

פתרון מלא - מבחן 8**שאלה 1**

א. האליפסה סימטרית ביחס לראשית הצירים ולכן הצירים חוצים את צלעות המלבן החסום.

לכן, ערך ה-x של הנקודה $K(c,0)$ (מוקד הפרבולה) הוא $6m$. לכן נקבל: $c = 6m$.

נזכור כי באליפסה מתקיים: $r_1 + r_2 = 2a$.

נחשב את אורכם של שני הרדיוסים לנקודה A.

את אורכו של r_1 נמצא בעזרת משפט פיתגורס:

$$r_1 = \sqrt{(12m)^2 + (5m)^2} = \sqrt{169m^2} = 13m$$

$$r_2 = 5m$$

$$r_1 + r_2 = 2a \rightarrow 13m + 5m = 2a \rightarrow a = 9m$$

נזכור כי $a^2 = b^2 + c^2$ ונקבל:

$$81m^2 = b^2 + 36m^2 \rightarrow b^2 = 45m^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{81m^2} + \frac{y^2}{45m^2} = 1 \quad \text{כלומר, משוואת האליפסה היא:}$$

ב. הנקודה C היא המוקד השמאלי של האליפסה ונתונה הנקודה D כך ש: $CD = t$. ידוע שמרחק של

הנקודה D מהנקודה C הוא קבוע וערכו t. כיוון שאוסף כל הנקודות במרחק קבוע מנקודה מגדיר מעגל

סביב נקודה זו, נסיק שהמקום הגיאומטרי הוא מעגל שמרכזו ב- $C(-6m, 0)$ ורדיוסו שווה למרחק t.

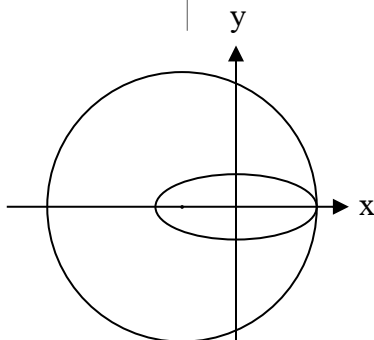
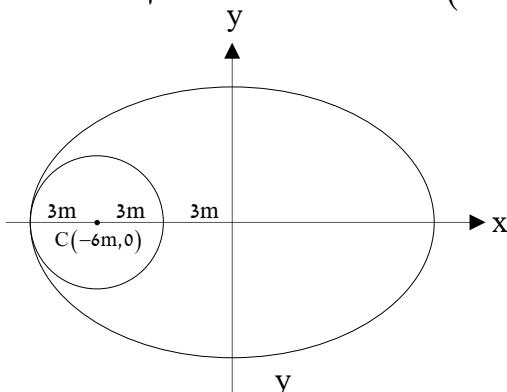
כעת נוכל לקבוע עבור כל טענה האם היא נכונה או שגויה:

i. ייתכן שקיימת נקודת מפגש אחת: הטענה נכונה.

כאשר רדיוס המעגל שווה למרחק שלו מנקודת הקצה השמאלית

של האליפסה תתקבל השקה מבפנים, כפי שמתואר בשרטוט

משמאל. במקרה זה קיימת נקודת מפגש אחת כנדרש.



בנוסף, כאשר רדיוס המעגל שווה למרחק שבין מרכזו לבין נקודת הקצה

הימנית של האליפסה תתקבל השקה מבחוץ, כפי שמתואר בשרטוט

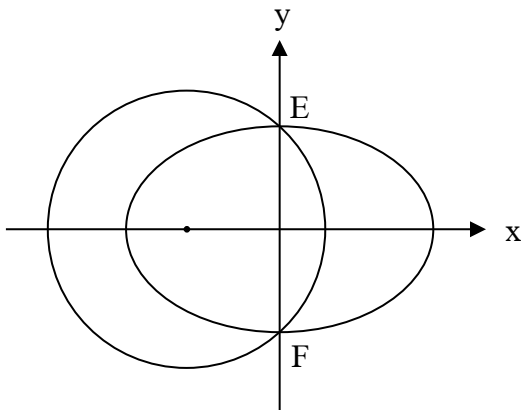
משמאל. גם במקרה זה קיימת נקודת מפגש אחת כנדרש.

