פתרון מלא - מבחן 5

שאלה 1

א. נוכיח באינדוקציה שהביטוי $7^n - 4^n$ מתחלק ב-3 ללא שארית לכל n טבעי:

I. **שלב הבדיקה** - מקרה הבסיס $n = 1$:

$$7^1 - 4^1 = 7 - 4 = 3$$

מצאנו שעבור $n = 1$ ערכו של הביטוי $7^n - 4^n$ שווה ל-3 ולכן הוא מתחלק ב-3 ללא שארית.

II. **שלב ההנחה** - נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$, כלומר שהביטוי $7^k - 4^k$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

III. **שלב ההוכחה** -

נראה שהטענה נכונה עבור $n = k+1$, כלומר שהביטוי $7^{k+1} - 4^{k+1}$ מתחלק ב-3 ללא שארית:

תחילה נפתח את הביטוי $7^{k+1} - 4^{k+1}$:

$$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7\cdot 7^k - 4\cdot 4^k = (3+4)\cdot 7^k - 4\cdot 4^k = 3\cdot 7^k + 4\cdot 7^k - 4\cdot 4^k = 3\cdot 7^k + 4\cdot(7^k - 4^k)$$

$$\rightarrow\ 7^{k+1} - 4^{k+1} = 3\cdot 7^k + 4\cdot(7^k - 4^k)$$

כעת נראה שהביטוי השקול $3\cdot 7^k + 4\cdot(7^k - 4^k)$ מתחלק ב-3 ללא שארית:

1. לפי הנחת האינדוקציה, הביטוי $7^k - 4^k$ מתחלק ב-3 ללא שארית ולכן גם $4\cdot(7^k - 4^k)$ מתחלק ב-3 ללא שארית.
2. הביטוי $3\cdot 7^k$ הוא כפולה של 3 ולכן מתחלק ב-3 ללא שארית.
3. הביטוי $3\cdot 7^k + 4\cdot(7^k - 4^k)$ הוא סכום של שני מחוברים שמתחלקים ב-3 ללא שארית ולכן הוא מתחלק ב-3 ללא שארית.

מצאנו שהביטוי $3\cdot 7^k + 4\cdot(7^k - 4^k)$ מתחלק ב-3 ללא שארית ולכן גם $7^{k+1} - 4^{k+1}$ השקול לו מתחלק ב-3 ללא שארית, כנדרש.

משפט מסכם: בדקנו ומצאנו שהטענה נכונה בעבור $n = 1$. הוכחנו שאם הטענה נכונה בעבור מספר טבעי כלשהו k, אז היא נכונה גם בעבור המספר הטבעי העוקב $k+1$. בזאת הוכחנו על פי עקרון האינדוקציה המתמטית שהטענה נכונה לכל מספר טבעי n.

ב. גל ניגש לארבעה ראיונות עבודה שבסיומם יקבל הודעת "עובר" או "לא עובר". ההסתברות שיעבור כל אחד מהם היא p. ההסתברות שעבר את כל הראיונות, בהינתן שקיבל את אותה הודעה לאחר כל הראיונות היא $\frac{1}{17}$.

1. כדי למצוא את p נגדיר את המאורעות הבאים:

המאורע A - "לעבור את כל הראיונות". המאורע B - "לקבל בכל הראיונות את אותה הודעה".

I. המאורע A הוא חיתוך של 4 מאורעות בלתי תלויים המייצגים את התוצאה "עובר" ב-4 הראיונות השונים. ההסתברות של כל מאורע היא p ולכן ההסתברות של המאורע A היא: $P(A)=p\cdot p\cdot p\cdot p=p^4$

II. המאורע B הוא איחוד של שני המאורעות הזרים "קיבל הודעת 'עובר' בכל הראיונות" ו-"קיבל הודעת 'לא עובר' בכל הראיונות". המאורע הראשון באיחוד הוא A ואת ההסתברות להתרחשותו כבר ביטאנו.
המאורע השני באיחוד הוא חיתוך של 4 מאורעות בלתי תלויים המייצגים כל אחד את התוצאה "לא עובר".
כל אחד מ-4 אלו מתרחש בהסתברות של $1-p$, ולכן ההסתברות לחיתוך שווה ל- $(1-p)^4$. לבסוף,
ההסתברות לאיחוד מאורעות זרים שווה לסכום ההסתברויות של המאורעות ולכן: $P(B)=p^4+(1-p)^4$

III. ההסתברות המתוארת היא ההסתברות המותנית $P(A/B)$. כיוון שהמאורע A <u>מוכל</u> במאורע B מתקיים: $P(A\cap B)=P(A)$ ולכן ההסתברות המתוארת שווה ל:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{p^4}{p^4+(1-p)^4}$$

נתון ש: $P(A/B)=\frac{1}{17}$ ולכן:

$$\frac{p^4}{p^4+(1-p)^4}=\frac{1}{17}\ \rightarrow\ 17p^4=p^4+(1-p)^4\ \rightarrow\ 16p^4=(1-p)^4\quad /\pm\sqrt[4]{\ }$$

לאחר הוצאת השורש יתקבלו שתי אפשרויות:

$$2p=1-p\ \rightarrow\ 3p=1\ \rightarrow\ p=\tfrac{1}{3}\qquad \text{או}\qquad 2p=-(1-p)\ \rightarrow\ 2p=-1+p\ \rightarrow\ p=-1$$

הפתרון השלילי נפסל כיוון שהסתברות אינה יכולה להיות שלילית ולכן מצאנו ש: $p=\frac{1}{3}$.

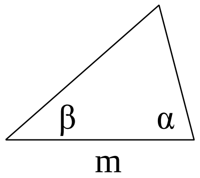
2. נביע באמצעות n את ההסתברות שייגש ל-2n ראיונות ויקבל במחציתם הודעת "עובר":

כדי לחשב את ההסתברות המבוקשת ניעזר בנוסחת ברנולי. במקרה המדובר יש **n** הודעות "עובר" מתוך **2n** ראיונות בסך הכל. ההסתברות לעבור ראיון מסוים היא $\frac{1}{3}$ וההסתברות לא לעבור ראיון מסוים היא של המאורע המשלים, והיא $\frac{2}{3}$. נציב בנוסחת ברנולי ונקבל שההסתברות המבוקשת היא:

$$\binom{2n}{n}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^n=\binom{2n}{n}\left(\frac{2}{9}\right)^n$$

ג. במשולש ששתיים מזוויותיו הן α ו- β, נתון: $\cos(2\alpha-\beta)=\sin(2\beta-\alpha)$, $\beta<\alpha$ ו- α זווית חדה.

