הוצאת ארכימדס
שאלון 472
הפונקציה המעריכית
טרנספורמציות
ארכימדס
בכיוון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472
כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק א'

הוצאת ארכימדס
שאלון 472

הפונקציה המעריכית
טרנספורמציות

מהי טרנספורמציה?

תזכורת! מהי טרנספורמציה?

טרנספורמציה היא שינוי שמתבצע על הייצוג האלגברי ועל הייצוג הגרפי של פונקציה.

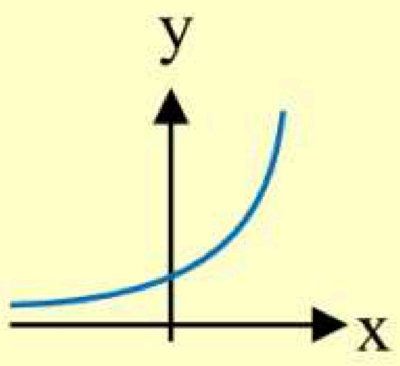
הבנה של טרנספורמציות מסייעת בזיהוי השפעתן על גרף הפונקציה לאחר שבוצע שינוי.

טרנספורמציה

בתחילת הפרק עסקנו בגרפים של פונקציות מעריכיות ומצאנו ש:

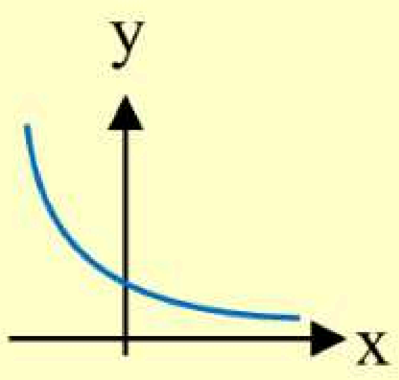
כאשר $1 < a$ כמו בפונקציה $f(x) = e^x$

גרף הפונקציה נראה כך:



כאשר $0 < a < 1$ כמו בפונקציה $f(x) = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$

גרף הפונקציה נראה כך:



כעת נסתמך על ההיכרות עם גרפים בסיסיים אלו, ונבצע עליהם טרנספורמציות. נזכיר את הטרנספורמציות שפגשנו בשנים הקודמות, ונדגים אותן בעזרת גרפים אלו.

הזזה אנכית

הזזה אנכית - עבור k חיובי, ייתכנו שני מצבים:

גרף הפונקציה $g\left(x\right)=f\left(x\right)+k$ מתקבל מהזזת גרף הפונקציה f(x) למרחק k יח' כלפי מעלה.

גרף הפונקציה $h\left(x\right)=f\left(x\right)-k$ מתקבל מהזזת גרף הפונקציה f(x) למרחק k יח' כלפי מטה.

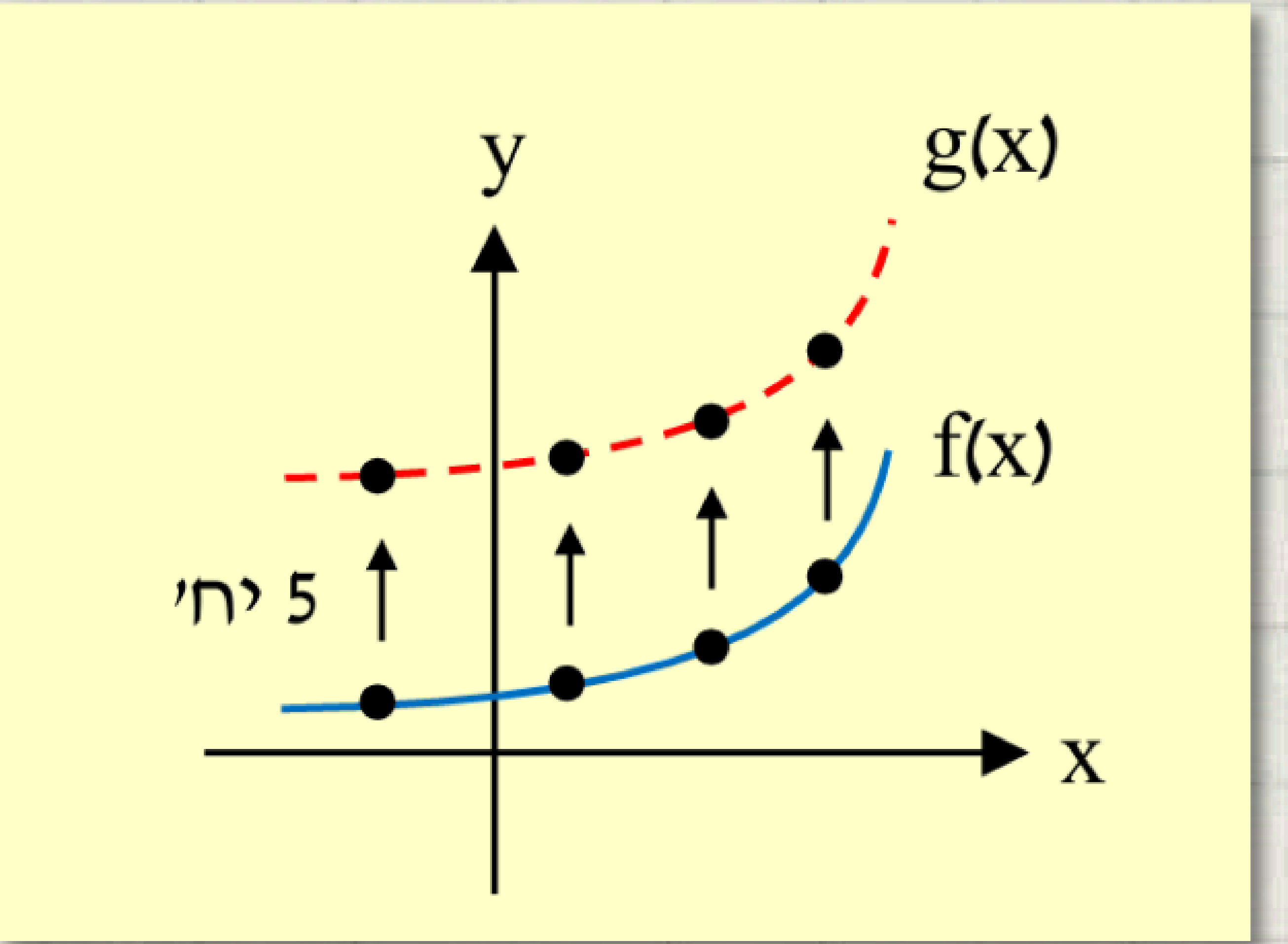
בהזזה אנכית כל נקודה "מועתקת" מעלה או מטה, כך שרק שיעור ה־y שלה משתנה. האסימפטוטה האופקית מועתקת גם היא מעלה או מטה בהתאם לכיוון ולמרחק ההזזה.

