



הוצאת ארכימדס שאלון 472 סדרה הנדסית

ארכימדס
אסף לוי

בכיוון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472
כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק ב'

לוח
מסמך
תוכנית

2023

סדרה הנדסית

לחצו על
הנושא הרצוי



האיבר הכללי

סכום

סדרה הנדסית אין סופית
שסכומה מתכנס

ארכימדס
פתרונות למידה

אסף לוי $a^1 = a$

בכיוון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472
כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק ב'

סדרה הנדסית

סדרה חשבונית

גיאומטריה במרחב (וקטורים)

$\log_a a = 1$

$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

מהדורת 2025

ארכימדס
פתרונות למידה

אסף לוי $a^1 = a$

בכיוון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472

כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק ב'

סדרה הנדסית
סדרה חשבונית
גיאומטריה במרחב (וקטורים)

$\log_a a = 1$ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

מהדורת 2025

הוצאת ארכימדס

שאלון 472

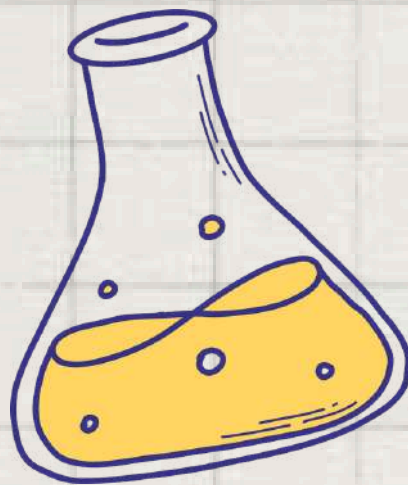
סדרה הנדסית

האיבר הכללי



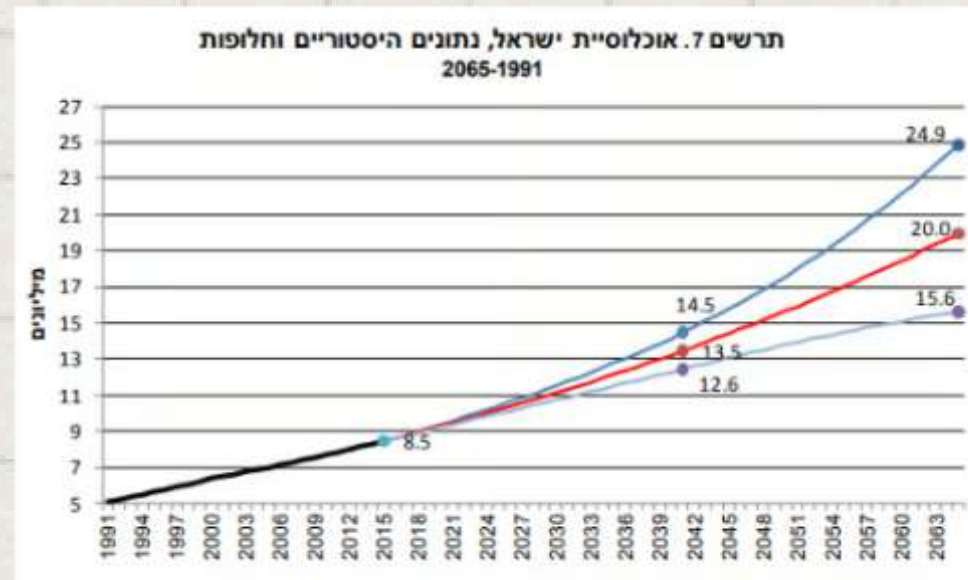
קיים שימוש נרחב בסדרה הנדסית בתחומי מדע שונים:

כימיה



זמן מחצית החיים

התרבות אוכלוסיה



כלכלה



ריבית דריבית

1. לפניכם שלוש סדרות. הניחו שבכל סדרה חוקיות ממשיכה:

i. $1, 2, 4, 8, \dots$ ii. $3, 9, 27, 81, \dots$ iii. $4, 16, 64, 256, \dots$

א. האם תוכלו לזהות חוקיות אפשרית בכל אחת מהסדרות? הסבירו.

ב. האם תוכלו לזהות מאפיין משותף כלשהו עבור תשובותיכם לסעיף הקודם? הסבירו.





מהי סדרה הנדסית?



בשאלת הפתיחה עסקנו בסדרות הנדסיות.
סדרה הנדסית היא סדרת מספרים שבה היחס בין כל
איבר (מלבד הראשון) לבין האיבר שלפניו הוא גודל
קבוע שאינו תלוי במיקום האיבר.

גודל קבוע זה נקרא **מנת הסדרה ההנדסית**.
נהוג לסמן את המנה באות q המגיעה מהמילה
quotient שאחת המשמעויות שלה היא 'מנה'.