נסמן ב-m את אורך הצלע שבין הזוויות α ו- β.



נביע באמצעות m ו- α את שטח המשולש:

לפי הזהות $\sin x=\cos(90^\circ-x)$ מתקיים:

$$\cos(2\alpha-\beta)=\sin(2\beta-\alpha)\ \to\ \cos(2\alpha-\beta)=\cos\left[90^\circ-(2\beta-\alpha)\right]\ \to\ \cos(2\alpha-\beta)=\cos(90^\circ-2\beta+\alpha)$$

זוהי משוואה טריגונומטרית שקיימים עבורה שני פתרונות כלליים אפשריים:

I. <u>פתרון ראשון</u>:

$$2\alpha-\beta=90^\circ-2\beta+\alpha+360^\circ k\ \to\ \alpha+\beta=90^\circ+360^\circ k\ \xrightarrow{k=0}\ \alpha+\beta=90^\circ$$

כאשר ההצבה $k=0$ במעבר האחרון נובעת מכך ש- α ו- β זוויות במשולש ולכן הסכום שלהם אינו יכול להיות שלילי או גדול מ- 180°.

II. <u>פתרון שני</u>:

$$2\alpha-\beta=-(90^\circ-2\beta+\alpha)+360^\circ k\ \to\ 2\alpha-\beta=-90^\circ+2\beta-\alpha+360^\circ k\ \to\ 3\alpha+90^\circ=3\beta+360^\circ k$$

$$\to\ \alpha=\beta-30^\circ+120^\circ k$$

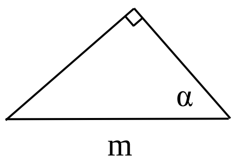
נשים לב שלכל $0<k$ מתקבלת סתירה לנתון לפיו הזווית α חדה.

עבור כל $k\le 0$, מתקבלת סתירה לנתון שהזווית החדה α גדולה מהזווית β.

כלומר, לא קיים k שבעבורו הפתרון הכללי השני רלבנטי לשאלה, ולכן הוא נפסל.

לבסוף ניעזר בקשר שמצאנו בעזרת פתרון הכללי הראשון לפיו $\alpha+\beta=90^\circ$ כדי לבטא את שטח המשולש.

מדובר על משולש ישר זווית.

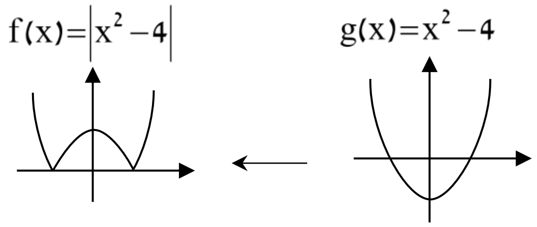


נוכל לבטא את אורכי הניצבים כ: $m\sin\alpha, m\cos\alpha$.

נציב בנוסחת השטח ונקבל: $S_\Delta=\dfrac{m\sin\alpha\cdot k\cos\alpha}{2}=\dfrac{m^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2}$.

ד. נתונה הפונקציה : $f(x)=\left|x^2-4\right|$.

1. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ואת סוגן :



תחילה נגדיר את הפונקציה $g(x)=x^2-4$.

הפונקציה $f(x)$ מתקבלת מהפעלת ערך מוחלט על כל ערכי הפונקציה $g(x)$ כמתואר בשרטוט השמאלי.

מצאנו שלפונקציה $f(x)$ יש 3 נקודות קיצון : $\max(0,4)$, $\min(2,0)$ ו- $\min(-2,0)$.

2. נקודות המינימום של הפונקציה $f(x)$ הן גם נקודות פיתול. נסביר מדוע.

הנגזרת השנייה של הפונקציה $g(x)$ היא : $g''(x)=2$ והיא <u>חיובית</u> בכל תחום הגדרתה.

מכך נסיק שהפונקציה $g(x)$ קעורה $\cup$ בכל תחום ההגדרה שלה.

לאחר הפעלת הערך המוחלט וקבלת גרף הפונקציה $f(x)$, נסיק כי בתחומים $2<x$ ו : $x<2$ הקעירות של גרף הפונקציה $f(x)$ לא השתנתה והיא קעירות $\cup$.

לעומת זאת, בתחום $-2<x<2$ בוצע שיקוף אנכי וכך חל שינוי בסוג הקעירות - המקטע של הפונקציה $g(x)$ שהיה <u>מתחת</u> לציר ה-x ועבר להיות <u>מעל</u> לציר ה-x עבר מקעירות $\cup$ לקעירות $\cap$.

מכאן, שבנקודות המינימום של הפונקציה $f(x)$ חל מעבר מקעירות מסוג אחד לקעירות מסוג אחר.

לכן שתי נקודות המינימום $\min(2,0)$ ו- $\min(-2,0)$ הן גם נקודות פיתול.

שאלה 2

נתונות שתי סדרות חשבוניות. מספר האיברים הכולל בשתי הסדרות **יחד** הוא 30.

בסדרה הראשונה, שנסמן ב-A, האיבר הראשון הוא $2a_1$ וההפרש $-d$.

בסדרה השנייה, שנסמן ב-B, האיבר הראשון הוא $-a_1$ וההפרש $2d$.

האיבר האחרון בסדרה הראשונה A שווה לאיבר האחרון בסדרה השנייה B.

נסמן את מספר האיברים בסדרה הראשונה ב-N.

לכן האיבר האחרון בסדרה הראשונה הוא A_N ולפי נוסחת האיבר הכללי הוא מקיים:

$$A_N = 2a_1 + (N-1)\cdot(-d) \rightarrow A_N = 2a_1 + (1-N)\cdot d$$

נתון שמספר האיברים בשתי הסדרות יחד הוא 30 ולכן מספר האיברים בסדרה השנייה הוא: $30-N$.

לכן האיבר האחרון בסדרה השנייה הוא B_{30-N} ולפי נוסחת האיבר הכללי הוא מקיים:

$$B_{30-N} = -a_1 + \left[(30-N)-1\right]\cdot 2d \rightarrow B_{30-N} = -a_1 + (29-N)\cdot 2d \rightarrow B_{30-N} = -a_1 + (58-2N)\cdot d$$

נתון שהאיבר האחרון בסדרה הראשונה A שווה לאיבר האחרון בסדרה השנייה B ולכן:

$$A_N = B_{30-N} \rightarrow 2a_1 + (1-N)\cdot d = -a_1 + (58-2N)\cdot d \rightarrow 3a_1 = (58-2N)\cdot d - (1-N)\cdot d$$

$$\rightarrow 3a_1 = \left[(58-2N)-(1-N)\right]\cdot d \rightarrow 3a_1 = (57-N)\cdot d$$

כלומר מצאנו שמתקיים: $3a_1 = (57-N)\cdot d$.

