות המשוואה הם: $a=-5$ או $a=-13$. נציב את הפתרונות ב: $O\left(\frac{3a+15}{4}\,,\, 1.5a+9\right)$ ונקבל כי משוואת המעגל היא: $\boxed{x^2 + (y-1.5)^2 = 16.25}$ או $\boxed{(x+6)^2 + (y+10.5)^2 = 16.25}$.



ג. נוכל לפתור את הסעיף בשתי דרכים:

דרך א':

ניתן לחשב שטח של כל מרובע כמחצית מכפלת אורכי אלכסוניו בסינוס הזווית שביניהם. ידוע שאורך אלכסוני המלבן הוא $\sqrt{65}$ יח'. נסמן את הזווית שבין האלכסונים באמצעות α ונקבל את החישוב: $\frac{\sqrt{65}\cdot\sqrt{65}\cdot\sin\alpha}{2} = 33$.

מתקבל פתרון המשוואה המתקבל הוא: $\sin\alpha = \frac{66}{65} > 1$.

כיוון שלא יתכן שערכו של סינוס יהיה גדול מ-1, נוכל להסיק ש**לא ניתן** לחסום במעגל מלבן ששטחו 33 יח"ר.

דרך ב':

נשלים את המשולש ΔDEF לכדי המלבן: DFEG. נסמן $\boxed{DF = m}$, ונבטא את אורך הצלע FE באמצעות משפט פיתגורס במשולש ישר הזווית ΔDEF:

$$FE = \sqrt{DE^2 - DF^2} \rightarrow \boxed{FE = \sqrt{65 - m^2}}$$

שטח המלבן החסום במעגל הוא מכפלת אורכי הצלעות DF ו-FE.

נבדוק האם קיים ערך כלשהו של m, שעבורו מכפלת אורכי הצלעות שווה ל-33:

$$m \cdot \sqrt{65 - m^2} = 33 \rightarrow m^2(65 - m^2) = 1089 \rightarrow -m^4 + 65m^2 - 1089 = 0$$

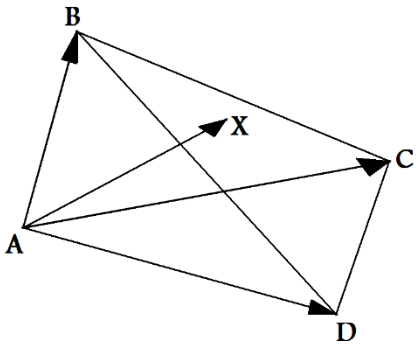
נסמן $t = m^2$ ונבדוק האם יש פתרונות למשוואה:

$$-t^2 + 65t - 1089 = 0 \rightarrow t_{1,2} = \frac{-65 \pm \sqrt{65^2 - 4 \cdot 1089}}{-2} \rightarrow t_{1,2} = \frac{-65 \pm \sqrt{-131}}{-2}$$

ניתן לראות כי הביטוי שבשורש שלילי ולכן אין פתרון למשוואה.

לסיכום, **לא ניתן** לחסום במעגל מלבן ששטחו 33 יח"ר.

שאלה 2



הווקטור: $\overrightarrow{AX}$ יוצא מהקדקוד A לכיוון המישור BCD.

גם הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ יוצאים מהקדקוד A, כך שניתן לקבוע כי הווקטור $\overrightarrow{AX}$ הוא קומבינציה לינארית של שלושת הווקטורים: $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$.

קצותיהם של שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ בנקודות B, C ו- D, כך שלמעשה הם מגדירים את המישור BCD.

נזכיר כי כאשר הווקטור $\overrightarrow{AX}$ מסתיים על המישור BCD, נוכל לבטא אותו כ: $\boxed{\overrightarrow{AX} = a\cdot\underline{v} + b\cdot\underline{u} + c\cdot\underline{w}}$ **והוא מקיים:** $\boxed{a+b+c=1}$.

אורכי הווקטורים הם: $|\underline{u}| = 3,\ |\underline{v}| = 1,\ |\underline{w}| = 2$.

נזכור גם כי הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ מאונכים זה לזה ולכן: $\underline{v}\cdot\underline{u} = 0$, $\underline{v}\cdot\underline{w} = 0$ ו- $\underline{u}\cdot\underline{w} = 0$.