ראינו שישנם שני ערכי t עבורם קיימת נקודת מפגש יחידה בין האליפסה

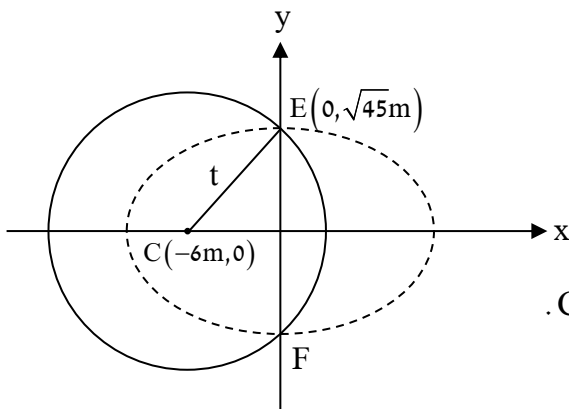
לבין המעגל ולכן הטענה נכונה.

ii. ייתכן שהמקום הגיאומטרי משיק לאליפסה בנקודה אחת וגם משיק לציר ה-y: **הטענה שגויה.**

כיוון שמרכז המעגל נמצא משמאל לציר ה-y ההשקה ביניהם אפשרית רק עבור הקצה הימני של המעגל. ראינו בסעיף הקודם שאפשרות זו מתקיימת רק עבור $t = 3m$ אך במצב זה הקצה הימני ביותר של המעגל חותך את ציר ה-x בנקודה $(-3m, 0)$ ואינו פוגש כלל את ציר ה-y (כמתואר בשרטוט העליון בסעיף הקודם) ולכן הטענה שגויה.



ג. ראשית הצירים בנקודה O. נתון שהאליפסה והמקום הגיאומטרי נפגשים בנקודות E ו-F. המעגל והאליפסה סימטריים ביחס לציר ה-x ולכן נוכל להסיק שנקודות החיתוך ביניהם E ו-F הן בעלות אותו שיעור x. כמו כן, ידוע שהמרחק EF הוא מקסימלי וכיוון שמדובר על שתי נקודות בעלות אותו שיעור x על היקף האליפסה, נסיק שבהכרח מדובר על נקודות החיתוך עם ציר ה-y.



כעת נביע את משוואת האליפסה באמצעות t:

ממשוואת האליפסה שמצאנו בסעיף א' ניתן

להסיק את שיעורי הנקודה: $E(0, \sqrt{45} \cdot m)$

ובסעיף הקודם מצאנו גם את המוקד השמאלי: $C(-6m, 0)$.

כיוון שרדיוס המעגל הוא t נוכל לחשב:

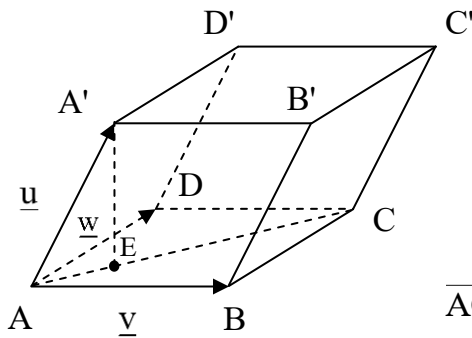
$$t = \sqrt{(-6m - 0)^2 + (0 - \sqrt{45}m)^2} \rightarrow t = \sqrt{36m^2 + 45m^2} \rightarrow t = \sqrt{81m^2} \rightarrow t = 9m \rightarrow m = \frac{1}{9}t$$

לבסוף נציב במשוואת האליפסה $\frac{x^2}{81m^2} + \frac{y^2}{45m^2} = 1$ ונקבל:

$$\frac{x^2}{81m^2} + \frac{y^2}{45m^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{81\left(\frac{1}{9}t\right)^2} + \frac{y^2}{45\left(\frac{1}{9}t\right)^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{81 \cdot \frac{1}{81}t^2} + \frac{y^2}{45 \cdot \frac{1}{81}t^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{t^2} + \frac{9y^2}{5t^2} = 1 \quad / \cdot 5t^2$$

$$\rightarrow 5x^2 + 9y^2 = 5t^2$$

שאלה 2



הבסיס ABCD של המקבילון הנתון הוא מעוין והנקודה E נמצאת עליו כמתואר בשרטוט.

א. נתונות לנו הנקודות $A(2, 0, -7)$, $C(6, 8, 5)$. נמצא את הוקטור

$$\overrightarrow{AC} = (6-2, 8-0, 5+7) = (4, 8, 12) \quad \text{שעובר בין שתי נקודות אלו:}$$

כעת נמצא את ההצגה הפרמטרית של הישר שעובר דרך AC. ניעזר בנקודה A ובווקטור $\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ שכיוונו זהה

$$\text{לשל } \overrightarrow{AC} \text{ אך הוא יאפשר לנו חישובים פשוטים יותר: } \underline{x} = (2, 0, -7) + t(1, 2, 3)$$

עבור הצבה של $t=1$ במשוואת הישר מתקיים:

$$(2, 0, -7) + 1 \cdot (1, 2, 3) = (2+1, 0+2, -7+3) = (3, 2, -4)$$

ולכן הנקודה $E(3, 2, -4)$ אכן נמצאת על האלכסון AC.