הזזה אנכית כלפי מעלה

נדגים הזזה אנכית בעזרת הפונקציה $f\left(x\right)=2^{x}$ ובעזרת הגרף שלה:

לאחר הזזת גרף הפונקציה למרחק 5 יח' כלפי מעלה יתקבל גרף הפונקציה $g\left(x\right)=2^{x}+5$.

לפניכם גרף הפונקציה המתקבל:

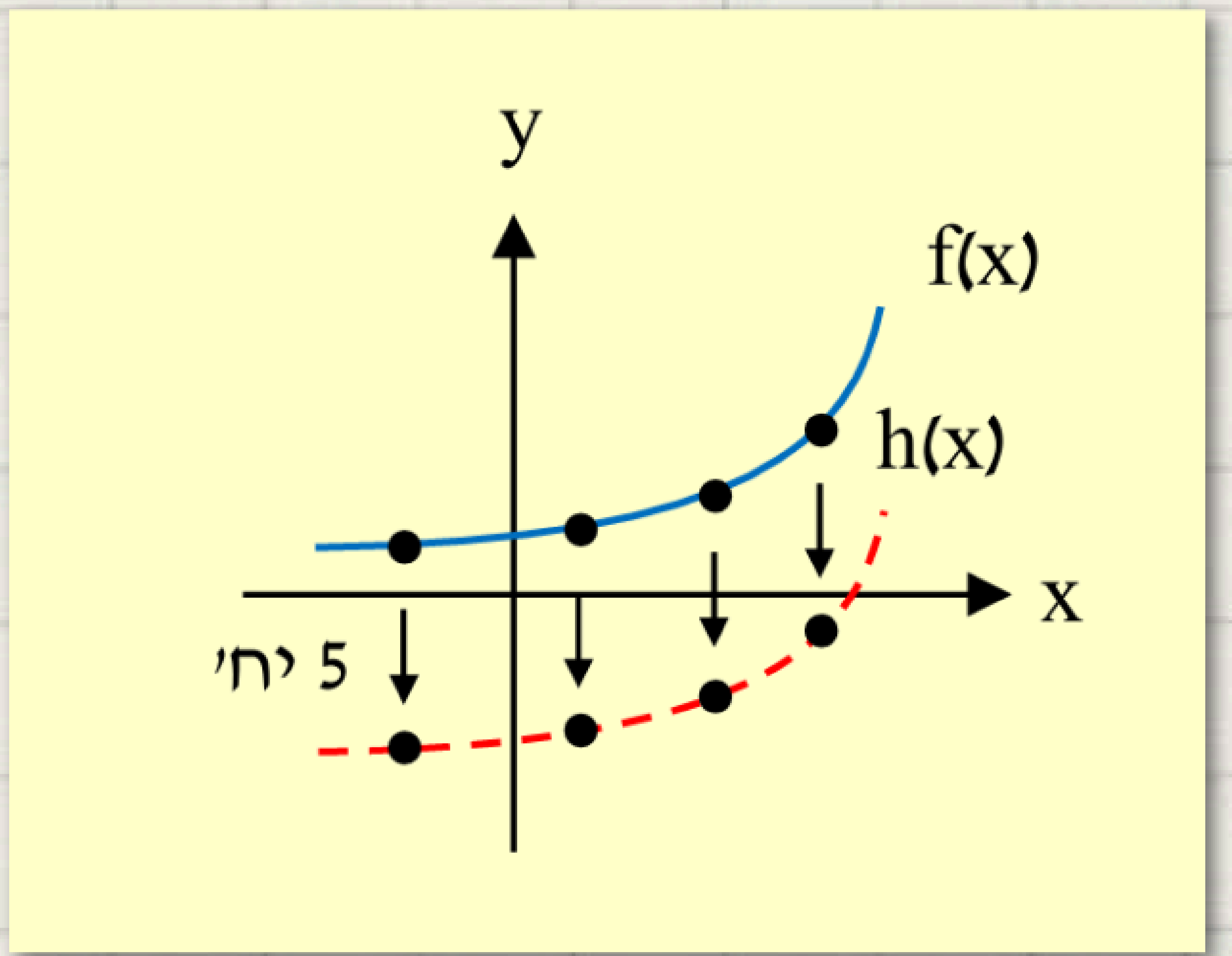


הזזה אנכית כלפי מטה

נדגים הזזה אנכית בעזרת הפונקציה $f(x) = 2^x$ ובעזרת הגרף שלה:

לאחר הזזת גרף הפונקציה למרחק 5 יח' כלפי מטה יתקבל גרף הפונקציה $h(x) = 2^x - 5$.

לפניכם גרף הפונקציה המתקבל:



הזזה אופקית

הזזה אופקית - עבור p חיובי, ייתכנו שני מצבים:

גרף הפונקציה $g(x)=f(x+p)$ מתקבל מהזזת גרף הפונקציה f(x) למרחק p יח' **שמאלה**.

גרף הפונקציה $h(x)=f(x-p)$ מתקבל מהזזת גרף הפונקציה f(x) למרחק p יח' **ימינה**.