הווקטור $\overrightarrow{AX}$ יוצר זוויות שוות עם שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$. נביע את קוסינוס הזוויות השוות הללו:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AX}\cdot\underline{u}}{|\overrightarrow{AX}|\cdot|\underline{u}|} \to \cos\alpha = \frac{(a\cdot\underline{v}+b\cdot\underline{u}+c\cdot\underline{w})\cdot\underline{u}}{|\overrightarrow{AX}|\cdot 3} \to \cos\alpha = \frac{a\cdot\cancel{\underline{v}\cdot\underline{u}}+b\cdot\underline{u}^2+c\cdot\cancel{\underline{w}\cdot\underline{u}}}{|\overrightarrow{AX}|\cdot 3}$$

$$\to \cos\alpha = \frac{b\cdot 9}{|\overrightarrow{AX}|\cdot 3} \to \cos\alpha = \frac{3b}{|\overrightarrow{AX}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AX}\cdot\underline{v}}{|\overrightarrow{AX}|\cdot|\underline{v}|} \to \cos\alpha = \frac{(a\cdot\underline{v}+b\cdot\underline{u}+c\cdot\underline{w}).\underline{v}}{|\overrightarrow{AX}|\cdot 1} \to \cos\alpha = \frac{a\cdot\underline{v}^2+b\cdot\cancel{\underline{u}\cdot\underline{v}}+c\cdot\cancel{\underline{w}\cdot\underline{v}}}{|\overrightarrow{AX}|}$$

$$\to \cos\alpha = \frac{a}{|\overrightarrow{AX}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AX}\cdot\underline{w}}{|\overrightarrow{AX}|\cdot|\underline{w}|} \to \cos\alpha = \frac{(a\cdot\underline{v}+b\cdot\underline{u}+c\cdot\underline{w})\cdot\underline{w}}{|\overrightarrow{AX}|\cdot 2} \to \cos\alpha = \frac{a\cdot\cancel{\underline{v}\cdot\underline{w}}+b\cdot\cancel{\underline{u}\cdot\underline{w}}+c\cdot\underline{w}^2}{|\overrightarrow{AX}|\cdot 2}$$

$$\to \cos\alpha = \frac{c\cdot 4}{|\overrightarrow{AX}|\cdot 2} \to \cos\alpha = \frac{2c}{|\overrightarrow{AX}|}$$

הזוויות שוות ולכן נשווה בין שלושת הביטויים:

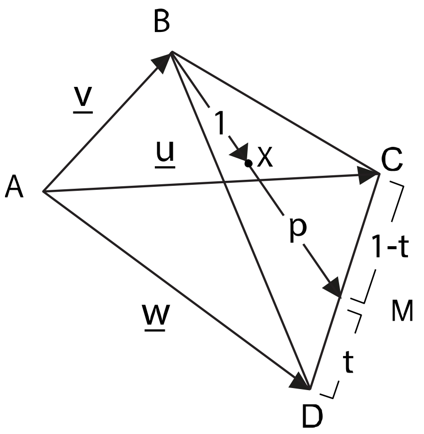
$$\frac{3b}{\cancel{|\overrightarrow{AX}|}} = \frac{a}{\cancel{|\overrightarrow{AX}|}} = \frac{2c}{\cancel{|\overrightarrow{AX}|}} \to 3b = a = 2c$$

ממשוואה זו נובעות שתי הזהויות: $a = 2c,\ b = \frac{2}{3}c$. נציב אותן במשוואה $a+b+c=1$ ונקבל:

$$a+b+c=1 \to 2c+\frac{2}{3}c+c=1 \to \frac{11}{3}c=1 \to \boxed{c=\frac{3}{11}}$$

ומכאן ש: $\boxed{a=\frac{6}{11}}$ ו- $\boxed{b=\frac{2}{11}}$.

לסיכום, הווקטור $\overrightarrow{AX}=a\cdot\underline{v}+b\cdot\underline{u}+c\cdot\underline{w}$ הוא: $\boxed{\overrightarrow{AX}=\frac{2}{11}\cdot\underline{u}+\frac{3}{11}\cdot\underline{w}+\frac{6}{11}\cdot\underline{v}}$.



ב. שאלה מהסוג "מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה את הישר" היא לרוב שאלת וקטורים שניתן לפתור באמצעות ***יחידות ההצגה***. יחידות ההצגה הוא עקרון לפיו **כל וקטור במרחב ניתן להצגה באופן אחד בלבד**. לכן, אם נביע וקטור בשני אופנים שונים, הרי שניתן יהיה להשוות ביניהם.