נחשב את אורכי הקטעים AE ו-EC:

$$d_{AE} = \sqrt{(2-3)^2 + (0-2)^2 + [-7-(-4)]^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$d_{EC} = \sqrt{(6-3)^2 + (8-2)^2 + [5-(-4)]^2} = \sqrt{3^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{9+36+81} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

$$\text{מכאן נובע שהיחס בין האורכים הוא: } \frac{d_{AE}}{d_{EC}} = \frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{14}} = \frac{1}{3} \quad \text{ולכן E מחלקת את האלכסון AC ביחס 3:1.}$$

$$\text{ב. נסמן: } \overrightarrow{AA'} = \underline{u}, \overrightarrow{AB} = \underline{v}, \overrightarrow{AD} = \underline{w}$$

הבסיס ABCD הוא מעוין ולכן הצלעות AD ו-BC מקבילות ושוות. לכן מתקיים: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \underline{w}$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{v} + \underline{w} \quad \text{נמצא את הווקטור } \overrightarrow{AC}:$$

בסעיף א' מצאנו שהנקודה E מחלקת את AC ביחס של 3:1 ולכן: $3AE = EC$. מכאן נובע ש: $4AE = AC$

ולכן $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. כעת נוכל להביע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{A'E}$:

$$\overrightarrow{A'E} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = -\underline{u} + \frac{1}{4}(\underline{v} + \underline{w}) = \frac{1}{4}\underline{v} - \underline{u} + \frac{1}{4}\underline{w}$$

ג. 1. נתון $AB=2$ וכיוון שהבסיס ABCD הוא מעוין גם: $AD=2$. מכאן נובע ש: $|\underline{v}| = |\underline{w}| = 2$. כמו כן,

נתון $AA'=1.5$ ולכן $|\underline{u}| = 1.5$. בנוסף, נתונות הזוויות: $\angle DAA' = 60^\circ$, $\angle BAA' = 60^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$.

מהם, כפי שניתן לראות בשרטוט, ניתן להסיק שמתקיים: $\angle(\underline{u}, \underline{v}) = \angle(\underline{v}, \underline{w}) = \angle(\underline{u}, \underline{w}) = 60^\circ$.

כדי לפשט את ההוכחה בהמשך נחשב תחילה את המכפלות הסקלריות של כל זוג וקטורים:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos 60^\circ = 1.5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.5$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = |\underline{u}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos 60^\circ = 1.5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.5$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

כעת נוכל להראות שהווקטור $\overrightarrow{A'E}$ מאונך לווקטור $\overrightarrow{AC}$ באופן הבא:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'E} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\frac{1}{4}\underline{v} - \underline{u} + \frac{1}{4}\underline{w}\right) \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \frac{1}{4}\underline{v} \cdot \underline{v} + \frac{1}{4}\underline{v} \cdot \underline{w} - \underline{u} \cdot \underline{v} - \underline{u} \cdot \underline{w} + \frac{1}{4}\underline{w} \cdot \underline{v} + \frac{1}{4}\underline{w} \cdot \underline{w} \\ &= \frac{1}{4}|\underline{v}|^2 + \frac{1}{4} \cdot 2 - 1.5 - 1.5 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4}|\underline{w}|^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 \\ &= 1 - 2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

מצאנו ש- $\overrightarrow{A'E} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ולכן נסיק ש- $\overrightarrow{A'E} \perp \overrightarrow{AC}$.

2. תחילה נראה שהווקטור $\overrightarrow{A'E}$ מאונך לווקטור $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{A'E} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{4}\underline{v} - \underline{u} + \frac{1}{4}\underline{w}\right) \cdot \underline{v} = \frac{1}{4}\underline{v} \cdot \underline{v} - \underline{u} \cdot \underline{v} + \frac{1}{4}\underline{v} \cdot \underline{w} = \frac{1}{4}|\underline{v}|^2 - 1.5 + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

מצאנו ש- $\overrightarrow{A'E} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ולכן נסיק ש- $\overrightarrow{A'E} \perp \overrightarrow{AB}$.

ביחד עם סעיף ג'1, מצאנו שהווקטור $\overrightarrow{A'E}$ מאונך לשני הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$. וקטורים אלו, שאינם קולינאריים, נמצאים במישור הבסיס ABCD ולכן $\overrightarrow{A'E}$ הוא מאונך למישור הבסיס כולו.

ד. כיוון שהמקבילון הוא מנסרה הנפח שלו שווה למכפלת שטח הבסיס באורך הגובה לבסיס.