1. נתונות שלוש טענות, מתוכן רק אחת נכונה:

i. אם $0<a_1$ אז בהכרח $d<0$. ii. אם $0<a_1$ אז בהכרח $0<d$. iii. ייתכן ש: $a_1\cdot d<0$.

נראה מדוע אך ורק טענה ii נכונה:

נניח ש- $0<a_1$ ולכן: $0 < a_1 \rightarrow 0 < 3a_1 \xrightarrow{3a_1=(57-N)\cdot d} 0 < (57-N)\cdot d$

נשים לב שהפרמטר N מסמן את מספר האיברים בסדרה הראשונה. נתון לנו שבסדרה הראשונה והשנייה <u>ביחד</u> יש 30 איברים, ומכאן שבהכרח: $0 \le N \le 30$ ולכן: $0 < 57-N$ ומתקיים:

$$0 < (57-N)\cdot d \ \ /: \ \ 0<(57-N) \longrightarrow 0 < d$$

כלומר מצאנו שאם $0<a_1$ אז בהכרח $0<d$ ולכן טענה ii היא הנכונה.

כמו כן, טענות i ו-iii שגויות כיוון שהן סותרות את טענה ii שהוכחנו. טענה i מציעה את היחס ההפוך בין הפרמטרים בהשוואה לזה שמצאנו ואילו טענה iii תתכן רק כאשר a_1 ו-d בעלי סימנים מנוגדים, בסתירה למה שמצאנו.

2. נתון שהסדרה הראשונה עולה. נראה מדוע סכום הסדרה הראשונה הוא בהכרח שלילי:

$$S_A=\frac{N}{2}\cdot[2\cdot(2a_1)+(N-1)\cdot(-d)]\to S_A=\frac{N}{2}\cdot[4a_1+(1-N)\cdot d]$$

מהשוויון $3a_1=(57-N)\cdot d$ שמצאנו בסעיף הקודם נבודד את a_1 ונקבל: $a_1=\frac{1}{3}\cdot(57-N)\cdot d$. נציב

בנוסחת הסכום ונקבל:
$$S_A=\frac{N}{2}\cdot[4a_1+(1-N)\cdot d]\to S_A=\frac{N}{2}\cdot\left[4\cdot\frac{1}{3}\cdot(57-N)\cdot d+(1-N)\cdot d\right]$$

נוציא גורם משותף $\frac{1}{3}\cdot d$ ונקבל:
$$S_A=\frac{N}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot d[4\cdot(57-N)+3\cdot(1-N)]$$

$$\to S_A=\frac{Nd}{6}[228-4N+3-3N]\to S_A=\frac{Nd}{6}\cdot(231-7N)$$

כלומר מצאנו שסכום הסדרה הראשונה מקיים: $S_A=\frac{Nd}{6}\cdot(231-7N)$.

נזהה את הסימן של כל אחד מהגורמים במכפלה שמייצגת את הסכום:

- הפרמטר N מייצג את מספר האיברים בסדרה ולכן הוא חיובי: $0<N$
- הביטוי $-d$ מייצג את הפרש הסדרה. נתון שהסדרה עולה ולכן: $0<-d\to d<0$
- בסעיף הקודם ראינו ש: $0\le N\le 30$ ולכן: $0\le N\le 30\ /\cdot 7\to 0\le 7N\le 210$

  כלומר הביטוי $7N$ קטן מ-210 ובפרט הוא קטן מ-231 ולכן: $7N<231\to 0<231-7N$

נסיק שהסכום $S_A=\frac{Nd}{6}\cdot(231-7N)$ מורכב ממכפלת שני ביטויים חיוביים וביטוי שלילי ולכן <u>הוא שלילי</u>.

3. נתון שסכום הסדרה השנייה חיובי. נקבע באיזו מהסדרות יש יותר איברים. סכום הסדרה B מקיים:

$$S_B=\frac{30-N}{2}\cdot[2\cdot(-a_1)+((30-N)-1)\cdot 2d]\to S_A=\frac{30-N}{2}\cdot[-2\cdot a_1+(29-N)\cdot 2d]$$

נציב: $a_1=\frac{1}{3}\cdot(57-N)\cdot d$ ונקבל:
$$S_B=\frac{30-N}{2}\cdot\left[-2\cdot\frac{1}{3}(57-N)\cdot d+(29-N)\cdot 2d\right]$$

נוציא גורם משותף $\frac{1}{3}\cdot 2\cdot d$ ונקבל:
$$S_B=\frac{30-N}{2}\cdot\frac{2}{3}d[-(57-N)+3\cdot(29-N)]$$

$$\to S_B=\frac{(30-N)\cdot d}{3}(-57+N+87-3N)\to S_B=\frac{(30-N)\cdot d}{3}(30-2N)$$

הסימן של המכפלה $(30-2N)\cdot\frac{(30-N)\cdot d}{3}$ תלוי בסימן של הגורמים: $(30-N)$, d ו- $(30-2N)$.

בסעיף הקודם ראינו שהפרמטר d הוא בעל סימן שלילי. כמו כן, הביטוי $(30-N)$ מייצג את מספר האיברים בסדרה השנייה ולכן הוא חיובי. מכאן נובע שכדי שסימן המכפלה יהיה חיובי, כפי שנתון בתחילת הסעיף, הסימן של הביטוי $(30-2N)$ חייב להיות שלילי. לכן מתקיים:

$$30-2N<0 \rightarrow 30<2N \rightarrow 15<N$$

ומצאנו שמספר האיברים N בסדרה הראשונה גדול מ-15.

לסיום, נתון לנו שמספר האיברים בשתי הסדרות <u>ביחד</u> הוא 30 וכיוון שיותר ממחציתם נמצאים בסדרה הראשונה הרי שזו הסדרה שמכילה יותר איברים.