נתבונן בשרטוט ונביע את הווקטור $\overrightarrow{BM}$ בשתי דרכים שונות ובשימוש בשני פרמטרים סקלארים שונים t ו-p (היעזרו בשרטוט).

דרך אחת לבטא את הווקטור $\overrightarrow{BM}$ היא כהארכה של הווקטור $\overrightarrow{BX}$ על ידי הכפלתו בסקלאר p. כלומר, המשכו של הוקטור $\overrightarrow{BX}$, משמר את הכיוון של הוקטור $\overrightarrow{BX}$ אך לא ניתן לדעת את אורכו ולכן נכפיל אותו בסקלאר p:

$$\overrightarrow{BM}=p\cdot\overrightarrow{BX}\ \rightarrow\ \overrightarrow{BM}=p\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AX}\right)\ \rightarrow\ \overrightarrow{BM}=p\cdot\left(-\underline{v}+\frac{2}{11}\cdot\underline{u}+\frac{3}{11}\cdot\underline{w}+\frac{6}{11}\cdot\underline{v}\right)\ \rightarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{BM}=\frac{2p}{11}\cdot\underline{u}+\frac{3p}{11}\cdot\underline{w}-\frac{5p}{11}\cdot\underline{v}}$$

דרך נוספת לבטא את הווקטור $\overrightarrow{BM}$ היא:

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DM}\ \rightarrow\ \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BD}+t\cdot\overrightarrow{DC}\ \rightarrow\ \overrightarrow{BM}=-\underline{v}+\underline{w}+t\cdot(-\underline{w}+\underline{u})\ \rightarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{BM}=t\cdot\underline{u}+(1-t)\underline{w}-\underline{v}}$$

מכיוון ששתי התצוגות שמצאנו זהות, נוכל להשוות בין המקדמים הסקלארים של u, v ו-w. נקבל מערכת של שלוש משוואות בשני נעלמים. נפתור את המערכת:

$$\text{I}\ \ (\underline{u})\ \ \frac{2p}{11}=t \qquad \text{II}\ \ (\underline{w})\ \ \frac{3p}{11}=1-t \qquad \text{III}\ \ (\underline{v})\ \ -\frac{5p}{11}=-1\ \rightarrow\ p=\frac{11}{5}\ \rightarrow\ \boxed{p=2.2}$$

נחזור ונציב ב-I:
$$\frac{2p}{11}=t\ \rightarrow\ \frac{2\cdot 2.2}{11}=t\ \rightarrow\ \boxed{t=\frac{2}{5}}$$

מכאן שהנקודה M מחלקת את הקטע CD ביחס של: $DM=\frac{2}{5}$ ו- $MC=\frac{3}{5}$.

לסיכום, היחס בין אורכי הקטעים הוא: 2:3.

שאלה 3

א. כדי שנוכל להוציא את השורש הרביעי של המספר המרוכב: $-8+8\sqrt{3}i$, נעביר אותו תחילה לתצוגה קוטבית:

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \to r=\sqrt{(-8)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2} \to \boxed{r=16}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \to \tan\theta=\frac{8\sqrt{3}}{-8} \to \theta=-60^\circ$$

נבדוק האם הזווית $\theta=-60^\circ$ נמצאת ברביע המתאים במישור גאוס:

המספר המרוכב $\left(-8,8\sqrt{3}\right)$ נמצא ברביע השני $(-,+)$, ואילו הזווית -60° נמצאת ברביע הרביעי $(+,-)$.

כלומר עלינו להוסיף לזווית 180°: $\boxed{\theta=120^\circ}$, ומכאן שהמספר המרוכב $-8+8\sqrt{3}i$ מוצג קוטבית כ: $\boxed{16cis120^\circ}$. כעת נוכל להוציא שורש רביעי ולקבל ארבעה פתרונות:

$$Z^4=16cis120^\circ \to Z=\sqrt[4]{16}cis\left(\frac{120^\circ+360^\circ k}{4}\right) \to Z=2cis\left(30^\circ+90^\circ k\right)$$

$$k=0 \to Z_1=2cis30^\circ \qquad k=1 \to Z_2=2cis120^\circ$$

$$k=2 \to Z_3=2cis210^\circ \qquad k=3 \to Z_4=2cis300^\circ$$

כעת נציב את הפתרונות בביטוי: $\left|\frac{Z_3^{\,k}\cdot Z_4^{\,2}}{Z_1^{\,2}\cdot Z_2^{\,k}}\right|$:

$$\left|\frac{Z_3^{\,k}\cdot Z_4^{\,2}}{Z_1^{\,2}\cdot Z_2^{\,k}}\right| \to \left|\frac{\left(2cis210^\circ\right)^k\cdot\left(2cis300^\circ\right)^2}{\left(2cis30^\circ\right)^2\cdot\left(2cis120^\circ\right)^k}\right|$$

$$\to \left|\frac{\cancel{2^k}cis210^\circ k\cdot\cancel{4}cis600^\circ}{\cancel{4}cis60^\circ\cdot\cancel{2^k}cis120^\circ k}\right| \to \left|cis90^\circ k\cdot cis540^\circ\right| \to \left|cis\left(540^\circ+90^\circ k\right)\right|$$

נזכור כי $r=|Z|$, ומכאן שהערך המוחלט של המספר $cis\left(540^\circ+90^\circ k\right)$ הוא הרדיוס שלו: $\boxed{\left|cis\left(540^\circ+90^\circ k\right)\right|=1}$.

ב. ראשית, נעביר את הביטוי $16i$ באגף הימני לתצוגה קוטבית ונקבל כי הוא שווה ל- $16cis90^\circ$.

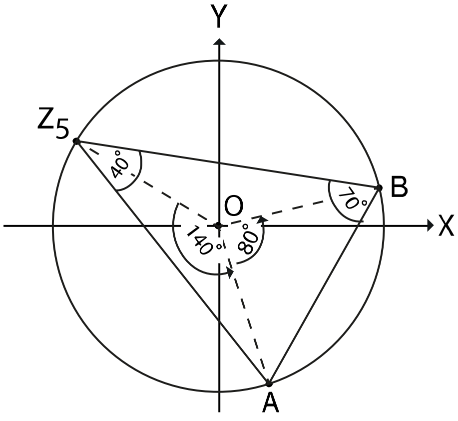
כעת נציב את הפתרונות מסעיף א' במשוואה:

$$Z_1\cdot Z_2\cdot Z_3\cdot Z_4\cdot Z_5=16i \to 2cis30^\circ\cdot 2cis120^\circ\cdot 2cis210^\circ\cdot 2cis300^\circ\cdot Z_5=16cis90^\circ \to$$

$$16cis660^\circ\cdot Z_5=16cis90^\circ \to Z_5=\frac{16cis90^\circ}{16cis660^\circ} \to Z_5=cis\left(-570^\circ\right) \to \boxed{Z_5=cis150^\circ}$$

(בשלב האחרון הוספנו 360° מעלות פעמיים עד שהזווית הפכה לחיובית).

ג. נתבונן בשרטוט. זווית הבסיס $\sphericalangle ABZ_5$ שווה 70°. הזווית המרכזית $\sphericalangle Z_5OA$ הנשענת על אותה הקשת גדולה ממנה פי שניים ולכן שווה ל- 140°. כדי להגיע למספר המרוכב A, יש להוסיף 140° לארגומנט (הזווית) של המספר $Z_5 = \text{cis}150^\circ$. נקבל:



$$A = \text{cis}(150^\circ + 140^\circ) \rightarrow \boxed{\text{cis}290^\circ}$$

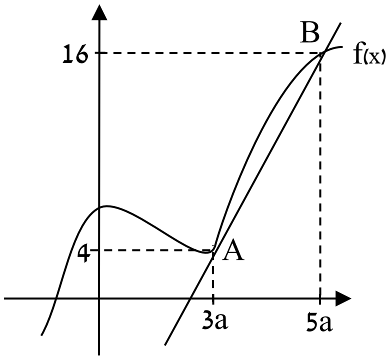
קל לחשב כי זווית הראש במשולש שווה 40°, ולכן הזווית המרכזית $\sphericalangle BOA$ הנשענת על אותה קשת, שווה 80°. כדי להגיע למספר המרוכב B, עלינו להוסיף 80° לארגומנט (הזווית) של $A = \text{cis}290^\circ$:

$$B = \text{cis}(290^\circ + 80^\circ) \rightarrow \text{cis}370^\circ \rightarrow \boxed{\text{cis}10^\circ}$$

בשלב האחרון החסרנו 360° מעלות עד שהזווית הפכה לחיובית הקטנה ביותר. נחשב את שטח המשולש ΔABZ_5 כסכום שלושת המשולשים המרכיבים אותו:

$$S = \frac{1\cdot 1\cdot \sin 140^\circ}{2} + \frac{1\cdot 1\cdot \sin 140^\circ}{2} + \frac{1\cdot 1\cdot \sin 80^\circ}{2} = 1.135 \quad \text{(יח"ר)}$$

שאלה 4



בשרטוט נתונים גרף הפונקציה $f(x)$ וישר המשיק לו בנקודה A וחותך אותו בנקודה B. הגדירו את הפונקציה: $g(x)=2+\sqrt{f(x)}$.