נמצא תחילה את שטח הבסיס המעוין ABCD:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD = 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3}$$

כעת נחשב את אורך הגובה לבסיס $A'E$ על ידי כך שנמצא את אורכו של הווקטור המתאים:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A'E}|^2 &= \left|\frac{1}{4}\underline{v} - \underline{u} + \frac{1}{4}\underline{w}\right|^2 = \left(\frac{1}{4}\underline{v} - \underline{u} + \frac{1}{4}\underline{w}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\underline{v} - \underline{u} + \frac{1}{4}\underline{w}\right) \\ &= \frac{1}{16}\underline{v} \cdot \underline{v} - \frac{1}{4}\underline{v} \cdot \underline{u} + \frac{1}{16}\underline{v} \cdot \underline{w} - \frac{1}{4}\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{u} - \frac{1}{4}\underline{u} \cdot \underline{w} + \frac{1}{16}\underline{w} \cdot \underline{v} - \frac{1}{4}\underline{w} \cdot \underline{u} + \frac{1}{16}\underline{w} \cdot \underline{w} \\ &= \frac{1}{16}\underline{v} \cdot \underline{v} - \frac{1}{2}\underline{v} \cdot \underline{u} + \frac{1}{8}\underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{u} \cdot \underline{u} - \frac{1}{2}\underline{u} \cdot \underline{w} + \frac{1}{16}\underline{w} \cdot \underline{w} \\ &= \frac{1}{16} \cdot |\underline{v}|^2 - \frac{1}{2} \cdot 1.5 + \frac{1}{8} \cdot 2 + |\underline{u}|^2 - \frac{1}{2} \cdot 1.5 + \frac{1}{16}|\underline{w}|^2 = \frac{1}{16} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1.5 + \frac{1}{8} \cdot 2 + 1.5^2 - \frac{1}{2} \cdot 1.5 + \frac{1}{16} \cdot 2^2 \\ &= \frac{1}{16} \cdot 4 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 2 \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 1 \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

מכאן נובע שאורך הווקטור $\overrightarrow{A'E}$, אורכו של גובה המקבילון, שווה ל: $|\overrightarrow{A'E}|^2 = \frac{3}{2} \rightarrow |\overrightarrow{A'E}| = \sqrt{\frac{3}{2}}$

לכן, נפח המקבילון שווה ל: $V = S_{ABCD} \cdot A'E = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

שאלה 3

בסדרה חשבונית שסכומה $210(1+i)$, האיבר הראשון הוא $i+20$ וההפרש $i-1$.

א. נמצא את מספר איברי הסדרה בעזרת הצבת הנתונים בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

$$S = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]:$$

$$210(i+1) = \frac{n}{2} [2(i+20) + (n-1)(i-1)]$$

$$\rightarrow 420(i+1) = n[2(i+20) + (n-1)(i-1)]$$

$$\rightarrow 420i + 420 = n[2i + 40 + ni - n - i + 1]$$

$$\rightarrow 420i + 420 = n[i + ni + 41 - n]$$

$$\rightarrow 420i + 420 = ni + n^2i + 41n - n^2$$

וכעת נשווה בין החלק הממשי והמדומה בכל אחד מהאגפים:

$$\begin{cases} 420 = 41n - n^2 \\ 420 = n + n^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n^2 - 41n + 420 = 0 \\ n^2 + n - 420 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 20, n_2 = 21 \\ n_1 = 20, n_2 = -21 \end{cases} \rightarrow n = 20$$

הפתרון חייב לקיים את שתי המשוואות ולכן מספר האיברים בסדרה הוא: $n = 20$.

ב. $Z_1 = 210(1+i) = 210 + 210i$ הוא אחד מקדודיו של מצולע משוכלל בעל $2m$ צלעות, אשר חסום

במעגל קנוני במישור גאוס. קודקודי המצולע לפי הסדר נגד כיוון השעון הם: $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_{2m}$.

1. נביע באמצעות m את שני הקדקודים הסמוכים ל- Z_1 משני צדיו:

נמצא את ההצגה הקוטבית של Z_1 :

$$r = \sqrt{(210)^2 + (210)^2} = \sqrt{2 \cdot (210)^2} = 210 \cdot \sqrt{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{210}{210} = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

ולכן מתקיים: $Z_1 = 210\sqrt{2}\text{cis}45^\circ$.

כיוון שבמצולע $2m$ צלעות, גודלה של כל אחת מהזוויות המרכזיות הוא: $\frac{360^\circ}{2m} = \frac{180^\circ}{m}$ ולכן זה ההפרש בין הזוויות המתאימות לכל אחד מקדודי המצולע.

לכן, כדי למצוא את הקדקודים Z_2 ו- Z_{2m} יש להוסיף ולהחסיר בהתאמה $\frac{180^\circ}{m}$ מהזווית של Z_1 .

$$Z_2 = 210\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ + \frac{180^\circ}{m}\right) \text{ ו- } Z_{2m} = 210\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ - \frac{180^\circ}{m}\right)$$

2. א. ראשית הצירים בנקודה O. נתון שהמכפלה $Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4$ היא מספר הנמצא ברביע השני במישור גאוס.