שאלה 3

א. בשאלה זו נתון היחס בין שתי הסתברויות: ההסתברות שרק לתלמידה אחת מתוך הארבע שנבחרו יש חיית מחמד וההסתברות שבדיוק לשלוש תלמידות מתוך הארבע שנבחרו יש חיית מחמד. נשתמש בנוסחת ברנולי עבור כל אחת מההסתברויות וניצור משוואה מתאימה. נראה את מרכיבי נוסחת ברנולי בכל אחד מהמקרים:

תלמידה אחת מתוך ארבע: $n=4$, $k=1$, ההסתברות לבחור תלמידה עם חיית מחמד $=p$. נציב:

$$\binom{4}{1}(p)^1(1-p)^3$$

שלוש תלמידות מתוך ארבע: $n=4$, $k=3$, ההסתברות לבחור תלמידה עם חיית מחמד $=p$. נציב:

$$\binom{4}{3}(p)^3(1-p)^1$$

נתון כי ההסתברות שרק לתלמידה אחת יש חיית מחמד גדולה פי 4 מההסתברות שבדיוק לשלוש יש חיית מחמד, ולכן:

$$\binom{4}{1}(p)^1(1-p)^3=4\cdot\binom{4}{3}(p)^3(1-p)^1\ /:4p(1-p)\rightarrow(1-p)^2=4p^2\rightarrow3p^2+2p-1=0$$

$$\rightarrow \cancel{p_1=-1},\ p_2=\frac{1}{3}$$

לפיכך, ההסתברות לבחור מהכיתה תלמידה שיש לה חיית מחמד היא $p=\frac{1}{3}$.

שימו לב שיכולנו לצמצם את המשוואה ולחלק בביטוי p ובביטוי $(1-p)$ מכיוון שאינם שווים ל-0.

ב. סעיף זה ממיין תלמידות בכיתה לפי שני מאפיינים:
האם יש להן חיית מחמד והאם הן יוצאות לטיול השנתי. לכן נשתמש בטבלה:

	יש חיית מחמד (A)	אין חיית מחמד $(\bar{A})$	סך הכל
יוצאת לטיול השנתי (B)	x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}+x$
לא יוצאת לטיול השנתי $(\bar{B})$	$\frac{1}{3}-x$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}-x$
סך הכל	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	**1**

נתחיל בהצבת הנתונים בטבלה:

בסעיף א' גילינו כי ל- $\frac{1}{3}$ מהתלמידות בכיתה יש חיית מחמד ולכן ל- $\frac{2}{3}$ אין חיית מחמד. בנוסף, נתון כי מחצית מהתלמידות ללא חיית מחמד $(\frac{2}{3})$ יוצאות לטיול השנתי, לכן נחשב $0.5\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

לפי השלמת הנתונים בעמודת "אין חיית מחמד" נגלה כי לשליש מתלמידות הכיתה אין חיית מחמד ואינן יוצאות לטיול השנתי.

נתון ששיעור התלמידות בעלות חיית מחמד מתוך היוצאות לטיול השנתי $P(A/B)$ שווה לשיעור התלמידות בעלות חיית מחמד מתוך אלו שאינן יוצאות לטיול השנתי $P(A/\bar{B})$. מכיוון שלא ידוע מהו שיעור התלמידות בעלות חיית מחמד היוצאות לטיול שנתי מתוך כלל הכיתה נציב בטבלה x בתא $P(B\cap A)$ ונשלים את שאר התאים לפיו. פעולה זו תאפשר לנו ליצור בהמשך משוואה אחת עם נעלם אחד.

שיעור בעלות חיית המחמד מתוך התלמידות היוצאות לטיול השנתי הוא: $P(A/B)=\frac{x}{\frac{1}{3}+x}$.

שיעור בעלות חיית מחמד מתוך התלמידות שאינן יוצאות לטיול השנתי הוא: $P(A/\bar{B})=\frac{\frac{1}{3}-x}{\frac{2}{3}-x}$.

נתון שהסתברויות אלה שוות ולכן: $\frac{x}{\frac{1}{3}+x}=\frac{\frac{1}{3}-x}{\frac{2}{3}-x}\rightarrow\frac{2}{3}x-x^2=\frac{1}{9}-x^2\rightarrow\frac{2}{3}x=\frac{1}{9}\ /:\frac{2}{3}\rightarrow\quad x=\frac{1}{6}$

לאחר שמצאנו את x נוכל להשלים את הטבלה לפיו ולמצוא את מה שהתבקשנו:

	יש חיית מחמד (A)	אין חיית מחמד $(\bar{A})$	סך הכל
יוצאת לטיול שנתי (B)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
לא יוצאת לטיול שנתי $(\bar{B})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
סך הכל	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	**1**

אם כך, ההסתברות שטל, בעלת חיית מחמד, יצאה לטיול שנתי היא: $P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=0.5$.

ג. בסעיף זה נשתמש בנוסחת ברנולי מכיוון שאנו מתבקשים למצוא מהי ההסתברות ש<u>שלוש</u> (k) מבין <u>ארבע</u> תלמידות בעלות חיית מחמד (n) יצאו לטיול השנתי. ההסתברות למאורע בודד בתרגיל זה (p) היא ההסתברות שתלמידה שיש לה חיית מחמד יצאה לטיול השנתי. זו ההסתברות שמצאנו בסעיף הקודם $(p=0.5)$. נותר רק להציב את הנתונים בנוסחת ברנולי:

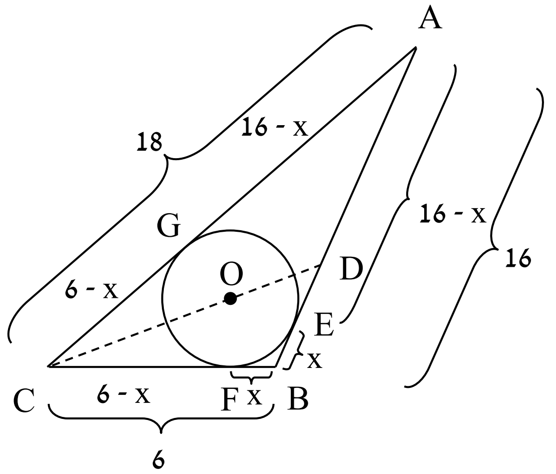
$$\binom{4}{3}(0.5)^3(0.5)^1=0.25$$

ד. כדי ש"יציאה לטיול השנתי" ו"להיות ללא חיית מחמד" יהיו מאורעות בלתי תלויים עלינו להראות כי מכפלת ההסתברויות שלהם <u>שווה</u> להסתברות החיתוך ביניהם. למעשה אם $P(B)\cdot P(\bar{A})=P(B\cap\bar{A})$ אז המאורעות בלתי תלויים.