א. נוכיח שגרף הפונקציה $g(x)$ עובר בנקודה $A(3a,4)$:

נציב את שיעור ה-x של הנקודה בפונקציה ונקבל:

$$g(x_A)=g(3a)=2+\sqrt{f(3a)}=2+\sqrt{4}=2+2=4=y_A$$

ומכאן שהנקודה A נמצאת על הפונקציה $g(x)$.

ב. נביע באמצעות a את משוואת הישר המשיק לגרף $g(x)$ בנקודה A:

ראשית נגזור את הפונקציה $g(x)$:

$$g'(x)=0+\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)\ \rightarrow\ g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

כעת נציב בנגזרת את שיעור ה-x של הנקודה A בנגזרת כדי למצוא את שיפוע המשיק:

$$g'(x_A)=g'(3a)=\frac{f'(3a)}{2\sqrt{f(3a)}}=\frac{f'(3a)}{2\sqrt{4}}=\frac{f'(3a)}{2\cdot 2}=\frac{f'(3a)}{4}$$

כעת כדי למצוא את שיפוע המשיק ל-g בנקודה A נותר למצוא את ערך הנגזרת של f עבור $x=3a$ כלומר את ערך הנגזרת של f בנקודה A. ערך זה הוא למעשה שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה A וכיוון שנתונות הנקודות A ו-B הנמצאות על המשיק נוכל לחשב את השיפוע בעזרתן:

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{16-4}{5a-3a}=\frac{12}{2a}=\frac{6}{a}$$

ולכן $f'(3a)=\frac{6}{a}$. נציב בחזרה:

$$g'(x_A)=\frac{f'(3a)}{4}=\frac{\frac{6}{a}}{4}=\frac{6}{a}\cdot\frac{1}{4}=\frac{6}{4a}=\frac{3}{2a}$$

מצאנו את שיפוע המשיק ולכן נוכל יחד עם הנקודה A למצוא את משוואת המשיק:

$$y-4=\frac{3}{2a}\left(x-3a\right)\ \rightarrow\ y-4=\frac{3}{2a}x-4\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \boxed{y=\frac{3}{2a}x-\frac{1}{2}}$$

ג. נתון שהזווית שבין המשיק שאת משוואתו מצאנו בסעיף א' לבין הכיוון החיובי של ציר ה-x היא 45°.

ניעזר במשפט:

עבור ישר ששיפועו m, הזווית α שבין הישר לבין הכיוון החיובי של ציר ה-x מקיימת: $\tan\alpha = m$.

נציב ונקבל: $m = \tan 45^\circ = 1$ ומכאן ששיפוע המשיק הוא 1. נשווה לשיפוע שמצאנו:

$$1 = \frac{3}{2a} \rightarrow \boxed{a = 1\frac{1}{2}}$$

כמו כן נוכל כעת למצוא את משוואת המשיק:

$$y = \frac{3}{2\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)}x - \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{3}{3}x - \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{y = x - \frac{1}{2}}$$

ד. נתון שהמשיק שמשוואתו $y = x - \frac{1}{2}$ משיק גם לגרף הפונקציה $h(x) = \frac{e^{4x} - 8e^{2x} + 4x + c}{4}$. נגזור את הפונקציה ונשווה לשיפוע הישר כדי למצוא את נקודת ההשקה:

$$h'(x) = \frac{4e^{4x} - 2\cdot 8e^{2x} + 4 + 0}{4} = \frac{4e^{4x} - 16e^{2x} + 4}{4}$$

נשווה לשיפוע 1 ונקבל:

$$\frac{4e^{4x} - 16e^{2x} + 4}{4} = 1 \;/\cdot 4 \rightarrow 4e^{4x} - 16e^{2x} + 4 = 4 \rightarrow 4e^{4x} - 16e^{2x} = 0$$

$$\rightarrow 4e^{2x}\left(e^{2x} - 4\right) = 0 \;/: 4e^{2x} \neq 0 \rightarrow e^{2x} - 4 = 0 \rightarrow e^{2x} = 4 \rightarrow 2x = \ln 4 \rightarrow x = \ln 2$$