בהזזה אופקית כל נקודה "מועתקת" שמאלה או ימינה, כך שרק **שיעור ה־x שלה משתנה**.

הזזה אופקית אינה משפיעה על האסימפטוטה האופקית.

הזזה אופקית ימינה

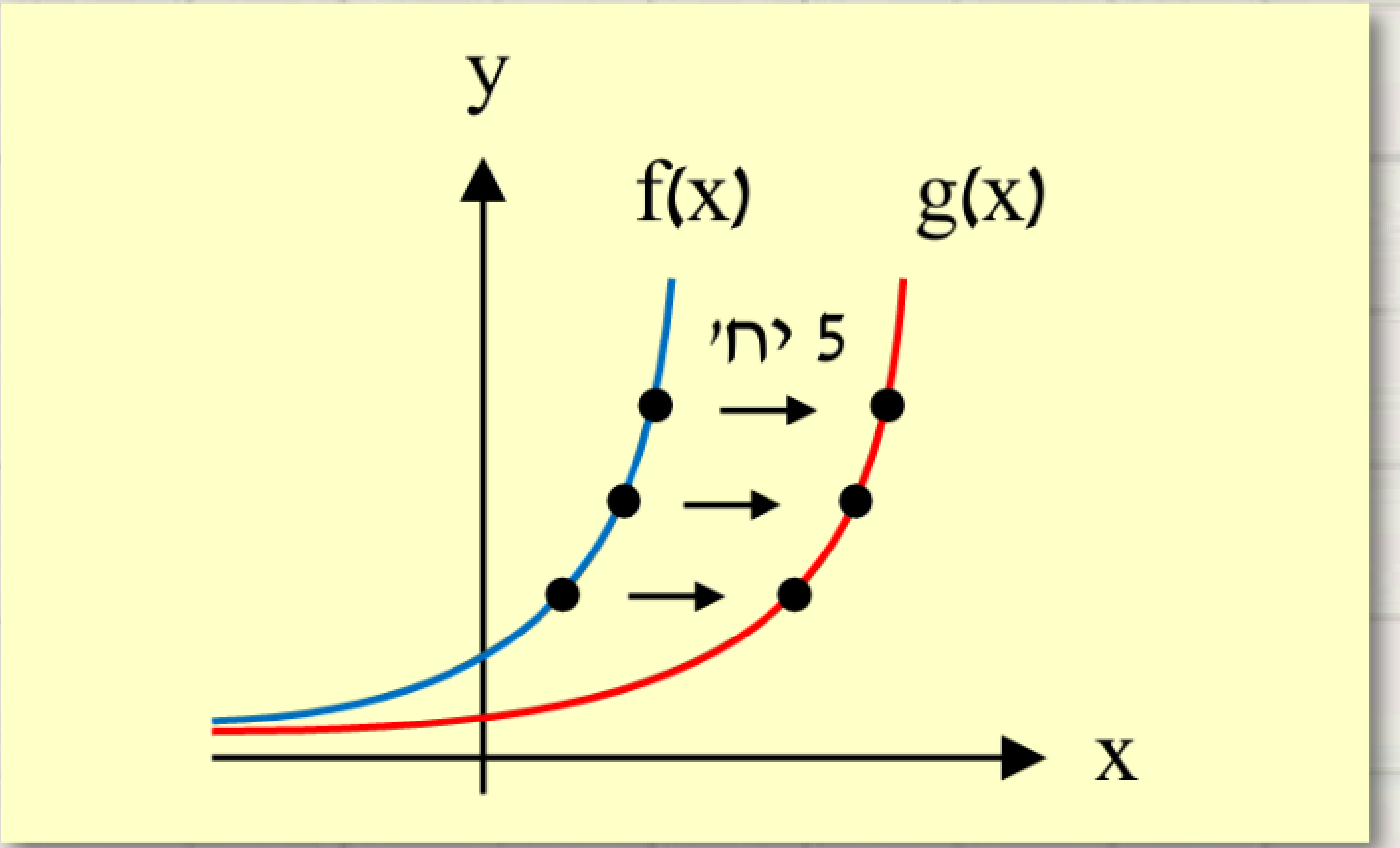
נדגים הזזה אופקית בעזרת הפונקציה $f\left(x\right)=3^x$ ובעזרת הגרף שלה:

לאחר הזזת גרף הפונקציה

למרחק 5 יח' **ימינה** יתקבל גרף

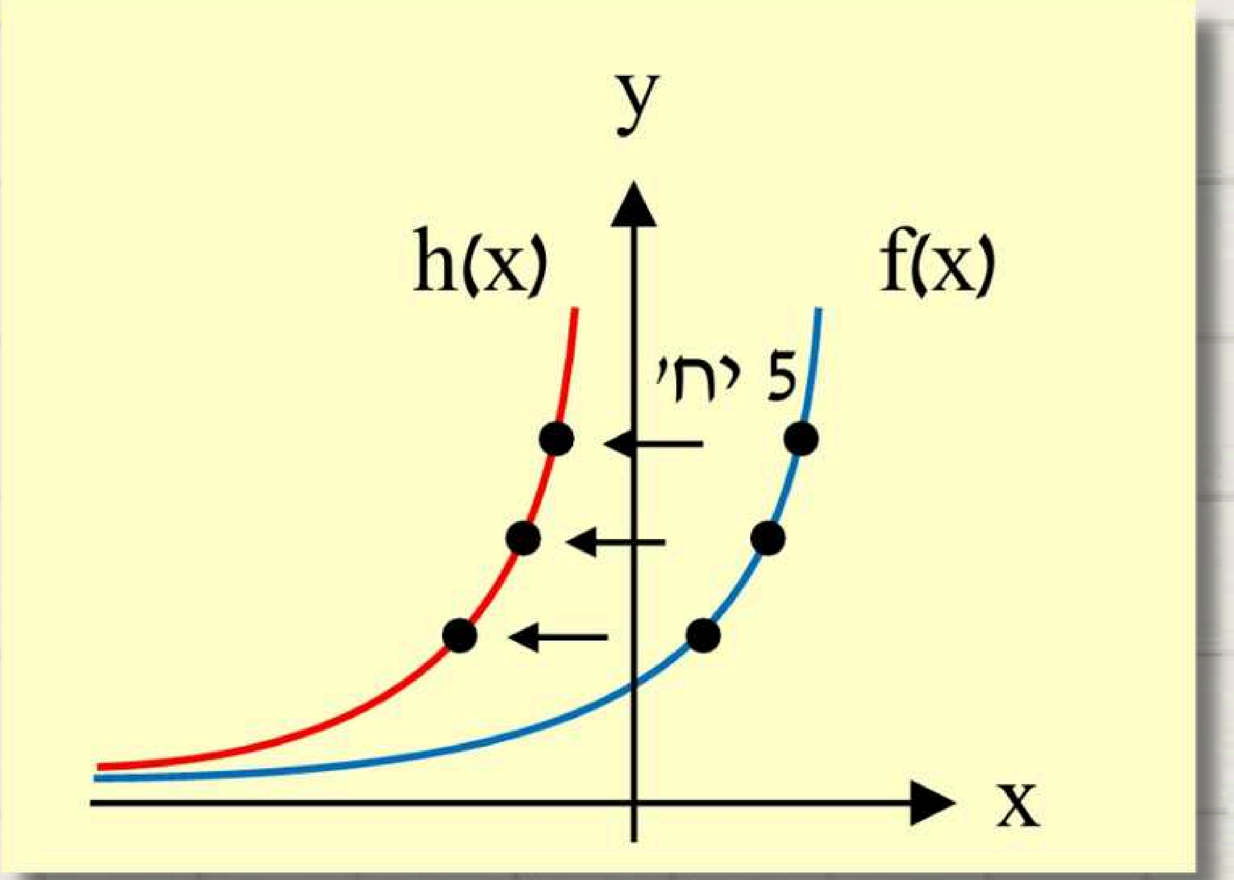
הפונקציה $g\left(x\right)=3^{x-5}$.

לפניכם גרף הפונקציה המתקבל:



הזזה אופקית שמאלה

נדגים הזזה אופקית בעזרת הפונקציה $f\left(x\right)=3^{x}$ ובעזרת הגרף שלה:



לאחר הזזת גרף הפונקציה
למרחק 5 יח' **שמאלה** יתקבל גרף
הפונקציה $h\left(x\right)=3^{x+5}$.
לפניכם גרף הפונקציה המתקבל:

שימו לב! שני סוגי ההזזות אינם משנים את צורת הגרף,
אלא רק את מיקומו במערכת הצירים.

שיקוף ביחס לציר ה-x: $g(x)=-f(x)$

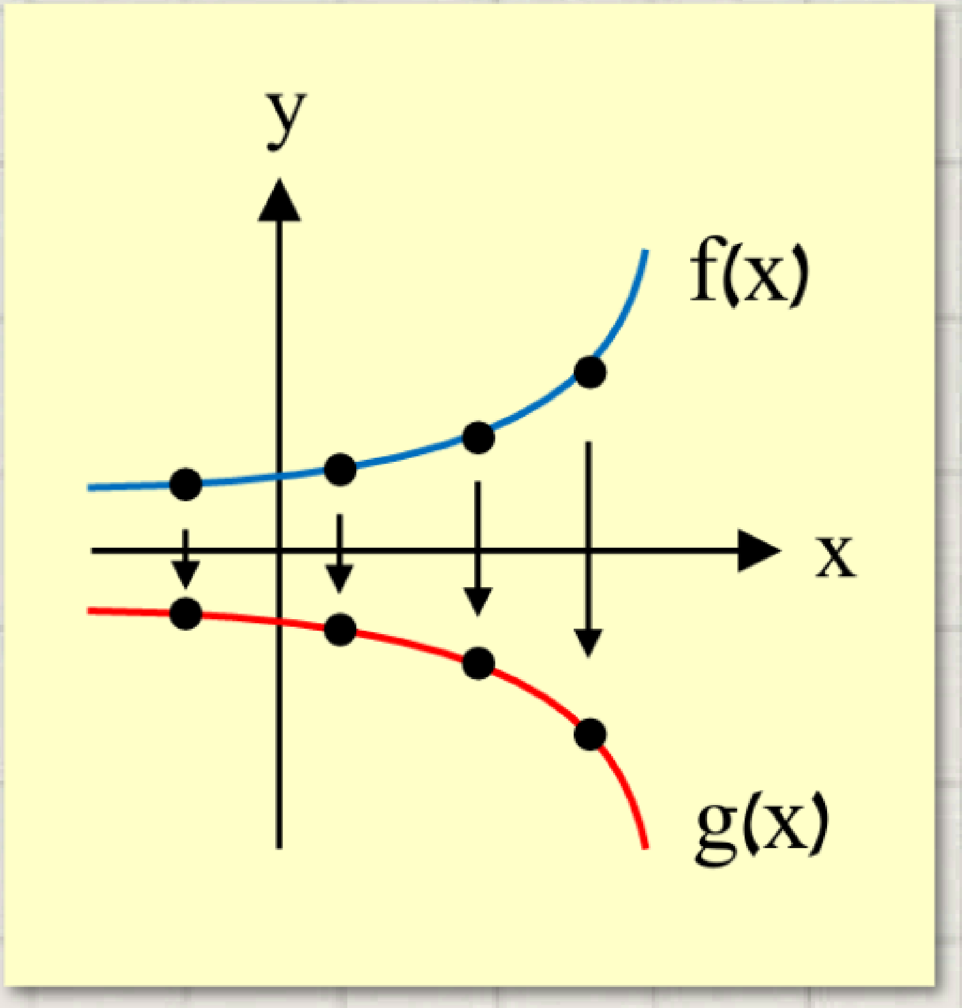
כפי שלמדנו, בשיקוף מסוג זה כל נקודה "מועתקת" כך ששיעור ה־y שלה מקבל את הערך הנגדי לו, אך **שיעור ה־x שלה אינו משתנה**.
כלומר, עבור אותו ערך x שנציב בשתי הפונקציות נקבל ערכי y נגדיים.
הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ סימטריים זה לזה ביחס לציר ה־x וחותכים אותו באותן נקודות.