המנה q קבועה ואינה תלויה במיקום האיברים, ולכן:

$q = \frac{a_2}{a_1}, q = \frac{a_3}{a_2}$ וכך הלאה. עבור כל צמד איברים סמוכים

בסדרה מתקיים: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

לדוגמה, בסדרה הראשונה בשאלה שעשינו:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8$$

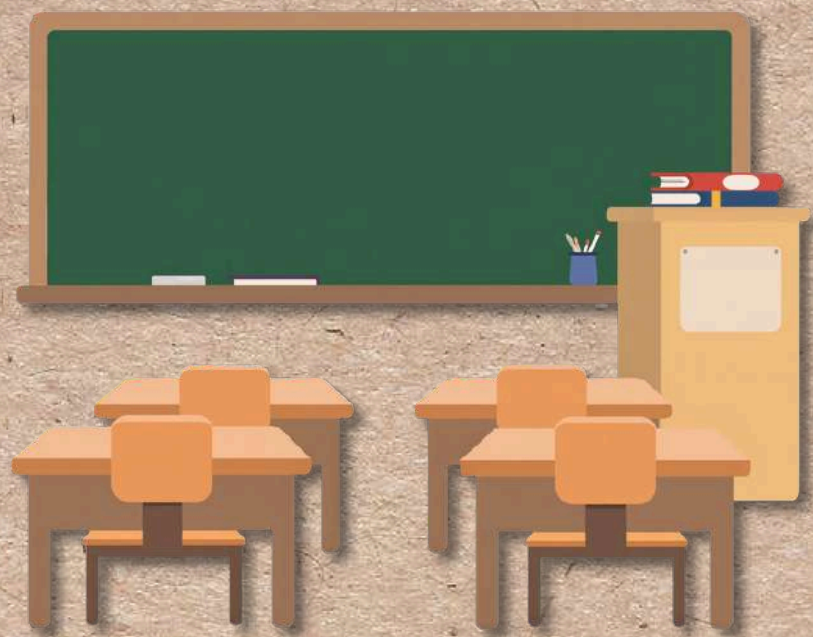
$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2 \quad q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{2} = 2 \quad q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{8}{4} = 2$$

מצאו את המנה בכל אחת מהסדרות שהופיעו בשאלת הפתיחה:

4, 16, 64, 256,iii

3, 9, 27, 81,ii

1, 2, 4, 8,i



3. לפניכם נתונים לגבי 4 סדרות הנדסיות:

סדרה i: $q = 2, a_1 = 6$

סדרה ii: $q = \frac{1}{2}, a_1 = 6$

סדרה iii: $q = 2, a_1 = -6$

סדרה iv: $q = \frac{1}{2}, a_1 = -6$



א. עבור כל סדרה מצאו את שלושת האיברים הראשונים, וקבעו אם היא סדרה עולה או יורדת.

ב. האם ניתן להסיק מהשאלה שסדרה הנדסית שבה $1 < q$ היא סדרה עולה? הסבירו.

ג. האם ניתן להסיק מהשאלה שסדרה הנדסית שבה $0 < q < 1$ היא סדרה יורדת? הסבירו.





סדרות עולות ויורדות

בשאלה הקודמת שעסקנו מצאנו שבסדרה הנדסית מנת הסדרה והסימן של האיבר הראשון קובעים אם הסדרה עולה או יורדת.

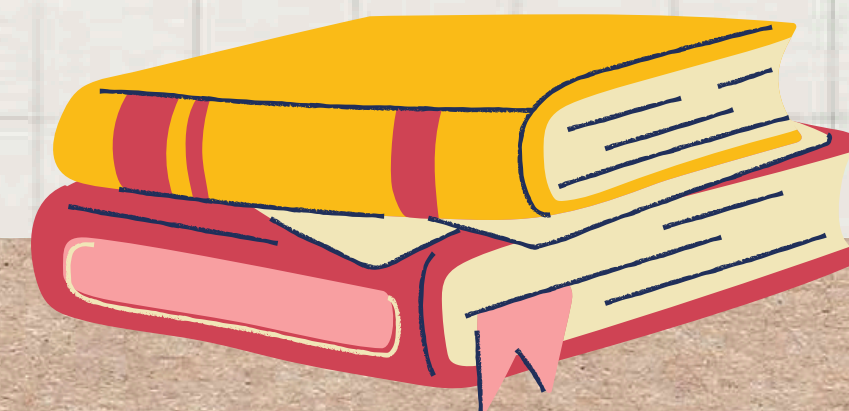
מצאנו שסדרה **הנדסית עולה** בשני המקרים הבאים:

כאשר $0 < a_1$ וגם $1 < q$ כמו בסדרה:

$1, 5, 25, 125, \dots$ שבה $a_1 = 1$ ו- $q = 5$.

כאשר $a_1 < 0$ וגם $0 < q < 1$ כמו בסדרה:

$-1, -5, -25, -125, \dots$ שבה $a_1 = -125$ ו- $q = \frac{1}{5}$.



מצאנו שסדרה הנדסית יורדת בשני המקרים הבאים:

כאשר $a_1 > 0$ וגם $0 < q < 1$ כמו בסדרה: $24, 12, 6, 3, \dots$ שבה $a_1 = 24$ ו- $q = \frac{1}{2}$.

כאשר $a_1 < 0$ וגם $1 < q$ כמו בסדרה: $-3, -6, -12, -24, \dots$ שבה $a_1 = -3$ ו- $q = 2$.

סדרה שכל איבריה זהים נקראת סדרה קבועה ומנתה 1.





**מנקודה זו והלאה המצגת מפנה לתרגול בכרך ב' של
הספר בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472:**

כעת נוכל לפתור את תרגילים 4-6 בעמוד 184.

7. נתון ייצוג מילולי חלקי של סדרה הנדסית:

"סדרה שבה האיבר הראשון הוא 2, וכל איבר נוסף מתקבל מהכפלת האיבר שלפניו ב-____."

א. השלימו את הייצוג המילולי כך שיתאר סדרה: 1. עולה. 2. יורדת. 3. קבועה.