לפי הטבלה: $P(B)=\frac{1}{2}$ ו- $P(\bar{A})=\frac{2}{3}$ ולכן: $P(B)\cdot P(\bar{A})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

בנוסף, מהטבלה עולה כי $P(B\cap\bar{A})=\frac{1}{3}$, כלומר המשוואה $P(B)\cdot P(\bar{A})=P(B\cap\bar{A})=\frac{1}{3}$ <u>מתקיימת</u> ולכן המאורעות הם <u>בלתי תלויים</u>.

שאלה 4



א. מתוך הנתון שהמעגל חסום במשולש אנו מסיקים כי AC, BC ו-AB משיקים למעגל ולכן:

1)	$BF=BE, AE=AG, CG=CF$	שני משיקים למעגל היוצאים מאותה הנקודה הם שווים.
2)	$BF=BE=x$	לפי הסימון $BE=x$ ו-(1).
3)	$CG=CF=6-x$	מתוך הנתון 6 ס״מ=BC ומתוך (2) ו-(1).
4)	$AG=AE=16-x$ **מש״ל א׳**	מתוך הנתון 16 ס״מ=AB ומתוך (2) ו-(1).
ב. 5)	$AC=AG+CG=16-x+6-x=18\rightarrow$ $x=BE=$ 2 ס״מ **מש״ל ב׳**	חישוב לפי (3), (4) והנתון 18 ס״מ $=AC$.
ג. 6)	CD חוצה זווית $\measuredangle ACB$	קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

כיוון שהראינו ש- CD הוא חוצה זווית במשולש ΔABC ניתן להשתמש במשפט חוצה הזווית.

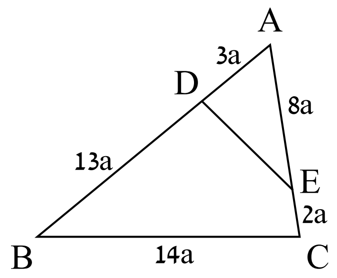
7)	נסמן $BD=p$ ונקבל:	סימון
8)	$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}\rightarrow\frac{18}{6}=\frac{16-p}{p}\rightarrow$ $p=BD=$ 4ס״מ	משפט חוצה הזווית.
9)	$DE=BD-BE=4-2=$ 2 ס״מ **מש״ל ג׳**	חיסור קטעים, לפי (5) ו-(8)

ד. בסעיף זה אנו מתבקשים למצוא יחס בין שני משולשים ΔAOC ו- ΔAOB. במקרים כאלה, בהם אנחנו מחפשים יחס, כדאי לבדוק מה משותף בין שני השטחים. האם יש צלעות שיוכלו להצטמצם בזמן החילוק ולהשאיר אותנו עם מספר (יחס) בלבד? כאן למשל ניתן לראות כי הגבהים של המשולשים הם OE ו-OG, בהתאמה. שני הגבהים הם רדיוסים במעגל ולכן יוכלו להצטמצם בזמן החילוק.

10)	ΔAOC : GO גובה לצלע AC	הרדיוס מאונך למשיק למעגל בנקודת ההשקה.
11)	ΔAOB : OE גובה לצלע AB	הרדיוס מאונך למשיק למעגל בנקודת ההשקה.
12)	$\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta AOB}}=\frac{\frac{AC\cdot GO}{2}}{\frac{AB\cdot OE}{2}}=\frac{\frac{AC\cdot r}{2}}{\frac{AB\cdot r}{2}}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$	חישוב שטח משולש כמחצית מכפלת הגובה בצלע שאליה הוא יורד.

מש״ל ד׳

שאלה 5



הנקודות D ו-E נמצאות על צלעות המשולש ΔABC כמתואר בשרטוט.

נתון: $AE = 8a$, $CE = 2a$, $BC = 14a$, $AD = 3a$, $BD = 13a$.

מכאן נובע ש: $AB = AD + BD \rightarrow AD = 3a + 13a = 16a$

וכן: $AC = AE + CE \rightarrow AC = 8a + 2a = 10a$

א. נחשב את גודל הזווית $\sphericalangle BAC$:

במשולש ΔABC, נבטא את קוסינוס הזווית $\sphericalangle A$ באמצעות משפט הקוסינוסים:

$$\cos\sphericalangle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \rightarrow \cos\sphericalangle BAC = \frac{(16a)^2 + (10a)^2 - (14a)^2}{2 \cdot 16a \cdot 10a}$$

$$\rightarrow \cos\sphericalangle BAC = \frac{256a^2 + 100a^2 - 196a^2}{320a^2} \rightarrow \cos\sphericalangle BAC = \frac{160a^2}{320a^2} \rightarrow \cos\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}$$

נקבל: $\sphericalangle BAC = 60°$.

ב. נביע באמצעות a את אורך הקטע DE:

במשולש ΔADE, נבטא את אורך הצלע DE באמצעות משפט הקוסינוסים:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos\sphericalangle BAC \rightarrow DE^2 = (3a)^2 + (8a)^2 - 2 \cdot (3a) \cdot (8a) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow DE^2 = 9a^2 + 64a^2 - 24a^2 \rightarrow DE^2 = 49a^2 \ \ /\sqrt{\ } \rightarrow DE = \pm 7a$$

הפתרון השלילי נפסל כיוון שמדובר על אורך של צלע ולכן אורך הקטע DE הוא $7a$.

ג. עומרי והראל נדרשו למצוא את גודל הזווית $\sphericalangle ADE$.

עומרי השתמש במשפט הסינוסים במשולש ΔADE וקיבל תשובה.

הראל השתמש במשפט הקוסינוסים במשולש ΔADE וקיבל תשובה שונה. שניהם השתמשו נכון במשפטים. נסביר כיצד ייתכן שקיבלו תשובות שונות ונקבע מהו גודל הזווית $\sphericalangle ADE$:

הזהות הטריגונומטרית $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ מראה שעבור כל צמד זוויות משלימות מתקבל אותו ערך של פונקציית הסינוס. לכן כשמבצעים במחשבון את הפעולה ההפוכה - לקיחת ערך של פונקציית הסינוס והפיכתו חזרה לזווית - חשוב לזכור להוסיף ידנית גם את הזווית המשלימה לזו שהתקבלה. עומרי השתמש במשפט הסינוסים אך לא לקח בחשבון את האפשרות שקיבל את הזווית המשלימה לזווית $\sphericalangle ADE$ ולכן קיבל פתרון שגוי, וזאת לעומת הראל שהשתמש במשפט הקוסינוסים וקיבל ישירות את הזווית הנכונה.