הביטוי e^x בהכרח חיובי ולכן הפתרון השלילי -2 נפסל ומצאנו ש:

$$e^x = 2 \rightarrow \ln e^x = \ln 2 \rightarrow x = \ln 2$$

נציב את שיעור ה-x במשוואת המשיק כדי למצוא את שיעור ה-y:

$$y = x - \frac{1}{2} \rightarrow y = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

ומכאן שנקודת ההשקה היא: $\left(\ln 2, \ln 2 - \frac{1}{2}\right)$.

כעת נוכל להציב את הנקודה בפונקציה $h(x)$ כדי למצוא את הקבוע C:

$$h(\ln 2) = \frac{e^{4\ln 2} - 8e^{2\ln 2} + 4\ln 2 + c}{4} = \frac{e^{\ln 2^4} - 8e^{\ln 2^2} + 4\ln 2 + c}{4} = \frac{e^{\ln 16} - 8e^{\ln 4} + 4\ln 2 + c}{4}$$

$$= \frac{16 - 8\cdot 4 + 4\ln 2 + c}{4} = \frac{16 - 32 + 4\ln 2 + c}{4} = \frac{-16 + 4\ln 2 + c}{4} = -4 + \ln 2 + \frac{c}{4}$$

וכיוון שמצאנו ששיעור ה-y הוא $\ln 2 - \frac{1}{2}$ נשווה ונקבל:

$$-4+\ln 2+\frac{c}{4}=\ln 2-\frac{1}{2} \rightarrow -4+\frac{c}{4}=-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{c}{4}=3\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{c=14}$$

ה. נחשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{-3}^{0} h(x)\,dx=\int_{-3}^{0}\frac{e^{4x}-8e^{2x}+4x+14}{4}dx=\frac{1}{4}\int_{-3}^{0} e^{4x}-8e^{2x}+4x+14\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{4x}}{4}-\frac{8e^{2x}}{2}+\frac{4x^2}{2}+14x\right)\Bigg|_{-3}^{0}=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{4x}}{4}-4e^{2x}+2x^2+14x\right)\Bigg|_{-3}^{0}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{e^{4\cdot 0}}{4}-4e^{2\cdot 0}+2\cdot 0^2+14\cdot 0\right)-\left(\frac{e^{4\cdot(-3)}}{4}-4e^{2\cdot(-3)}+2\cdot(-3)^2+14\cdot(-3)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}-4\cdot 1+0\right)-\left(\frac{e^{-12}}{4}-4e^{-6}+18-42\right)\right]=5.065$$

בנוסף:

$$\int_{-5}^{0} h(x)\,dx=\int_{-5}^{0}\frac{e^{4x}-8e^{2x}+4x+14}{4}dx=\cdots=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{4x}}{4}-4e^{2x}+2x^2+14x\right)\Bigg|_{-5}^{0}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{e^{4\cdot 0}}{4}-4e^{2\cdot 0}+2\cdot 0^2+14\cdot 0\right)-\left(\frac{e^{4\cdot(-5)}}{4}-4e^{2\cdot(-5)}+2\cdot(-5)^2+14\cdot(-5)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}-4\cdot 1+0\right)-\left(\frac{e^{-20}}{4}-4e^{-10}+50-70\right)\right]=4.063$$

כלומר מצאנו ש: $\int_{-3}^{0} h(x)\,dx=5.065$ וגם $\int_{-5}^{0} h(x)\,dx=4.063$.

הרחבת תחום האינטגרל מ-$[-3,0]$ ל-$[-5,0]$ <u>מקטינה</u> את ערכו ומכאן ש"השטח" שהוספנו הוא בעל סימן שלילי, כלומר גרף הפונקציה מתחת לציר ה-x. כמו כן, הפונקציה $h(x)$ לפחות בחלקה <u>מעל לציר ה-x</u> שכן אילו הייתה כולה מתחת לציר ה-x שני האינטגרלים היו שליליים.

הפונקציה $h(x)$ רציפה ומכאן שגרף הפונקציה בהכרח חותך את ציר ה-x ולכן <u>הטענה הנכונה היא: 1</u>.