ב. שלום טען: "אם אשלים את הייצוג המילולי עם מספר שלילי, תתקבל סדרה שאינה עולה ואינה יורדת." האם הוא צודק? הסבירו.





בשאלה הקודמת עסקנו בסדרה הנדסית שהמנה שלה **שלילית**.
במקרים אלו איברי הסדרה חיוביים ושליליים לסירוגין, ולכן סדרה מסוג
זה אינה עולה ואינה יורדת.



... , -27 , 9 , -3 .

דוגמאות: ... , 8 , -4 , 2



כעת נוכל לפתור את תרגיל 8 בעמוד 185.

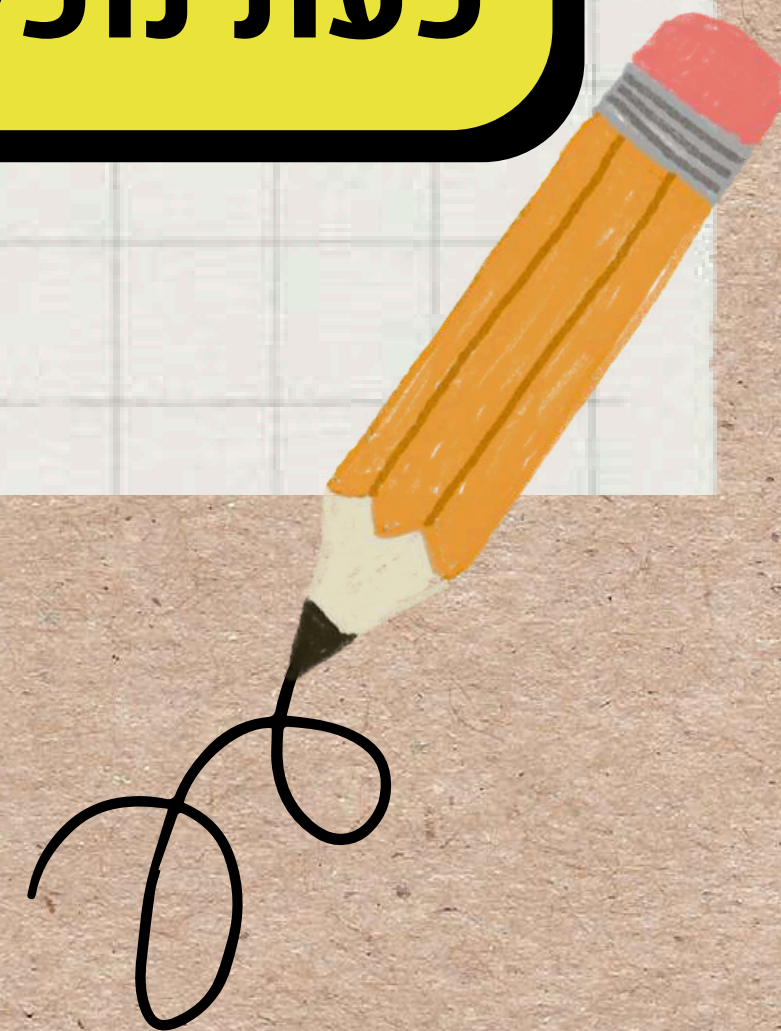


9. לפניכם ייצוגים מילוליים של סדרות הנדסיות. כתבו את שלושת האיברים הראשונים בכל סדרה:
- א. סדרה שבה האיבר הראשון הוא 6, וכל איבר נוסף גדול פי 5 מהאיבר שלפניו.
 - ב. סדרה שבה האיבר הראשון הוא 100, וכל איבר נוסף קטן פי 10 מהאיבר שלפניו.





כעת נוכל לפתור את תרגילים 9ג', 10, 11 בעמוד 185.



12. נתונה הסדרה ההנדסית: $2, 10, 50, 250, \dots$

א. קבעו איזה מכללי הנסיגה הבאים מגדיר את הסדרה לכל n טבעי:

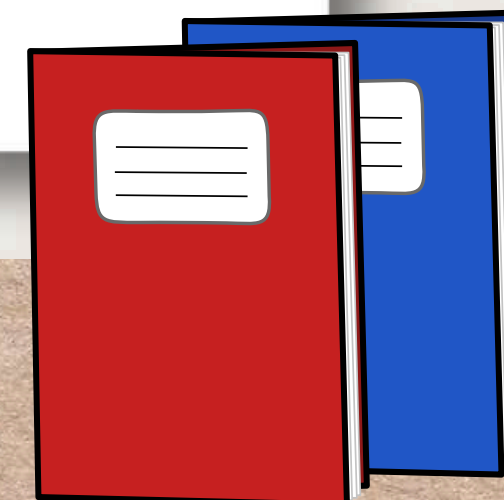


i. $a_{n+1} = a_n + 8, a_1 = 2$ ii. $a_{n+1} = 5a_n, a_1 = 2$ iii. $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n, a_1 = 2$

ב. נתונה הסדרה ההנדסית: $3, 6, 12, 24, \dots$. כתבו ייצוג מילולי לסדרה וכלל נסיגה מתאים.

ג. נתונה הסדרה ההנדסית: $100, 10, 1, \frac{1}{10}, \dots$. כתבו ייצוג מילולי לסדרה וכלל נסיגה מתאים.

ד. כתבו כלל נסיגה שמגדיר סדרה הנדסית שבה האיבר הראשון הוא a , והמנה היא q .