במשולש ΔADE נחשב את הזווית $\measuredangle ADE$ באמצעות משפט הקוסינוסים:

$$\cos\measuredangle ADE=\frac{AD^2+DE^2-AE^2}{2\cdot AD\cdot DE}\ \rightarrow\ \cos\measuredangle ADE=\frac{(3a)^2+(7a)^2-(8a)^2}{2\cdot 3a\cdot 7a}$$

$$\rightarrow\ \cos\measuredangle ADE=\frac{9a^2+49a^2-64a^2}{42a^2}\ \rightarrow\ \cos\measuredangle ADE=\frac{-6a^2}{42a^2}\ \rightarrow\ \cos\measuredangle ADE=-\frac{1}{7}$$

ולכן: $\measuredangle ADE=98.21^\circ$.

ד. הנקודה K נמצאת על הקטע BD בין הנקודות B ו-D.

1. נראה מדוע סכום הסינוסים של זוויות המרובע BCEK הוא חיובי:

המרובע BCEK הוא מרובע קמור שכל הזוויות שלו נמצאות בתחום שבין 0° לבין 180°.

לכל $0^\circ<\alpha<180^\circ$ מתקיים: $0<\sin\alpha<1$. כלומר, ערך הסינוס הוא חיובי עבור כל זווית במרובע ולכן סכום הסינוסים של זוויות המרובע הוא חיובי.

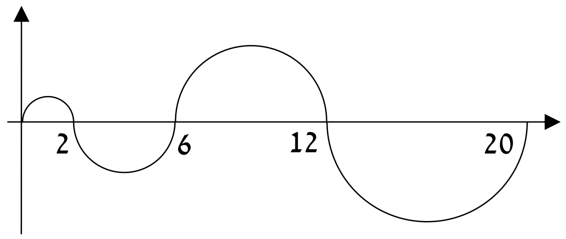
2. נסביר כיצד ייתכן שמכפלת הקוסינוסים של זוויות המרובע BCEK שווה ל-0:

מכפלת הקוסינוסים של זוויות המרובע תהיה שווה לאפס אם לפחות אחד מהקוסינוסים יהיה שווה לאפס. קוסינוס של זווית מתאפס כאשר מדובר על זווית ישרה. לכן אילו במרובע BCEK תהיה לפחות זווית ישרה אחת נקבל שמכפלת הקוסינוסים של הזוויות שלו שווה ל-0.

בסעיף ג׳ מצאנו ש: $\measuredangle ADE=98.21^\circ$ ולכן הזווית $\measuredangle BDE$ הצמודה לה היא זווית <u>חדה</u>. מכאן נובע שהאנך מהנקודה E אל AB פוגש אותו <u>בקטע שבין B ו-D</u> (אחרת במשולש ΔEDK סכום זווית גדול מ-180°).

אילו נקודת מפגש זו תתלכד עם הנקודה K נקבל מרובע BCEK שיש בו זווית ישרה. כפי שראינו קיימת אפשרות שהקוסינוס של זווית זו יהיה שווה ל-0 ולכן מכפלתה בקוסינוסים של שאר זווית המרובע תהיה שווה לאפס.

שאלה 6



נתון גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $0 \le x \le 20$.

גרף הפונקציה וציר ה-x יוצרים חצאי מעגלים שאורך הרדיוס שלהם הולך וגדל.

א. הקוטר בכל אחד מחצאי המעגלים שווה למרחק שבין שיעור ה-x של הקצה הימני לבין שיעור ה-x של הקצה השמאלי. הרדיוס r בכל אחד מהמעגלים שווה למחצית הקוטר.

הנוסחה לחישוב שטח עיגול היא: $S = \pi r^2$. כדי לחשב שטח של חצי עיגול ניעזר בנוסחה: $S = 0.5\pi r^2$.

נחשב את השטחים משמאל לימין:

<u>חצי מעגל I</u>: הקוטר הוא: $2 - 0 = 2$ ולכן: $r_I = 1$ והשטח הוא: $S_I = 0.5\pi \cdot 1^2 \;\rightarrow\; S_I = 0.5\pi$

<u>חצי מעגל II</u>: הקוטר הוא: $6 - 2 = 4$ ולכן: $r_{II} = 2$ והשטח הוא: $S_{II} = 0.5\pi \cdot 2^2 \;\rightarrow\; S_{II} = 2\pi$

<u>חצי מעגל III</u>: הקוטר הוא: $12 - 6 = 6$ ולכן: $r_{III} = 3$ והשטח הוא: $S_{III} = 0.5\pi \cdot 3^2 \;\rightarrow\; S_{III} = 4.5\pi$

<u>חצי מעגל IV</u>: הקוטר הוא: $20 - 12 = 8$ ולכן: $r_{IV} = 4$ והשטח הוא: $S_{IV} = 0.5\pi \cdot 4^2 \;\rightarrow\; S_{IV} = 8\pi$

ב. הפונקציה $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ היא פונקציית אינטגרל מצטבר: שיעור הפונקציה בכל נקודה שווה לסכום המצטבר של השטחים המוגבלים בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין ציר ה-x, החל מהנקודה $x = 0$ ועד לשיעור ה-x בנקודה שהצבנו. נשים לב שבתחום בו השטח <u>מעל ציר ה-x</u>, סימנו <u>חיובי</u> ובתחום בו השטח <u>מתחת לציר ה-x</u> סימנו <u>שלילי</u>.

1. מתקיים: $g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt$ ולכן ערך הפונקציה הוא בדיוק השטח S_I שחישבנו בסעיף א': $g(2) = 0.5\pi$.