שאלה 5

א. (1) הפונקציה מוגדרת כאשר הביטוי שבתוך ה-log הוא חיובי. נבדוק מתי הביטוי $\sin(bx)$ מתאפס:

$$\sin(bx)=0 \ \rightarrow\ bx=\pi\cdot k \ \rightarrow\ x=\frac{\pi\cdot k}{b}$$

אם נציב $k=0$ נקבל את האסימפטוטה: $\boxed{x=0}$. אם נציב $k=1$ נקבל את האסימפטוטה: $\boxed{x=\frac{\pi}{b}}$.

אלו האסימפטוטות בעלות שיעור ה-x הנמוך ביותר אשר <u>אינן</u> עוברות ברביע השני.

(2) נשווה את הפונקציה ל-0:

$$f(x)=\log_2\left(\sin(bx)\right)=0 \ \rightarrow\ \sin(bx)=1 \ \rightarrow\ bx=\frac{\pi}{2}+2\pi k \ \rightarrow\ x=\frac{\pi}{2b}+\frac{2\pi k}{b}$$

נציב $k=0$ ונקבל את נקודת החיתוך בעלת שיעור ה-x החיובי הנמוך ביותר: $\left(\frac{\pi}{2b},0\right)$.

(3) כדי למצוא את נקודת הקיצון, נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת ל-0:

$$f'(x)=\frac{b\cdot\cos(bx)}{\ln 2\cdot\sin(bx)}=0 \ \rightarrow\ \cos(bx)=0 \ \rightarrow\ bx=\frac{\pi}{2}+\pi k \ \rightarrow\ x=\frac{\pi}{2b}+\frac{\pi k}{b}$$

נציב $k=0$ ונקבל את נקודת הקיצון בעלת שיעור ה-x החיובי הנמוך ביותר: $\left(\frac{\pi}{2b},0\right)$.

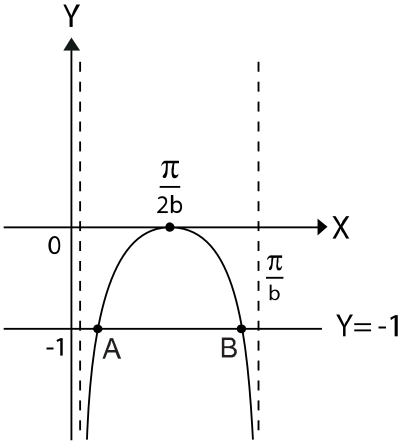
כדי לבדוק את סוג נקודת הקיצון, נמצא את הנגזרת השניה:

$$f''(x)=\frac{b}{\ln 2}\cdot\left(\frac{-\sin(bx)\cdot b\cdot\sin(bx)-\cos(bx)\cdot b\cdot\cos(bx)}{\sin^2(bx)}\right)$$

$$=\frac{b^2}{\ln 2}\cdot\left(-\frac{\sin^2(bx)+\cos^2(bx)}{\sin^2(bx)}\right)=-\frac{b^2}{\ln 2\cdot\sin^2(bx)}$$

נשים לב כי הביטוי שהתקבל הוא ביטוי בהכרח שלילי:

המונה והמכנה בהכרח חיוביים בתנאי השאלה, והסימן "-" הופך את הביטוי לשלילי בהכרח. כלומר, הנגזרת השנייה שלילית, ומכאן שהנקודה $\left(\frac{\pi}{2b},0\right)$ היא נקודת מקסימום.



ב. נשרטט את גרף הפונקציה בין שתי האסימפטוטות.

נמצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.

שיעור ה-y בנקודות אלו הוא (1-) ולכן:

$$f(x)=\log_2\left(\sin(bx)\right)=-1 \ \rightarrow\ \sin(bx)=2^{-1} \ \rightarrow\ \sin(bx)=\frac{1}{2}$$

$$\text{(I)}\quad bx=\frac{\pi}{6}+2\pi k \ \rightarrow\ x=\frac{\pi}{6b}+\frac{2\pi k}{b}$$

$$\text{(II)}\quad bx=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k \ \rightarrow\ bx=\frac{5\pi}{6}+2\pi k \ \rightarrow\ x=\frac{5\pi}{6b}+\frac{2\pi k}{b}$$

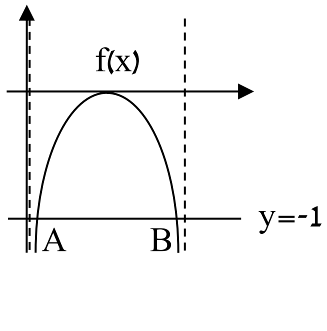
נציב $k=0$ בשתי האפשרויות ונקבל את הנקודות: $A\left(\frac{\pi}{6b},-1\right)$ ו- $B\left(\frac{5\pi}{6b},-1\right)$.