כלל הנסיגה

בשאלה הקודמת עסקנו בכלל הנסיגה המגדיר סדרה הנדסית:
סדרה הנדסית שבה האיבר הראשון הוא a והמנה היא q ,
ניתנת להגדרה על ידי כלל הנסיגה:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = q \times a_n \quad \text{לכל } n \text{ טבעי } (q \neq 0, a \neq 0).$$

דוגמה: ניתן להגדיר את הסדרה ההנדסית שבה האיבר הראשון הוא 3
והמנה היא 5 בעזרת כלל הנסיגה: $a_1 = 3, a_{n+1} = 5a_n$ לכל n טבעי.



17. נתונה הסדרה ההנדסית: $3, 6, 12, 24, 48, \dots$

הראל הציג את חמשת האיברים הראשונים בסדרה באופן המופיע משמאל:



$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 \cdot 2^1 = 6$$

$$a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$$a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$$

א. בדקו אם הראל צודק.

ב. השלימו במחברת לפי דרכו של הראל:

$$a_8 = \square \cdot 2^{\square} = \square \quad .1 \quad a_{11} = \square \cdot 2^{\square} = \square \quad .2$$

ג. אסף טען: "כדי לחשב את האיבר הנמצא במקום ה-40 (a_{40}) נכפיל את האיבר הראשון במנה 2 כאשר היא בחזקת 39". האם הוא צודק?

ד. שרונה טענה: "כדי לחשב את האיבר הנמצא במקום ה- n (a_n) נכפיל את האיבר הראשון במנה 2 כאשר היא בחזקת $(n-1)$ ". האם היא צודקת?

ה. היעזרו בסעיף ד', וקבעו איזו מהנוסחאות הבאות היא הנוסחה לאיבר הכללי של סדרה זו:

$$a_n = 3 \cdot 2^n \quad .i \quad a_n = 3 \cdot 2^{(n-1)} \quad .ii \quad a_n = 3 \cdot 2^{(n+1)} \quad .iii$$

ו. קבעו איזו מהנוסחאות הבאות היא הנוסחה לאיבר הכללי של סדרה הנדסית שבה האיבר הראשון הוא a_1 והמנה היא q :

$$a_n = a_1 \cdot q^n \quad .i \quad a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)} \quad .ii \quad a_n = a_1 \cdot q^{(n+1)} \quad .iii$$





הנוסחה לאיבר כללי בסדרה הנדסית

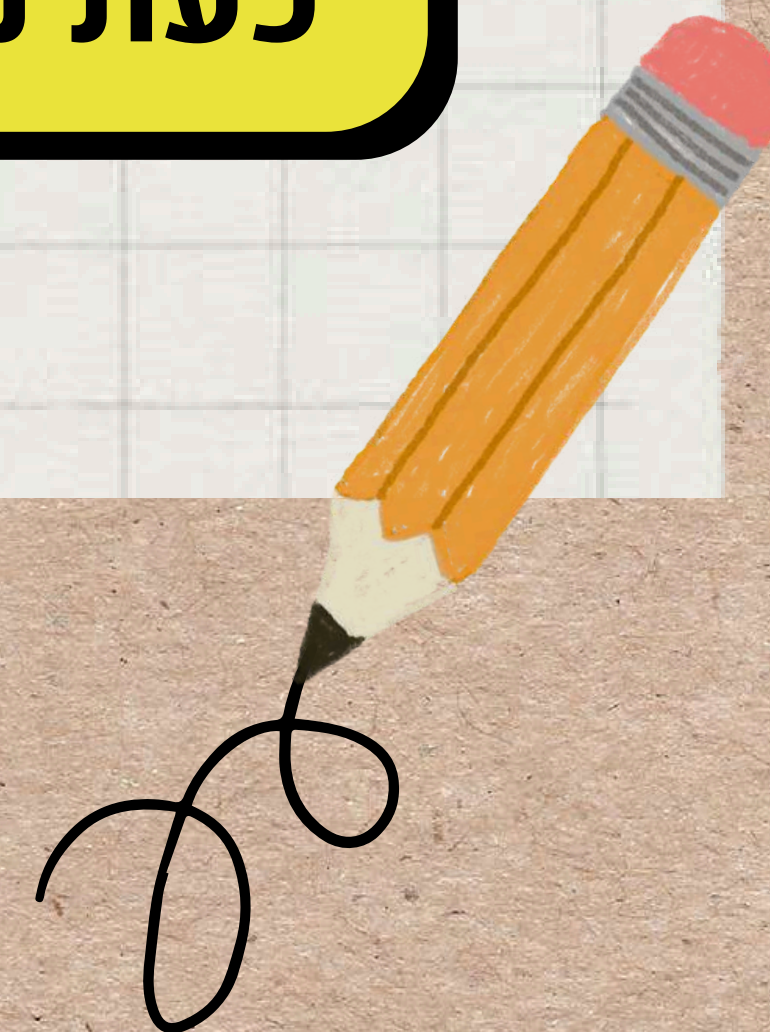
בשאלה הקודמת עסקנו בנוסחה לאיבר הכללי של סדרה הנדסית.
בסדרה הנדסית שבה האיבר הראשון הוא a_1 והמנה היא q ,
הנוסחה לאיבר הכללי היא:

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} \quad \text{לכל } n \text{ טבעי } (a \neq 0, q \neq 0).$$





כעת נוכל לפתור את תרגילים 18-24 בעמוד 188.



25. נתונה הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה הנדסית: $a_n = 7 \cdot 8^{n-1}$.