שיקוף ביחס לציר ה-x: $g(x)=-f(x)$

- תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$ **הפוכים** מאלו של הפונקציה $f(x)$.
- תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ **הפוכים** מאלו של הפונקציה $f(x)$.
- סוגי הקיצון של הפונקציה $g(x)$ **הפוכים** מאלו של הפונקציה $f(x)$.
- לאחר ביצוע שיקוף ביחס לציר ה־x, האסימפטוטה האופקית מקבלת ערך y נגדי לערך המקורי.

לדוגמה, האסימפטוטה $y=4$ תועתק להיות האסימפטוטה $y=-4$.

שיקוף ביחס לציר ה-x: g(x)=-f(x)



נדגים זאת בעזרת הפונקציה $f\left(x\right)=2^{x}$.

גרף הפונקציה $g\left(x\right)=-2^{x}$ מתקבל משיקוף גרף

הפונקציה $f\left(x\right)=2^{x}$ ביחס לציר ה־x.

אם נציב x=3 בשתי הפונקציות יתקבלו ערכי ה־y

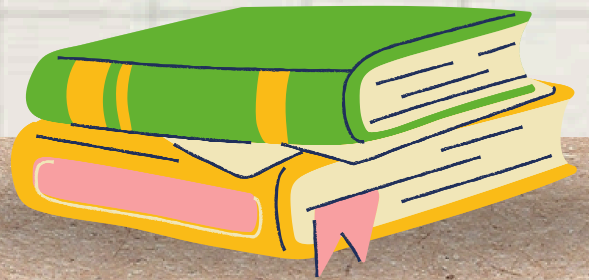
הנגדיים f(3)=8 ו־g(3)=-8.

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה f(x) היא

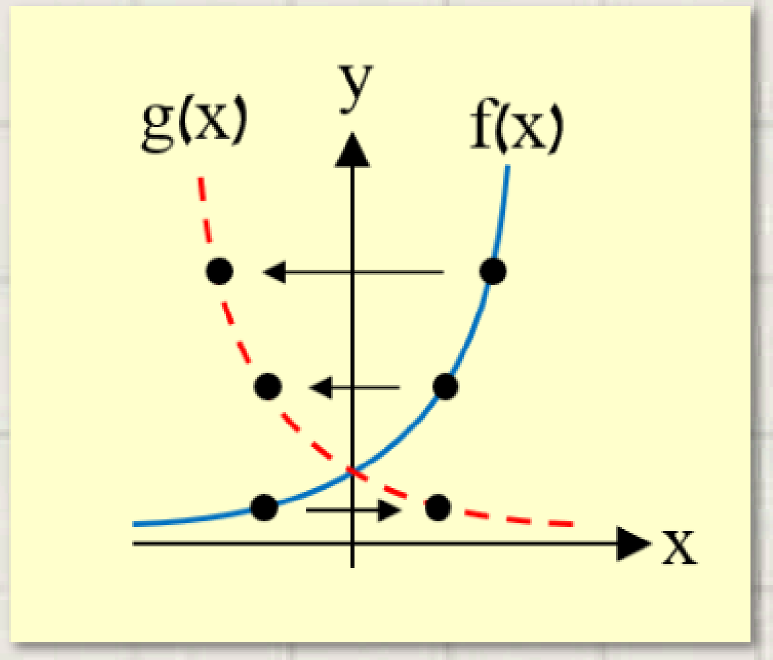
y=0, והשיקוף אינו משנה אותה.

שיקוף ביחס לציר ה-y: $g(x)=f(-x)$

כפי שלמדנו בעבר, בשיקוף מסוג זה כל נקודה "מועתקת" כך ששיעור ה־x שלה מקבל את הערך הנגדי לו, אך **שיעור ה־y שלה אינו משתנה**. כלומר, אם נציב ערכי x נגדיים בשתי הפונקציות נקבל ערכי y זהים.
הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ סימטריים זה לזה ביחס לציר ה־y וחותכים אותו באותה הנקודה. שיקוף ביחס לציר ה־y **אינו משפיע** על האסימפטוטה האופקית.



שיקוף ביחס לציר ה-x: g(x)=-f(x)



נדגים זאת בעזרת הפונקציות המעריכיות $f\left(x\right)=3^{x}$
ו־ $g\left(x\right)=3^{-x}$: גרף הפונקציה $g\left(x\right)=3^{-x}$
מתקבל משיקוף גרף הפונקציה $f\left(x\right)=3^{x}$
ביחס לציר ה־y. אם נציב x=3 בפונקציה f(x),
ואם נציב x=-3 בפונקציה g(x), בשני המקרים יתקבל: y=27.
שימו לב! שני סוגי השיקופים **אינם משנים את צורת הגרף** אלא
יוצרים "תמונת מראה הפוכה": האחד שמאלה או ימינה (ביחס לציר ה־y)
והשני כלפי מעלה או כלפי מטה (ביחס לציר ה־x).

מתיחה אנכית או כיווץ אנכי של גרף הפונקציה f(x)

כפי שלמדנו בעבר, בטרנספורמציה מהסוג $g(x)=k\cdot f(x)$ ייתכנו ארבעה מצבים:

כאשר $k>1$ גרף הפונקציה **נמתח** אנכית פי k, והוא נראה "צר" יותר ככל ש־k גדול יותר.

כאשר $0<k<1$ גרף הפונקציה **מתכווץ** אנכית פי k, והוא נראה "רחב" יותר ככל ש־k קטן יותר.

מתיחה אנכית או כיווץ אנכי של גרף הפונקציה f(x)

כאשר $-1 < k < 0$ גרף הפונקציה מתכווץ אנכית פי |k|, וגם עובר שיקוף ביחס לציר ה־x.