המרחק בין הנקודות הוא $\frac{\pi}{3}$. לשתי הנקודות ערך y זהה, ולכן המרחק הוא ההפרש בין שיעורי ה-x של הנקודות:

$$\frac{5\pi}{6b}-\frac{\pi}{6b}=\frac{\pi}{3} \ \rightarrow\ 5-1=2b \ \rightarrow\ \boxed{b=2}$$

ג. הוגדרה הפונקציה $g(x)=f(-x)$ בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$. גרף $g(x)$ חותך את הישר $y=-1$ בנקודות C ו-D.

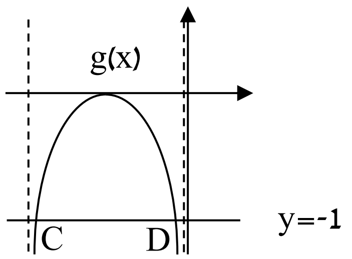
הוגדרה הפונקציה $h(x)=f(0.1x)$ בתחום $0\le x\le 5\pi$. גרף $h(x)$ חותך את הישר $y=-1$ בנקודות E ו-F.



בסעיף הקודם שרטטנו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום שבין שתי האסימפטוטות האנכיות $x=0$ ו- $x=\frac{\pi}{2}$:

על סמך גרף זה נוכל לשרטט סקיצות של הפונקציות החדשות $g(x)$ ו- $h(x)$ ובעזרתן נקבע איזה מהקטעים - AB, CD או EF - ארוך יותר.

נבחן את הפונקציה $g(x) = f(-x)$:



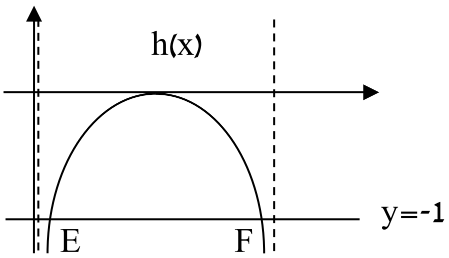
עבור כל x שנציב בפונקציה $g(x)$, נקבל את שיעור ה-y שהתאים ל-x הנגדי לו בפונקציה $f(x)$. למעשה, גרף הפונקציה $g(x)$ הוא **שיקוף** ביחס לציר ה-y של גרף הפונקציה $f(x)$.

נשים לב שלא ביצענו מתיחה או כיווץ של הגרף אלא רק **שיקוף** ביחס לציר ולכן המרחק בין הנקודות C ו-D זהה למרחק בין הנקודות A ו-B.

השיקוף משפיע באותו אופן גם על האסימפטוטות האנכיות :
השיקוף של האסימפטוטה $x = 0$ מותיר אותה במקומה.

השיקוף של האסימפטוטה $x = \frac{\pi}{2}$ מהפונקציה $f(x)$ יוצרת את האסימפטוטה $x = -\frac{\pi}{2}$ בפונקציה $g(x)$.

נבחן את הפונקציה $h(x) = f(0.1x)$:



עבור כל x שנציב בפונקציה $h(x)$, נקבל את שיעור ה-y שהתאים ל-x הקטן ממנו פי 10 בפונקציה $f(x)$. למעשה, גרף הפונקציה $h(x)$ הוא **מתיחה** פי 10 של גרף הפונקציה $f(x)$ ביחס לציר ה-y.

לכן, המרחק בין הנקודות E ו-F גדול יותר מהמרחק בין הנקודות A ו-B ולכן גם גדול יותר מהמרחק בין הנקודות C ו-D.

המתיחה משפיעה באותו אופן גם על האסימפטוטות האנכיות :
האסימפטוטה $x = 0$ נותרת במקומה.

לאחר המתיחה, מהאסימפטוטה $x = \frac{\pi}{2}$ מהפונקציה $f(x)$ תתקבל האסימפטוטה $x = 5\pi$ בפונקציה $g(x)$.

לסיכום, מצאנו שהמרחק הגדול ביותר הוא בין הנקודות E ו-F ולכן הקטע EF הוא הארוך ביותר.