א. האם ניתן לקבוע אם הסדרה עולה או יורדת **ללא חישוב** כלשהו?
אם כן, קבעו זאת. אם לא, הסבירו מדוע.



ב. לפניכם נוסחאות לאיבר הכללי בסדרות הנדסיות. קבעו **ללא חישוב** אם הן עולות או יורדות:

3. $a_n = -5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

2. $a_n = 11 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

1. $a_n = -5 \cdot 10^{n-1}$



26. סדרה הנדסית מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_1 = -5$, $a_{n+1} = 10 \cdot a_n$.

א. האם ניתן למצוא את מנת הסדרה **ללא חישוב** כלשהו?

אם כן, מצאו אותה. אם לא, הסבירו מדוע.



ב. האם ניתן לכתוב את הנוסחה לאיבר הכללי המגדירה את הסדרה **מבלי למצוא איברים נוספים**

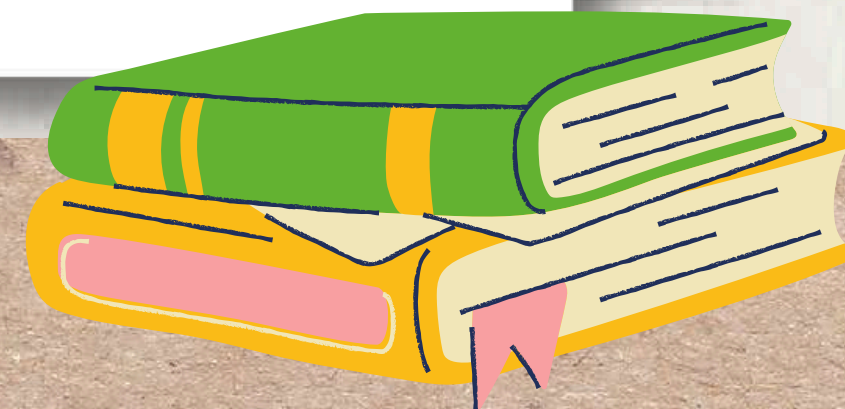
בסדרה? אם כן, כתבו אותה. אם לא, הסבירו מדוע.

ג. **ללא חישוב כלשהו**, מצאו את הנוסחה לאיבר הכללי של הסדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי

כלל הנסיגה:

2. $a_{n+1} = -5a_n$, $a_1 = -3$

1. $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$, $a_1 = -12$





דוגמה:

בסדרה הנדסית עולה האיבר הראשון הוא 3, והאיבר השביעי הוא 192.
מצאו את: א. מנת הסדרה. ב. האיבר ה-10.





פתרון:

א. נציב את הנתונים בנוסחת האיבר הכללי:

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} \rightarrow a_7 = a_1 \times q^{7-1} \rightarrow 192 = 3 \times q^6 \rightarrow q^6 = 64 \rightarrow q = \pm 2$$

נתון שהסדרה עולה, ולכן המנה המתאימה היא $q=2$.

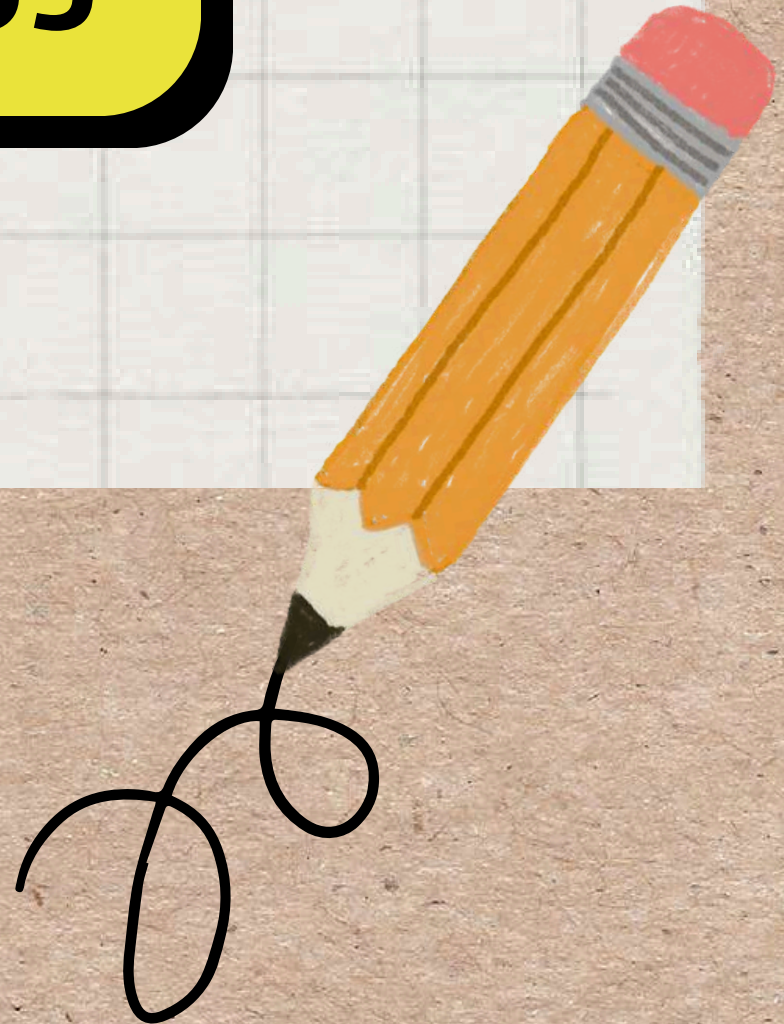
ב. כדי למצוא את האיבר העשירי נציב בנוסחה לאיבר הכללי את הערכים:

$$: n = 10, q = 3, a_1 = 3$$

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} \rightarrow a_{10} = 3 \times 2^9 \rightarrow a_{10} = 3 \times 512 \rightarrow a_{10} = 1536$$



כעת נוכל לפתור את תרגילים 27-29 בעמוד 189.