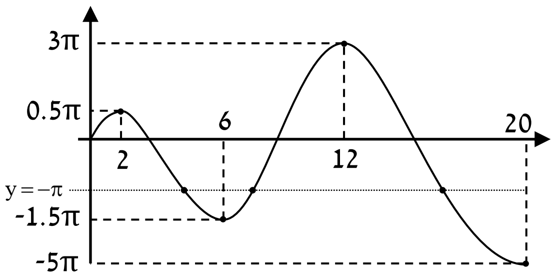
כיוון שבתחום: $0 \le x \le 6$ הגרף של $f(x)$ עובר מתחום חיוביות לתחום שליליות נפצל את האינטגרל ונקפיד שהשטח בתחום: $2 \le x \le 6$ יהיה <u>בעל סימן שלילי</u>:

$$g(6) = \int_0^6 f(t)\,dt = \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^6 f(t)\,dt = 0.5\pi + (-2\pi) = -1.5\pi \;\rightarrow\; g(6) = -1.5\pi$$

2. כדי להשלים את השרטוט נבצע שתי הצבות נוספות ב- $g(x)$. נסתמך על חישובים קודמים, ככל הניתן. כאשר הדבר לא יתאפשר, נפצל את האינטגרל לפי תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$ כפי שעשינו בסעיף ב'1:

$$g(12) = \int_0^6 f(t)\,dt + \int_6^{12} f(t)\,dt = -1.5\pi + 4.5\pi = 3\pi \qquad g(20) = \int_0^{12} f(t)\,dt + \int_{12}^{20} f(t)\,dt = 3\pi + (-8\pi) = -5\pi$$

על סמך ארבעת ערכי הפונקציה שחישבנו, נשרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$:



3. מספר הפתרונות של המשוואה: $g(x)=-\pi$ שווה למספר

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישר $y=-\pi$.

לפי השרטוט ניתן לראות שמדובר על 3 נקודות חיתוך

ולכן למשוואה קיימים <u>שלושה פתרונות</u>.

ג. הגדירו את הפונקציה החדשה: $h(x)=\int_2^x f(t)\,dt$ בתחום: $2\le x\le 20$.

נחשב את 4 ערכי $h(x)$ המופיעים בגרפים:

$$h(2)=\int_2^2 f(t)\,dt=0$$

$$h(6)=\int_2^6 f(t)\,dt=-2\pi$$

$$h(12)=\int_2^6 f(t)\,dt+\int_6^{12} f(t)\,dt=-2\pi+4.5\pi=2.5\pi$$

$$h(20)=\int_2^{12} f(t)\,dt+\int_{12}^{20} f(t)\,dt=2.5\pi-8\pi=-5.5\pi$$

ולכן הגרף המתאים הוא <u>גרף III</u>.

שאלה 7

א. נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{a\sin x}{(b-\cos x)^2}$ $(0<a)$ בתחום : $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

נתון שציר ה-y הוא האסימפטוטה האנכית היחידה, כלומר $x=0$ הוא האסימפטוטה האנכית.

לכן, המכנה מתאפס עבור $x=0$ ונקבל : $b=1$ $(b-\cos 0°)^2=0\ \rightarrow\ (b-1)^2=0\ /\sqrt{\ }\ \rightarrow\ b-1=0\ \rightarrow$

ב. נציב את ערכו של הפרמטר b שמצאנו ונגזור את הפונקציה :

$$f'(x)=\frac{a\cos x\cdot(1-\cos x)^2-a\sin x\cdot 2\left[(1-\cos x)\cdot\sin x\right]}{(1-\cos x)^4}$$

נעסוק מכאן והלאה במונה של הנגזרת. נוציא גורמים משותפים $a(1-\cos x)$:

$$=a(1-\cos x)\left[\cos x\cdot(1-\cos x)-2\sin^2 x\right]$$

נשתמש בזהות $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ ונוציא בשנית גורם משותף :

$$=a(1-\cos x)\left[\cos x\cdot(1-\cos x)-2(1-\cos^2 x)\right]$$
$$=a(1-\cos x)\left[\cos x\cdot(1-\cos x)-2(1+\cos x)(1-\cos x)\right]$$
$$=a(1-\cos x)^2\left[\cos x-2(1+\cos x)\right]$$

לבסוף, לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים בסוגריים הפנימיים, נקבל : $a(1-\cos x)^2\left[-\cos x-2\right]$

נקבל שהמונה של הנגזרת הוא : $-a(1-\cos x)^2\left[\cos x+2\right]$.

נראה שהנגזרת שלילית לכל x בתחום ההגדרה. נזכיר ש**המכנה** $(1-\cos x)^4$ הוא ביטוי ריבועי חיובי.
כלומר, עלינו להראות שהמונה של הנגזרת הוא שלילי. תחילה נראה שמתקיים :

$$-1\le\cos x\le 1\ \rightarrow\ 1\le\cos x+2\le 3\ \rightarrow\ 0<\cos x+2$$

כמו כן : $0<(1-\cos x)^2$ לכל x בתחום ($x\neq 0$ כיוון שזו אסימפטוטה אנכית) וגם $0<a$ ולכן : $-a<0$.

לסיכום, קיבלנו ש : $\underbrace{-a}_{-}\underbrace{(1-\cos x)^2}_{+}\underbrace{\left[\cos x+2\right]}_{+}$ ולכן $f'(x)<0$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה ומכאן שגרף הפונקציה $f(x)$ יורד לכל x בתחום ההגדרה.

ג. 1. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום : $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$:

ציר ה-y : ראינו ש- $x=0$ אסימפטוטה אנכית ולכן הפונקציה אינה מוגדרת שם ואין נקודות חיתוך.

ציר ה-x : $f(x)=0\ \rightarrow\ \frac{a\sin x}{(1-\cos x)^2}=0\ \rightarrow\ a\sin x=0\ \ /:a\neq 0\ \rightarrow\ \sin x=0\ \rightarrow\ x=\pi k$

כיוון שלא קיים k שלם עבורו יש למשוואה פתרון בתחום המבוקש, נסיק שלפונקציה אין נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

2. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה:

$$f'(x)=0 \to -a(1-\cos x)^2\left[\cos x+2\right]=0 \quad /:-a\left[\cos x+2\right]\neq 0 \to (1-\cos x)^2=0 \quad /\sqrt{\ }$$
$$\to 1-\cos x=0 \to \cos x=1 \to x=2\pi k$$

כיוון שלא קיים k שלם עבורו יש למשוואה פתרון בתחום המבוקש, נסיק שלפונקציה אין נקודות קיצון פנימיות בתחום.

לבסוף, תחום ההגדרה כולל את הקצוות ולכן נסיק ש: $x=\pm\frac{\pi}{2}$ נקודות קיצון קצה של הפונקציה.