ראשית נבטא באמצעות m את הקדקודים Z_3 ו- Z_4 ואת ערך המכפלה:

$$Z_3 = 210\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ + \frac{180^\circ}{m} + \frac{180^\circ}{m}\right) = 210\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ + \frac{360^\circ}{m}\right)$$

$$Z_4 = 210\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ + \frac{180^\circ}{m} + \frac{180^\circ}{m} + \frac{180^\circ}{m}\right) = 210\sqrt{2}\text{cis}\left(45^\circ + \frac{540^\circ}{m}\right)$$

ולכן:

$$Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 = (210\sqrt{2})^3 \text{cis}\left(45^\circ + \frac{180^\circ}{m} + 45^\circ + \frac{360^\circ}{m} + 45^\circ + \frac{540^\circ}{m}\right) = (210\sqrt{2})^3 \text{cis}\left(135^\circ + \frac{1080^\circ}{m}\right)$$

כעת, כיוון שנתון שהמכפלה מייצגת מספר הנמצא ברביע השני, נסיק שהזווית נמצאת בין 90° ל- 180° :

$$90^\circ < 135^\circ + \frac{1080^\circ}{m} \rightarrow -45^\circ < \frac{1080^\circ}{m} \rightarrow -45^\circ m < 1080^\circ \rightarrow -24 < m$$

וגם:

$$135^\circ + \frac{1080^\circ}{m} < 180^\circ \rightarrow \frac{1080^\circ}{m} < 45^\circ \rightarrow 1080^\circ < 45^\circ m \rightarrow 24 < m \rightarrow 25 \leq m$$

ולכן נסיק ש: $50 \leq 2m$.

כלומר למצולע יש מספר זוגי של צלעות הגדול או שווה ל-50.

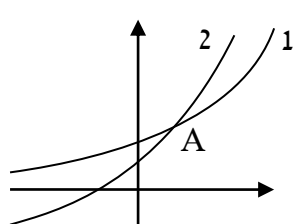
ב. הזווית $\angle Z_7 O Z_8$ היא זווית מרכזית במעגל החוסם ולכן לפי סעיף ב'1 גודלה הוא $\frac{180^\circ}{m}$.

בסעיף הקודם ראינו ש: $25 \leq m$ ולכן מתקיים:

$$25 \leq m \rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{25} \rightarrow \frac{180^\circ}{m} \leq \frac{180^\circ}{25} \rightarrow \frac{180^\circ}{m} \leq 7.2^\circ$$

מכאן שהזווית $\angle Z_7 O Z_8$ קטנה או שווה ל- 7.2° .

שאלה 4



נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = e^{2x} + mx$ ו- $g(x) = 6e^x$ הנחתכים בנקודה A בלבד.

א. כדי לשייך כל אחד מהגרפים לפונקציות הנתונות נמצא את נקודות החיתוך שלהן עם ציר ה-y:

$$f(0) = e^{2 \cdot 0} + m \cdot 0 \rightarrow f(0) = e^0 + 0 \rightarrow f(0) = 1 \quad \text{עבור } f(x) = e^{2x} + mx$$

$$g(0) = 6e^0 \rightarrow g(0) = 6 \cdot 1 \rightarrow g(0) = 6 \quad \text{עבור } g(x) = 6e^x$$

בשרטוט הנתון ניתן לראות שנקודת החיתוך עם ציר ה-y של גרף 2 היא בעלת שיעור y הנמוך מבין השתיים ולכן הגרף המתאים לפונקציה $f(x)$ הוא גרף 2.

ב. נתון ששיעור ה-x של הנקודה A הוא: $x_A = 1.544$. כיוון ש-A נקודת החיתוך של שני הגרפים ערכי ה-y של הפונקציות זהים בנקודה זו ומתקיים:

$$f(x_A) = g(x_A) \rightarrow e^{2x_A} + m \cdot x_A = 6e^{x_A} \rightarrow e^{2 \cdot 1.544} + m \cdot 1.544 = 6e^{1.544}$$

$$\rightarrow 21.933 + 1.544m = 28.0997 \rightarrow 1.544m = 6.1667 \rightarrow m = 3.99$$

וכיוון שנתון ש-m מספר שלם נעגל את הפתרון כלפי מעלה ונקבל: $m = 4$.

ג. הגדירו את הפונקציה: $h(x) = [f(x) - g(x)]^n$ (n טבעי וגדול מ-1).

נציב את הפונקציות הנתונות ואת ערך m שמצאנו כדי לקבל את הביטוי: $h(x) = [e^{2x} + 4x - 6e^x]^n$.

1. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $h(x)$ עם הצירים:

נקודת החיתוך עם ציר ה-y:

$$h(0) = [e^{2 \cdot 0} + 4 \cdot 0 - 6e^0]^n \rightarrow h(0) = [1 - 6 \cdot 1]^n \rightarrow h(0) = (-5)^n$$

כלומר הנקודה היא: $(0, (-5)^n)$.

נקודת החיתוך עם ציר ה-x:

הפונקציה $h(x) = [f(x) - g(x)]^n$ תתאפס בכל שיעורי ה-x עבורם ההפרש בין הפונקציות f ו-g שווה ל-0.