הוכחה שסדרה היא הנדסית בעזרת כלל הנסיגה

דוגמה:

סדרה הנדסית מוגדרת לכל n טבעי לפי כלל הנסיגה:
 $a_{n+1} = 4a_n$, $a_1 = 5$. הוכיחו שהסדרה הנדסית.





הוכחה שסדרה היא הנדסית בעזרת כלל הנסיגה

פתרון:

נחלק את שני האגפים בביטוי a_n , ונקבל $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$ (לכל n טבעי).

מכך נובע שהמנה בין כל שני איברים סמוכים בסדרה זו היא 4, ונוכל להסיק שהסדרה הנדסית.





הוכחה שסדרה היא הנדסית בעזרת כלל הנסיגה

לסיכום, כאשר כלל הנסיגה של סדרה הוא מהסוג:

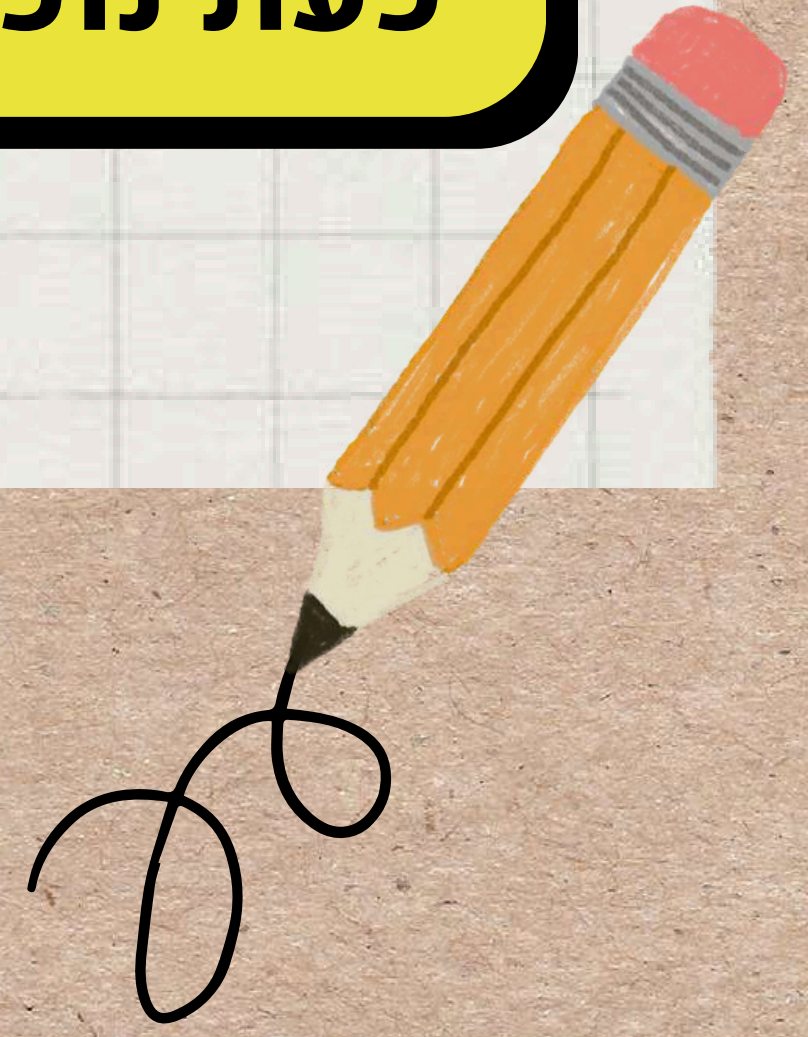
$$a_{n+1} = q \times a_n, \quad a_1 = a \quad (a \neq 0, q \neq 0) \text{ נוכל}$$

לחלק את הביטוי a_n משני האגפים, ולקבל: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ לכל n טבעי.

המשמעות היא שבסדרה זו, החל מהאיבר השני, **המנה בין כל איבר לבין האיבר שלפניו היא המספר הקבוע q ואינה תלויה ב- n .**
מכך ניתן להסיק שהסדרה הנדסית.