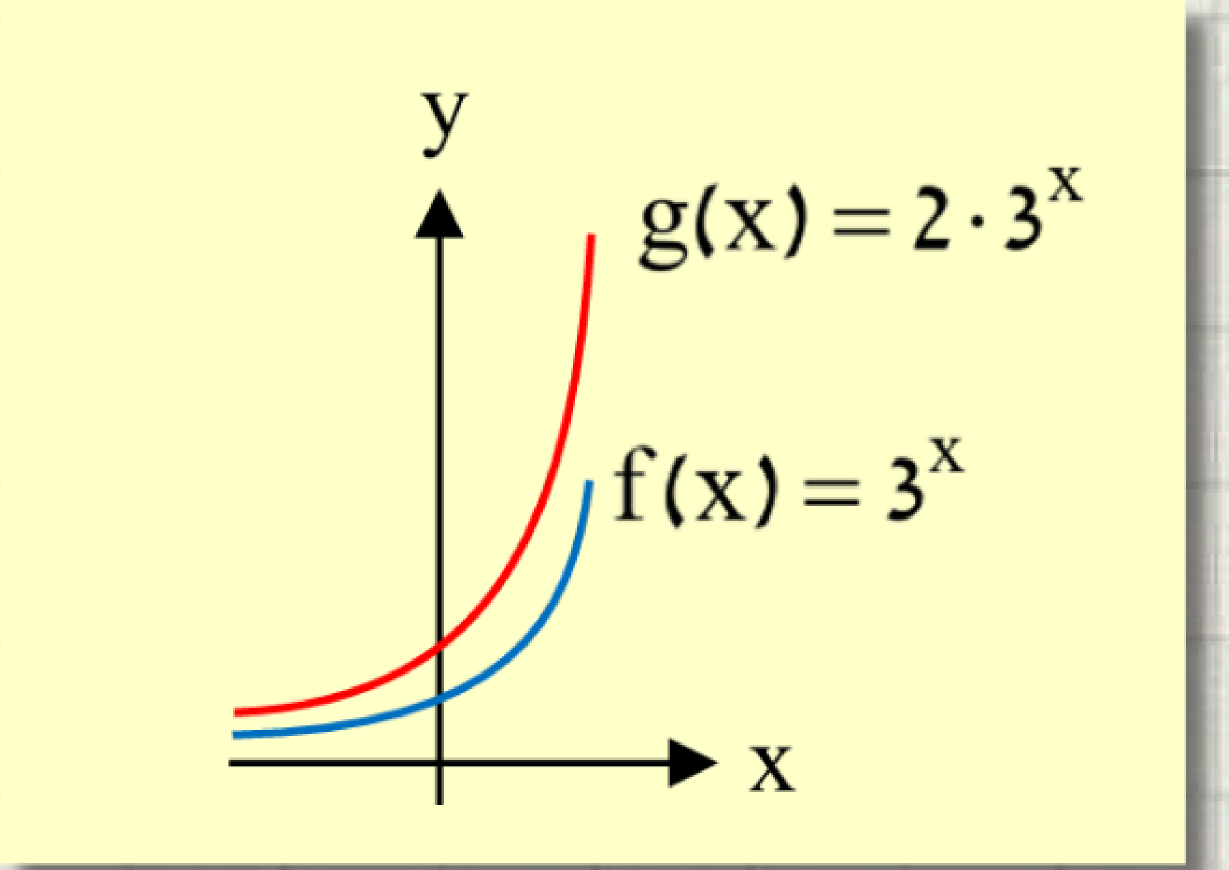
כאשר $k < -1$ גרף הפונקציה נמתח אנכית פי |k|, וגם עובר שיקוף ביחס לציר ה־x.

במתיחה ובכיווץ אנכיים כל נקודה "מועתקת" כך שרק **שיעור ה־y שלה משתנה**, והוא מוכפל פי |k|.

כאשר האסימפטוטה האופקית של פונקציה היא y=0, היא **אינה מושפעת** מכיווץ וממתיחה אנכיים. כאשר האסימפטוטה אינה y=0, היא מועתקת מעלה או מטה בהתאם לטרנספורמציה.

מתיחה אנכית או כיווץ אנכי של גרף הפונקציה f(x)

נדגים מתיחה אנכית בעזרת הפונקציה $f(x)=3^x$ ובעזרת הגרף שלה:



ממתיחה אנכית של גרף הפונקציה $f(x)=3^x$ פי 2, יתקבל גרף הפונקציה $g(x)=2\cdot3^x$.