ההפרש יתאפס אך ורק עבור אותם ערכי x בהם הפונקציות שוות זה לזה. הפונקציות f ו-g שוות זו לזו אך ורק בנקודות בהן הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים. נתון שהנקודה A היא הנקודה היחידה בה הגרפים נחתכים ולכן נקודת האפס היחידה של הפונקציה h היא: $x_A = 1.544$.

כלומר נקודת החיתוך היחידה של הפונקציה h עם ציר ה- x היא: $(1.544, 0)$.

2. נגזור את הפונקציה h ונשווה לאפס: $h'(x) = 0 \rightarrow n \cdot [e^{2x} + 4x - 6e^x]^{n-1} \cdot (2e^{2x} + 4 - 6e^x) = 0$

המכפלה שמצאנו תתאפס כאשר אחד הגורמים: $[e^{2x} + 4x - 6e^x]^{n-1}$ או $(2e^{2x} + 4 - 6e^x)$ מתאפס.

עבור הגורם השמאלי תתקבל המשוואה: $[e^{2x} + 4x - 6e^x]^{n-1} = 0 \rightarrow e^{2x} + 4x - 6e^x = 0$

שפתרונותיה מתלכדים עם נקודות החיתוך של הפונקציה h עם ציר ה- x ולכן הפתרון היחיד הוא: $x = 1.544$.

עבור הגורם הימני תתקבל המשוואה:

$$2e^{2x} + 4 - 6e^x = 0 \xrightarrow{e^x=t} 2t^2 + 4 - 6t = 0 \rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2$$

ולאחר הצבה בחזרה:

$$t_1: e^{x_1} = 1 \rightarrow x_1 = 0$$

$$t_2: e^{x_2} = 2 \rightarrow x_2 = \ln 2 \approx 0.693$$

לסיכום, הנקודות עבורן מתקיים: $h'(x) = 0$ הן: $x_1 = 0, x_2 = 0.693, x_3 = 1.544$.

כעת נבדוק את סימן פונקציית הנגזרת לפני ואחרי כל אחת מהנקודות שמצאנו כדי לקבוע את סוגן. נשים לב שבמידה ובביטוי $[e^{2x} + 4x - 6e^x]^{n-1}$ מתקבל ערך שלילי בתוך הסוגריים הסימן יתבטל עבור חזקות זוגיות ויישמר עבור חזקות אי-זוגיות. לכן נבחין בין שני מקרים: התנהגות פונקציית הנגזרת עבור ערכי n זוגיים ובנוסף עבור ערכים אי-זוגיים.

עבור ערכי n זוגיים:

תחום x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 0.693$	$x = 0.693$	$0.693 < x < 1.544$	$x = 1.544$	$1.544 < x$
סימן הנגזרת	-	קיצון	+	קיצון	-	קיצון	+
הפונקציה עולה/יורדת		min		max		min	

ולכן: $x_1 = 0$ ו- $x_3 = 1.544$ הן נקודות קיצון מסוג מינימום ו: $x_2 = 0.693$ היא נקודת קיצון מסוג מקסימום.

עבור ערכי n אי-זוגיים :

תחום x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 0.693$	$x = 0.693$	$0.693 < x < 1.544$	$x = 1.544$	$1.544 < x$
סימן הנגזרת	+	קיצון	-	קיצון	+	פיתול	+
הפונקציה עולה/יורדת		max		min			

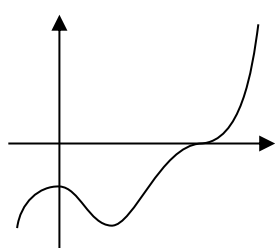
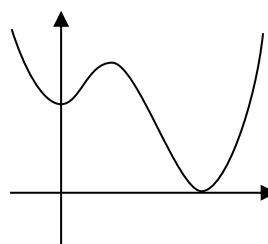
ולכן : $x_1 = 0$ היא נקודת קיצון מסוג מקסימום, $x_2 = 0.693$ היא נקודת קיצון מסוג מינימום ו : $x_3 = 1.544$ היא נקודת פיתול.

3. תחילה נחשב את שיעור ה- y של הנקודה $x = 0.693$:

$$h(0.693) = \left[e^{2 \cdot 0.693} + 4 \cdot 0.693 - 6e^{0.693} \right]^n \rightarrow h(0.693) = (-5.227)^n$$

את שיעורי ה- y של שתי הנקודות הנוספות מצאנו בסעיף ג' : $h(0) = (-5)^n$ ו : $h(1.544) = 0$.