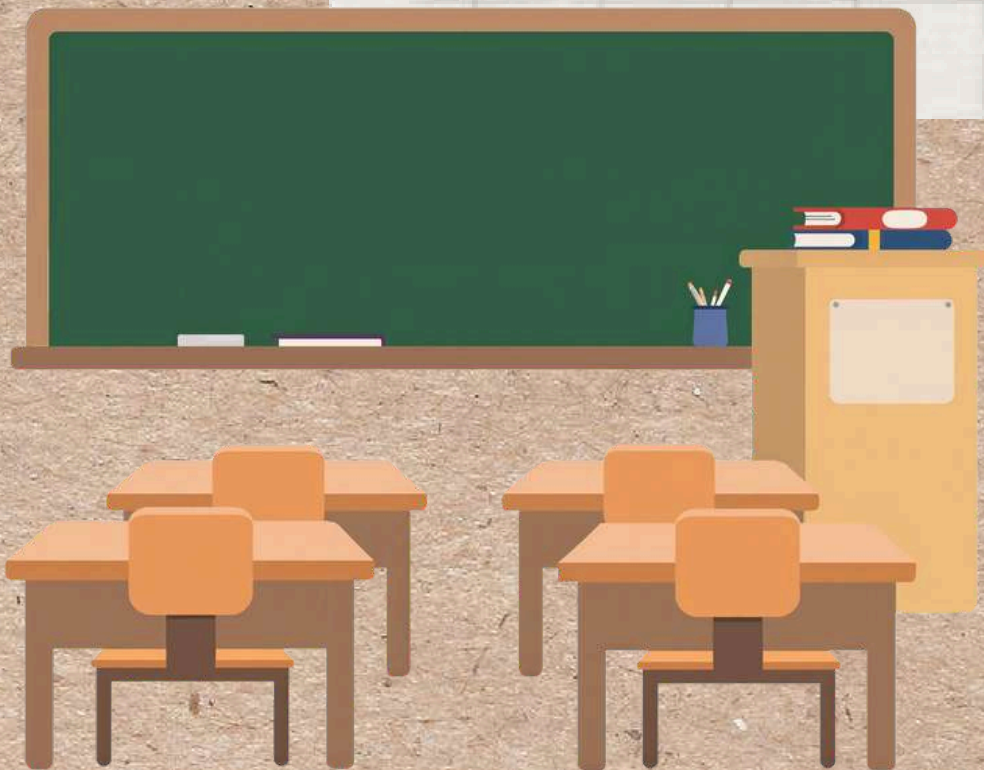


כעת נוכל לפתור את תרגילים 31-33 בעמודים 190-191.



דוגמה:

נתונה הנוסחה לאיבר הכללי של סדרה: $a_n = 7 \times 2^{n-1}$
הוכיחו שהסדרה היא הנדסית.



פתרון: כדי להוכיח שהסדרה הנדסית נראה שערך המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ קבוע לכל n טבעי ואינו תלוי ב- n . נציב את הביטוי $n+1$ במקום n בנוסחה לאיבר הכללי:

$$a_{n+1} = 7 \times 2^{(n+1)-1} = 7 \times 2^n$$

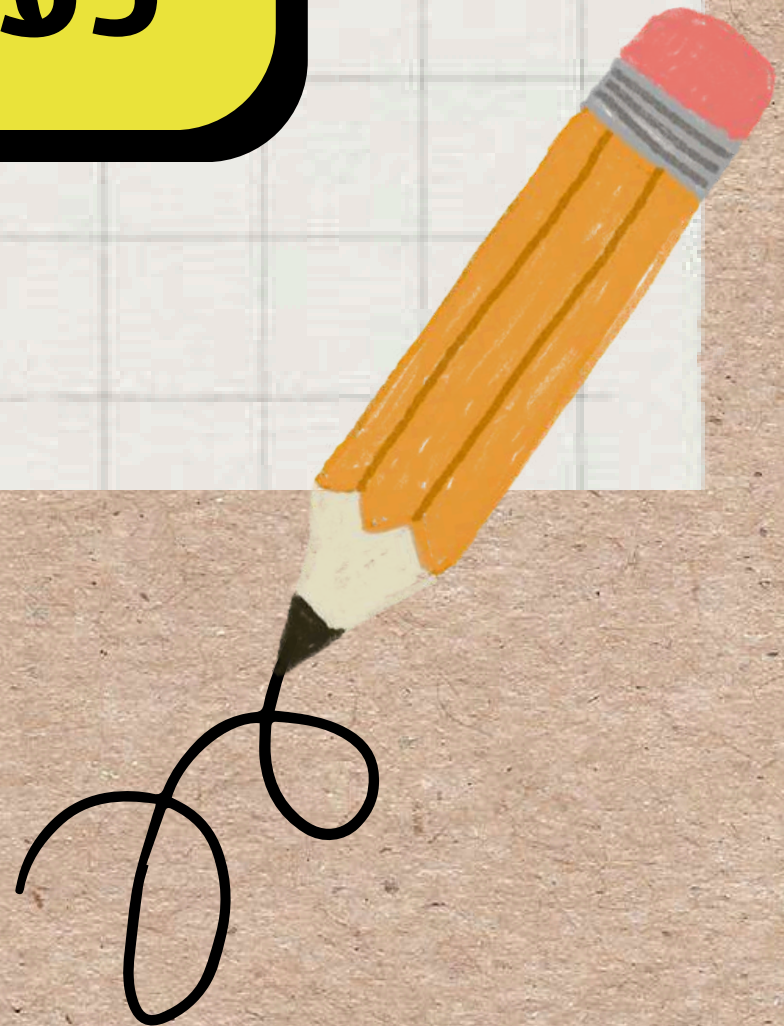
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7 \times 2^n}{7 \times 2^{n-1}} = 2^{n-(n-1)} = 2^1 = 2$$

נחשב את המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

אכן המנה קבועה ולא תלויה ב- n . לסיכום, המנה בין כל שני איברים סמוכים בסדרה זו היא המספר הקבוע 2, ולכן הסדרה הנדסית.



כעת נוכל לפתור את תרגיל 35 בעמוד 191.



36. סדרה הנדסית מוגדרת על ידי הנוסחה לאיבר הכללי: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

התלמידות התבקשו למצוא את מיקומו הסידורי של האיבר שערכו 54. צופיה טענה: "יש למצוא את



n המקיים: $2 \cdot 3^{n-1} = 54$. לאחר שנחלק את שני האגפים ב-2, תתקבל המשוואה: $3^{n-1} = 27$."