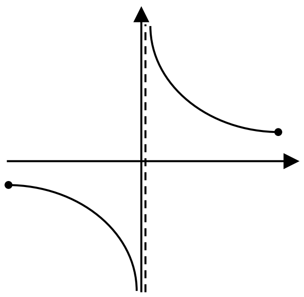
נמצא את סוגן בעזרת טבלת עלייה וירידה:

תחום x	$x=-\frac{\pi}{2}$	$<x<$	$x=0$	$<x<$	$x=\frac{\pi}{2}$
סוג הנקודה	קצה התחום	$x=-1$	אסימפטוטה	$x=1$	קצה התחום
סימן הנגזרת		-		-	
הפונקציה עולה/יורדת	max	↘		↘	min

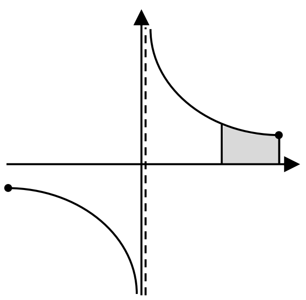
נמצא את שיעור ה-y של הנקודות: $f(-\frac{\pi}{2})=\dfrac{a\sin(-\frac{\pi}{2})}{(1-\cos(-\frac{\pi}{2}))^2}=-a$, $f(\frac{\pi}{2})=\dfrac{a\sin(\frac{\pi}{2})}{(1-\cos(\frac{\pi}{2}))^2}=a$

ומכאן שנקודות הקיצון של הפונקציה הן בקצה התחום: $\max(-\frac{\pi}{2},-a)$, $\min(\frac{\pi}{2},a)$.

ד. ראינו שהפונקציה יורדת לכל x בתחום ההגדרה. כיוון שנקודת הקצה הימנית של הפונקציה היא מסוג מינימום ושיעור ה-y שלה חיובי, נסיק שגרף הפונקציה בהכרח מעל ציר ה-x בתחום המבוקש.
נוכל לשרטט את הסקיצה משמאל:



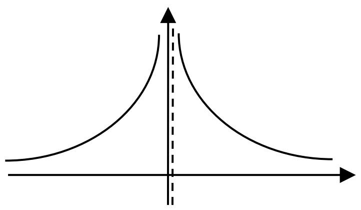
ה. נחשב את האינטגרל עבור השטח האפור בשרטוט משמאל:



$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin x}{(1-\cos x)^2}dx \to \begin{bmatrix} u=1-\cos x \\ du=\sin x dx \end{bmatrix} \to \int \frac{a}{u^2}du=-\frac{a}{u}\bigg| =-\frac{a}{1-\cos x}\bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\frac{a}{1-\cos(\frac{\pi}{2})}+\frac{a}{1-\cos(\frac{\pi}{3})}=a$$

כלומר, גודלו של השטח המבוקש הוא a יח"ר.

ו. הערך המוחלט משפיע רק על ערכי ה-y של הפונקציה המקורית:



ערכי y החיוביים נשארו חיוביים ואילו ערכי ה-y השליליים הופכים להיות חיוביים. למעשה, השינוי בגרף הפונקציה יוצר 'תמונת מראה' כלפי מעלה של החלק השלילי הפונקציה $f(x)$ ומתקבל השרטוט משמאל.

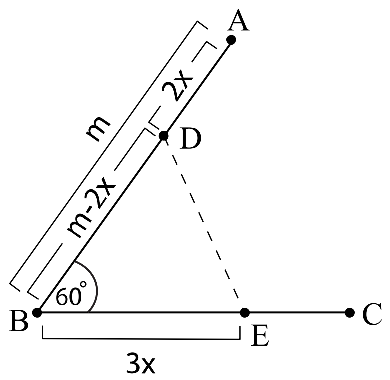
ניתן לראות שכדי שהישר $y=k$ יחתוך את הגרף $g(x)$ בשתי נקודות,

ערך k צריך להיות גדול או שווה ל-a.

לפי הנתון הדבר מתקיים עבור $3 \le k$ ולכן נוכל להסיק ש: $a = 3$.

שאלה 8

זוהי בעיית קיצון בנושא תנועה, בה **נתונה** נקודת המינימום ועלינו למצוא את ערכו של הפרמטר m.
בעיה זו שקולה לשאלות בהן נתונה פונקציה עם פרמטר ועלינו למצוא אותו כאשר נתונה נקודת הקיצון.
בשני מקרים אלו, כדי למצוא את הפרמטר, נגזור את הפונקציה, נציב את נקודת הקיצון בנגזרת ונשווה את הנגזרת ל-0.
נדגיש: בבעיות מסוג זה לא ניתן למצוא את הפרמטר על ידי שימוש ישיר בנתון על נקודת המינימום.



א. המרחק בין השניים עד אותו רגע יבוטא באמצעות פונקציית מטרה המתארת את המרחק בין הולכי הרגל (אורך הקטע DE) כפונקציה של הזמן.
שני הולכי הרגל יצאו בו זמנית ולכן נסמן את זמן ההליכה של כל אחד מהם בתור x.
הולך הרגל שיצא מהנקודה A צעד במהירות 2 קמ״ש ולכן אורך הקטע AD הוא 2x. כלומר, אורך הקטע BD הוא: $BD = m - 2x$.
הולך הרגל שיצא מהנקודה B צעד במהירות 3 קמ״ש ולכן אורך הקטע BE הוא $BE = 3x$.
לפי הנתון, גודל הזווית שבין הקטעים BD ו-BE הוא 60°. כעת נביע את פונקציית המטרה המתארת את אורך הקטע DE באמצעות משפט הקוסינוסים במשולש ΔBDE:

$$(DE)^2 = (BD)^2 + (BE)^2 - 2\cdot BD\cdot BE\cdot\cos 60° \to (DE)^2 = (m-2x)^2 + (3x)^2 - 2\cdot(m-2x)\cdot 3x\cdot\frac{1}{2} \to$$

$$(DE)^2 = m^2 - 4mx + 4x^2 + 9x^2 - 3mx + 6x^2 \to DE = \sqrt{19x^2 - 7mx + m^2}$$

ב. נגזור את פונקציית המטרה: $(DE)' = \dfrac{38x - 7m}{2\sqrt{19x^2 - 7mx + m^2}}$.

כעת נשתמש בנתון לפיו כעבור 3.5 שעות היה המרחק שבין ההולכים מינימלי. נציב $x = 3.5$ ונשווה את הנגזרת ל-0:

$$\frac{38\cdot(3.5) - 7m}{2\sqrt{19\cdot(3.5)^2 - 7m\cdot(3.5) + m^2}} = 0 \to 38\cdot(3.5) - 7m = 0 \to 7m = 133 \to m = 19 \text{ (ק״מ)}$$

שימו לב: בשאלה זו אין צורך להוכיח באמצעות נגזרת שנייה שהנקודה $x = 3.5$ היא אכן נקודת מינימום כי נתון בשאלה שזהו סוג הקיצון.