כיוון שסוג הנקודות שמצאנו שונה עבור ערכי n שונים, גם בשרטוט נבחין בין ערכי n זוגיים וערכים אי-זוגיים ועל סמך סעיפי החקירה הקודמים נקבל את השרטוטים הבאים :

עבור ערכי n אי-זוגיים :עבור ערכי n זוגיים :

שאלה 5

$$f(x) = \frac{\ln^a x - 5 \ln x + 6}{\ln^a x - 6 \ln x + 8} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

א. 1. נתון שמשוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה היא: $x = e^4$. לכן הערך $x = e^4$ מאפס את המכנה. נציב ונשווה את המכנה ל-0 כדי למצוא את a :

$$[\ln(e^4)]^a - 6 \ln(e^4) + 8 = 0 \rightarrow [4 \ln e]^a - 6 \cdot 4 \ln e + 8 = 0 \rightarrow [4 \cdot 1]^a - 6 \cdot 4 \cdot 1 + 8 = 0$$

$$\rightarrow 4^a - 24 + 8 = 0 \rightarrow 4^a = 16 \rightarrow a = 2$$

כדי למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה נתחשב באילוצים הבאים:

I. כיוון שפונקציית ה- $\ln$ מוגדרת רק עבור ערכי x חיוביים נדרוש: $0 < x$.

II. כיוון שהפונקציה מוגדרת רק עבור ערכי x שאינם מאפסים את המכנה נדרוש:

$$\ln^2 x - 6 \ln x + 8 \neq 0 \rightarrow [\ln x = t] \rightarrow t^2 - 6t + 8 \neq 0 \rightarrow t_1 \neq 2, t_2 \neq 4$$

$$\rightarrow \ln x_1 \neq 2, \ln x_2 \neq 4 \rightarrow x_1 \neq e^2, x_2 \neq e^4$$

נשים לב ש- $x_1 \neq e^2$ מאפס גם את המונה של הפונקציה ולכן יש לבדוק האם מדובר בנקודת אי-רציפות

סליקה ("חור" בפונקציה). לשם כך נבצע פירוק לגורמים במונה ובמכנה ונקבל:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x - 5 \ln x + 6}{\ln^2 x - 6 \ln x + 8} = \frac{(\ln x - 3)(\ln x - 2)}{(\ln x - 4)(\ln x - 2)} = \frac{\ln x - 3}{\ln x - 4} \rightarrow f(e^2) = \frac{\ln e^2 - 3}{\ln e^2 - 4} = \frac{2 - 3}{2 - 4} = \frac{1}{2}$$

מצאנו שמדובר בנקודת אי-רציפות סליקה ששיעוריה: $(e^2, \frac{1}{2})$.

לסיכום, תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $0 < x < e^2, e^2 < x < e^4, e^4 < x$.

כמו כן, בשלבי החקירה הבאים נוכל להשתמש בפונקציה המצומצמת שקיבלנו: $f(x) = \frac{\ln x - 3}{\ln x - 4}$.

2. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים:

ציר ה- y : תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $0 < x$ ולכן לא קיימת נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

ציר ה- x :

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{\ln x - 3}{\ln x - 4} = 0 \rightarrow \ln x - 3 = 0 \rightarrow \ln x = 3 \rightarrow x = e^3$$

לסיכום, נקודת החיתוך היחידה של הפונקציה עם הצירים היא: $(e^3, 0)$.

3. נמצא את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים:

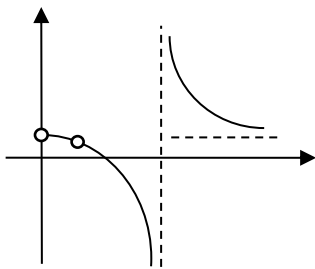
אסימפטוטה אנכית: מכנה הפונקציה מתאפס בשתי נקודות בלבד אך לפי סעיף א'1 מצאנו שרק אחת מהן מתאימה לאסימפטוטה אנכית והיא: $x = e^4$.

אסימפטוטה אופקית: כיוון שהפונקציה מוגדרת רק עבור ערכי x חיוביים לא קיימת אסימפטוטה אופקית כאשר x שואף למינוס אינסוף. נבחן את התנהגות הפונקציה כאשר x שואף לאינסוף:

המונה והמכנה שניהם פונקציות $\ln$ ולכן מייצגות ביטויים שערכם גדל באותו "קצב". מכאן שהתנהגות הפונקציה ב-"אינסוף" (האסימפטוטה) נקבעת לפי היחס בין המקדמים של הביטויים עם החזקה הגבוהה ביותר במונה ובמכנה. במונה וגם במכנה מופיע $\ln$ בחזקת 1 ולכן משוואת האסימפטוטה האופקית

$$\text{היא: } y = \frac{1}{1} = 1.$$

לסיכום, משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה הן: $x = e^4$, $y = 1$.

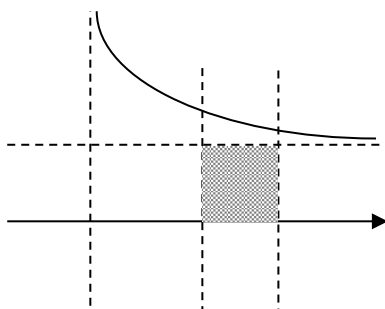


ב. נשים לב שבקצה תחום ההגדרה קיים "חור" נוסף ולא אסימפטוטה אנכית.