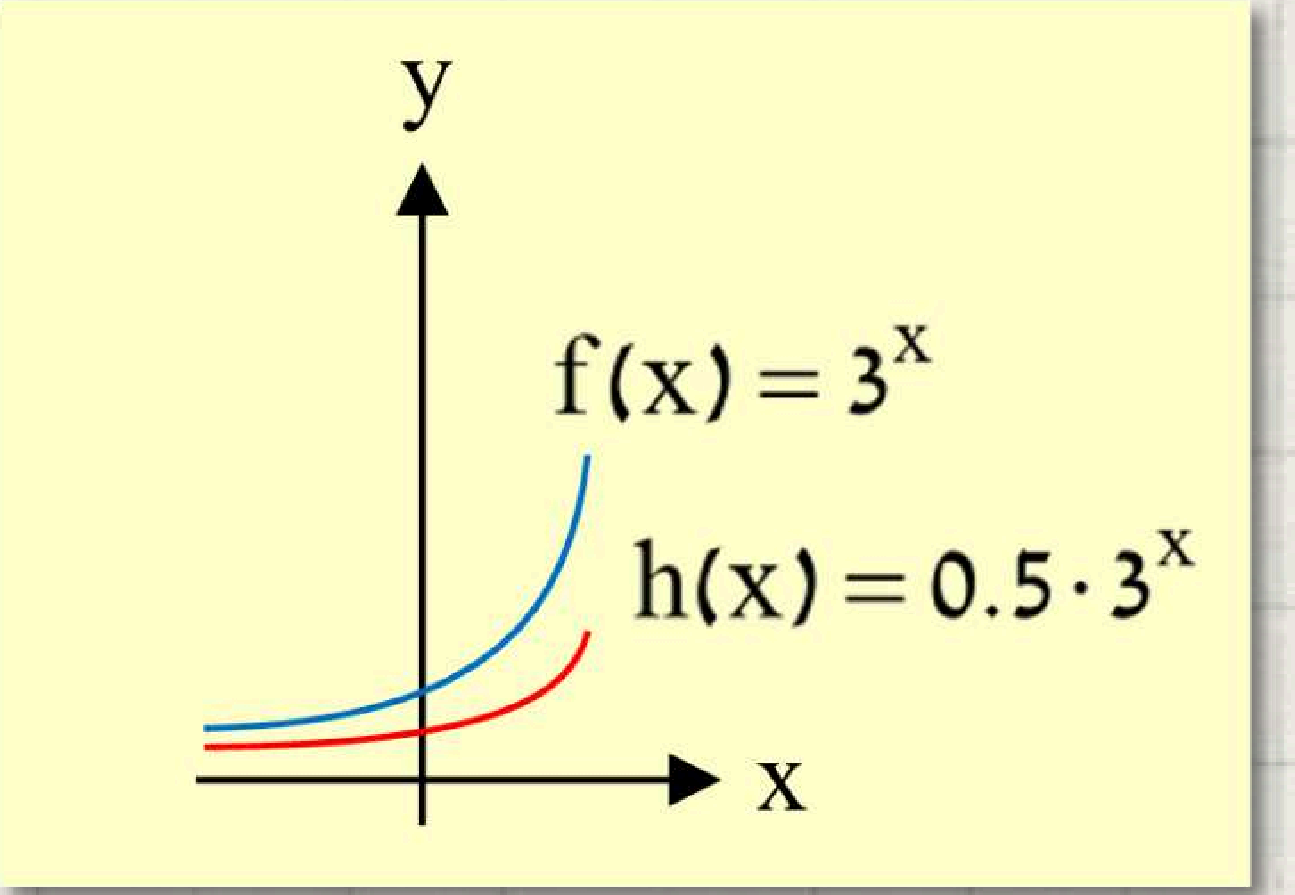
לפניכם גרף הפונקציה g(x) המתקבל:

מתיחה אנכית או כיווץ אנכי של גרף הפונקציה f(x)

נדגים כיווץ אנכי בעזרת הפונקציה $f(x)=3^x$ ובעזרת הגרף שלה:

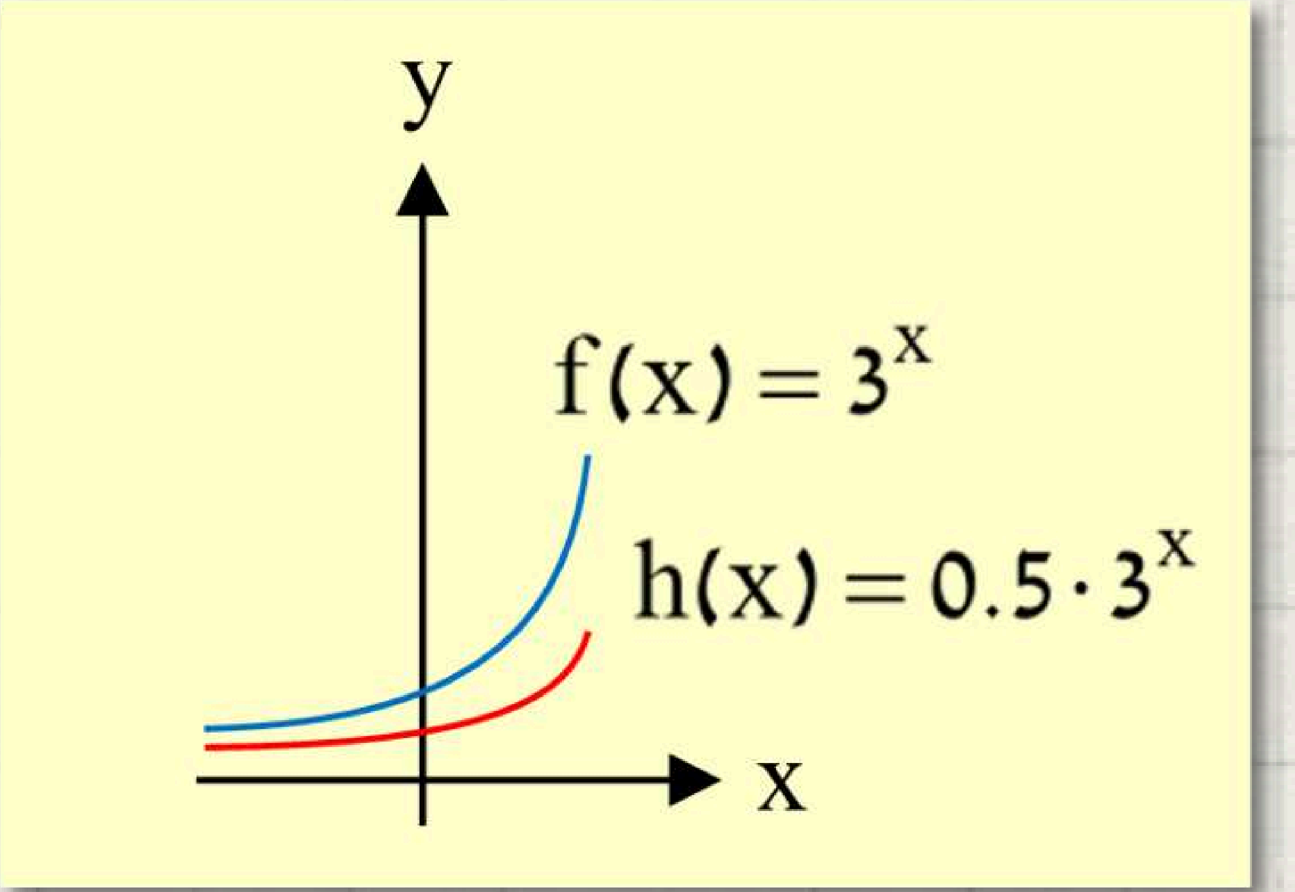
מכיווץ אנכי של גרף הפונקציה $f(x)=3^x$ פי 2, יתקבל גרף הפונקציה $h(x)=0.5\cdot 3^x$.