ניתן לוודא זאת באמצעות הצבת ערכי x שהולכים ומתקרבים לקצה התחום בפונקציה ובחינת הערכים המתקבלים.

$$\text{ג. נתון הביטוי } \int_n^{n+1} f(x) dx \text{ עבור } n \text{ טבעי וגדול מ-} e^4.$$

בתחום $e^4 < n$, כלומר מימין לאסימפטוטה האנכית, גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא מעל האסימפטוטה האופקית שמשוואתה $y = 1$. לכן, עבור כל $e^4 < n$ נקבל שהשטח המתקבל באינטגרל מורכב משני שטחים:



הראשון, ריבוע שכלוא על ידי ציר ה- x , האסימפטוטה שמשוואתה $y = 1$

והגבולות $x = n$ ו: $x = n + 1$. שתיים מצלעותיו באורך 1 יח':

הפרש בין שיעורי ה- x של הגבולות: $(n + 1) - n = 1$. גם שתי הצלעות

האחרות באורך 1 יח': המרחק בין האסימפטוטה שמשוואתה $y = 1$

לציר ה- x . לכן שטח הריבוע הוא 1 יח"ר.

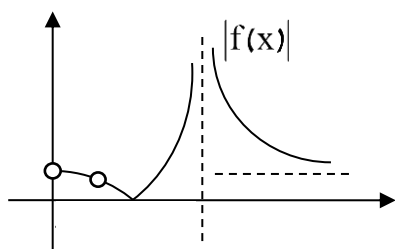
השני, השטח בין גרף הפונקציה לבין האסימפטוטה שמשוואתה $y = 1$ והגבולות $x = n$ ו: $x = n + 1$.

לסיכום, האינטגרל המבוקש הוא חיבור של שטח שגודלו 1 יח"ר עם שטח נוסף.

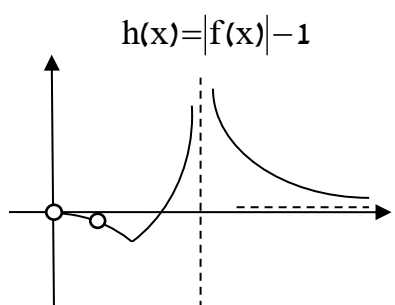
$$\text{כלומר, ערך האינטגרל בהכרח גדול מ-1. לכן ערך הביטוי } \int_n^{n+1} f(x) dx \text{ אינו יכול להיות 1.}$$

ד. נתונה הפונקציה החדשה: $h(x) = |f(x)| - 1$.

נצייר את גרף הפונקציה החדשה $h(x)$ בשני שלבים:



הפונקציה $|f(x)|$ מתקבלת מהפעלת הערך המוחלט על כל ערכי ה- y של הפונקציה $f(x)$. כעת, לכל x עבורו ערך $f(x)$ אי-שלילי לא חל שינוי בערך הפונקציה ולכן גם הגרף אינו משתנה. לעומת זאת, לכל x עבורו ערך $f(x)$ שלילי, בפונקציה $|f(x)|$ פעולת הערך המוחלט תחזיר את המספר החיובי הנגדי לערך הפונקציה המקורית ולכן גרף הפונקציה המתקבל הוא "שיקוף" ביחס לציר ה- x .



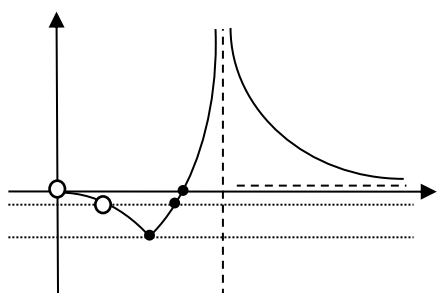
בשלב הבא נחסיר 1 מכל ערכי ה- y של הפונקציה $|f(x)|$ ונקבל גרף "הנמוך" ביחידה 1 על ציר ה- y בהשוואה לגרף המקורי:

בעזרת גרף הפונקציה $h(x)$ נוכל לקבוע האם הטענות הבאות נכונות:

i. למשוואה $h(x) = 0$ יש שני פתרונות - **הטענה שגויה**.

ניתן לראות שהפונקציה $h(x)$ חותכת את הישר $y = 0$ (ציר ה- x) בנקודה אחת בלבד. הנקודה השנייה היא נקודת ה"חור" ולכן אינה פתרון מתאים. לסיכום, למשוואה פתרון יחיד.

ii. קיימים רק שני ערכי k שעבורם למשוואה $h(x) = k$ יש פתרון יחיד - **הטענה שגויה**.



קיימים **שלושה** ערכי k מתאימים:

הערכים הם:

$k = 0$ על ציר ה- x ,

$k = -1$ בנקודת ה"שפיץ",

$k = -\frac{1}{2}$ בשיעור ה- y של נקודת ה"חור".