לפניכם גרף הפונקציה h(x) המתקבל:



מתיחה אנכית או כיווץ אנכי של גרף הפונקציה f(x)

נדגים כיווץ אנכית בעזרת הפונקציה $f\left(x\right)=3^{x}$ ובעזרת הגרף שלה:



מכיווץ אנכי של גרף הפונקציה
$f\left(x\right)=3^{x}$ פי 2, יתקבל גרף
הפונקציה $g\left(x\right)=0.5\cdot 3^{x}$.
לפניכם גרף הפונקציה h(x)
המתקבל:

קישור לפעילות בנושא טרנספורמציות

מנקודה זו והלאה, לאחר הסברים, המצגת מפנה לתרגול בכרך א' של הספר בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472:

כעת נוכל לפתור את תרגילים 1-8 בעמודים 36-37.

טרנספורמציה של ערך מוחלט מהסוג $g(x)=|f(x)|$

כפי שלמדנו בעבר, פונקציית הערך המוחלט היא **אי־שלילית לכל x**.
כאשר נתון גרף הפונקציה $f(x)$, נוכל לשרטט את גרף פונקציית הערך המוחלט $g(x)$ באופן הבא:

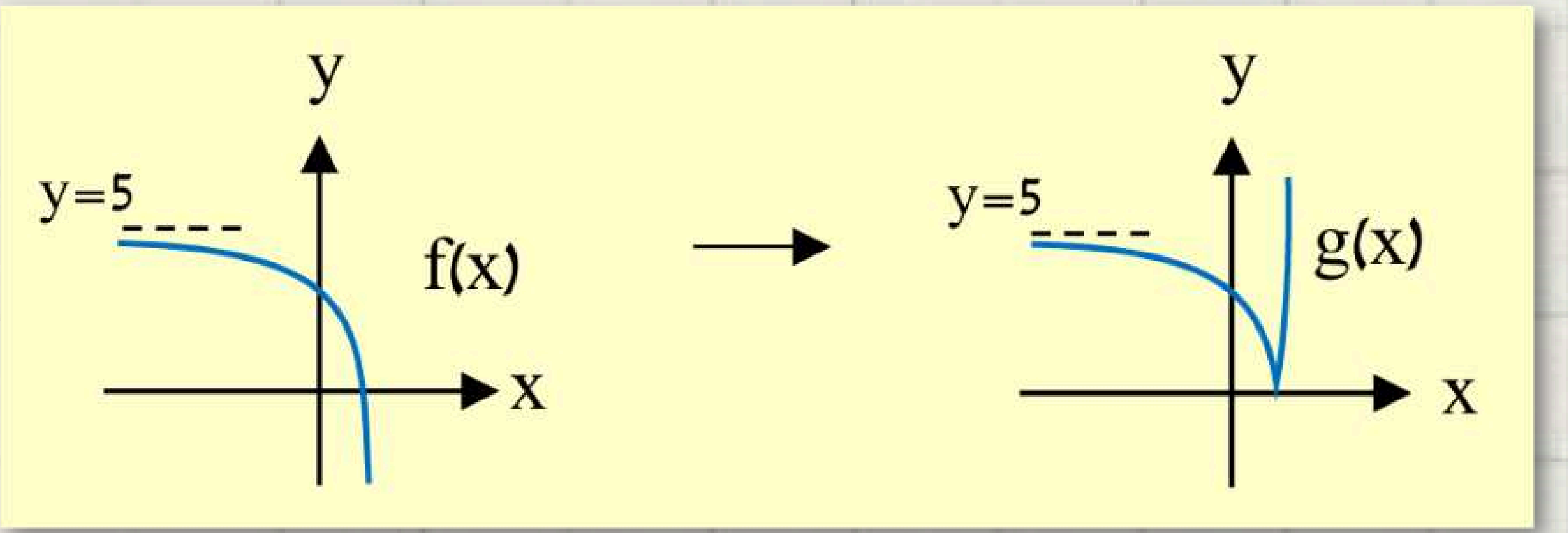
- הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ חותכים את ציר ה־x באותן נקודות.
- נקודות שהיו בעלות שיעור y אי־שלילי בגרף הפונקציה $f(x)$, אינן מושפעות מהטרנספורמציה.

למעשה, בתחום שבו הפונקציה $f(x)$ היא אי־שלילית, שני הגרפים מתלכדים.

טרנספורמציה של ערך מוחלט מהסוג $g(x)=|f(x)|$

- נקודות שהיו בעלות שיעור y שלילי בגרף הפונקציה f(x), יקבלו את שיעור ה־y החיובי הנגדי, כך שבתחום שבו הפונקציה f(x) שלילית, הגרף משתקף ביחס לציר ה־x ("מתקפל כלפי מעלה").

נדגים זאת בעזרת הפונקציה $f\left(x\right)=-e^{x}+5$. לאחר ביצוע הטרנספורמציה תתקבל פונקציית הערך המוחלט $g\left(x\right)=\left|-e^{x}+5\right|$.



כעת נוכל לפתור את תרגילים 9-11 בעמוד 38.

למרחב ההוראה

לחצו כאן

במרחב ההוראה מאות דפי תרגול, וביניהם בחינות מתכונת. המרחב מיועד לצוותי הוראה במוסדות לימוד אשר רכשו את הספר.

למי לפנות?

לשאלות לארכימדס:

במספר 050-9074007 של הוצאת ארכימדס

להזמנות מרובזות - פונים ל-"יש הפצות":

טלפון 03-5595354 או וואטסאפ 054-7154211