א. האם צופיה צודקת?

ב. פתרו את המשוואה, ומצאו את מיקומו הסידורי של האיבר.

36. סדרה הנדסית מוגדרת על ידי הנוסחה לאיבר הכללי: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

התלמידות התבקשו למצוא את מיקומו הסידורי של האיבר שערכו 54. צופיה טענה: "יש למצוא את



n המקיים: $2 \cdot 3^{n-1} = 54$. לאחר שנחלק את שני האגפים ב-2, תתקבל המשוואה: $3^{n-1} = 27$."

א. האם צופיה צודקת?

ב. פתרו את המשוואה, ומצאו את מיקומו הסידורי של האיבר.

האם נוכל למצוא באותה
דרך את מיקום האיבר
שערכו 118,098?





נחלק את 118,098 ב-2 מכיוון שנוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = 2 \times 3^{n-1}$.
המספר 59,049 הוא חזקה של 3 שקשה לזהות בעל פה.
במקרים כאלו ניעזר בפונקציית הלוגריתם במחשבון.

מתקבלת המשוואה: $59,049 = 3^{10}$, וכעת ניעזר בלוגריתם מבסיס 3:

נקבל: $\log_3 59,049 = 10$, ולכן: $10 = n - 1 \rightarrow n = 11$

כעת נסו למצוא את מיקומו הסידורי של האיבר שערכו 1,062,882



כעת נוכל לפתור את תרגילים 37-51 בעמודים 192-198.





עד עתה עסקנו בייצוגים של סדרה הנדסית:

1. ייצוג מילולי.

2. ייצוג אלגברי (סימבולי):

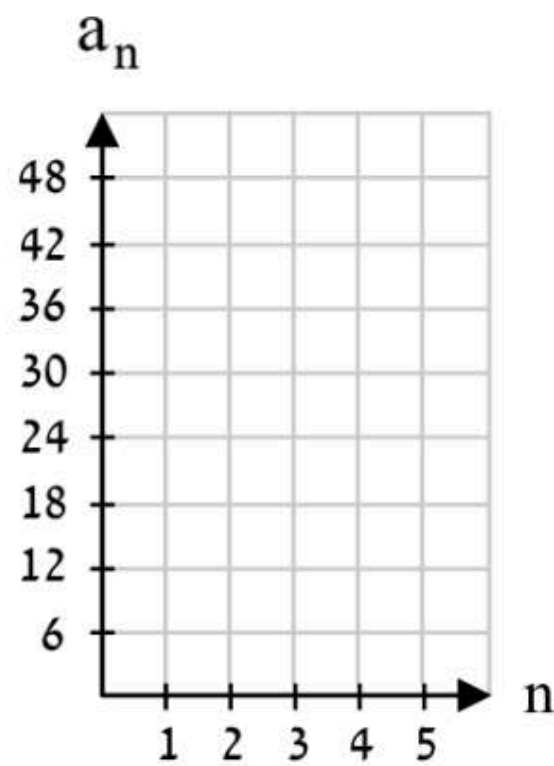
- בעזרת כלל הנסיגה.

- בעזרת הנוסחה לאיבר הכללי.

כעת נעסוק בשני ייצוגים נוספים!

ייצוג סדרה הנדסית בעזרת טבלה ובעזרת גרף

54. סדרה מוגדרת על ידי הנוסחה לאיבר הכללי $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

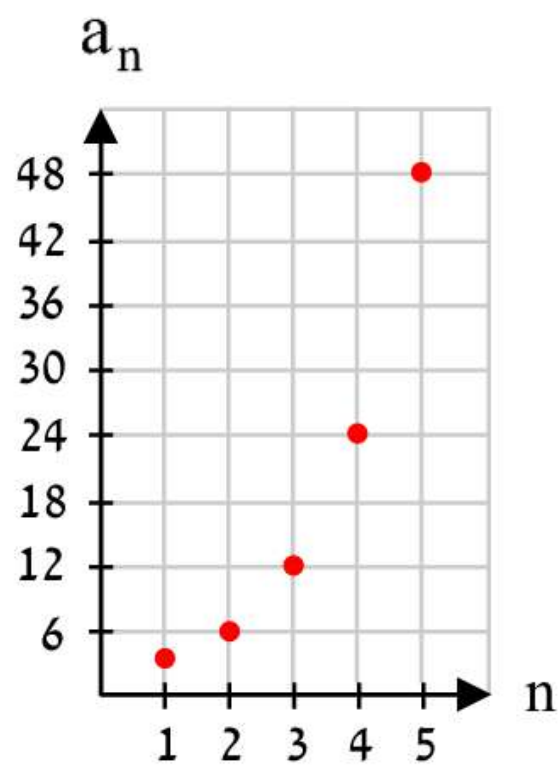


n	1	2	3	4	5
a _n					

- א. הוכיחו שהסדרה הנדסית.
- ב. הסדרה בעלת 5 איברים השלימו את הטבלה במחברת:
- ג. העתיקו את מערכת הצירים למחברת, וסמנו בה את הנקודות המייצגות את חמשת האיברים בסדרה.
- ד. האם הנקודות המייצגות את איברי הסדרה ההנדסית נמצאות על ישר כפי שמצאנו בסדרה חשבונית?



ייצוג סדרה הנדסית בעזרת טבלה ובעזרת גרף



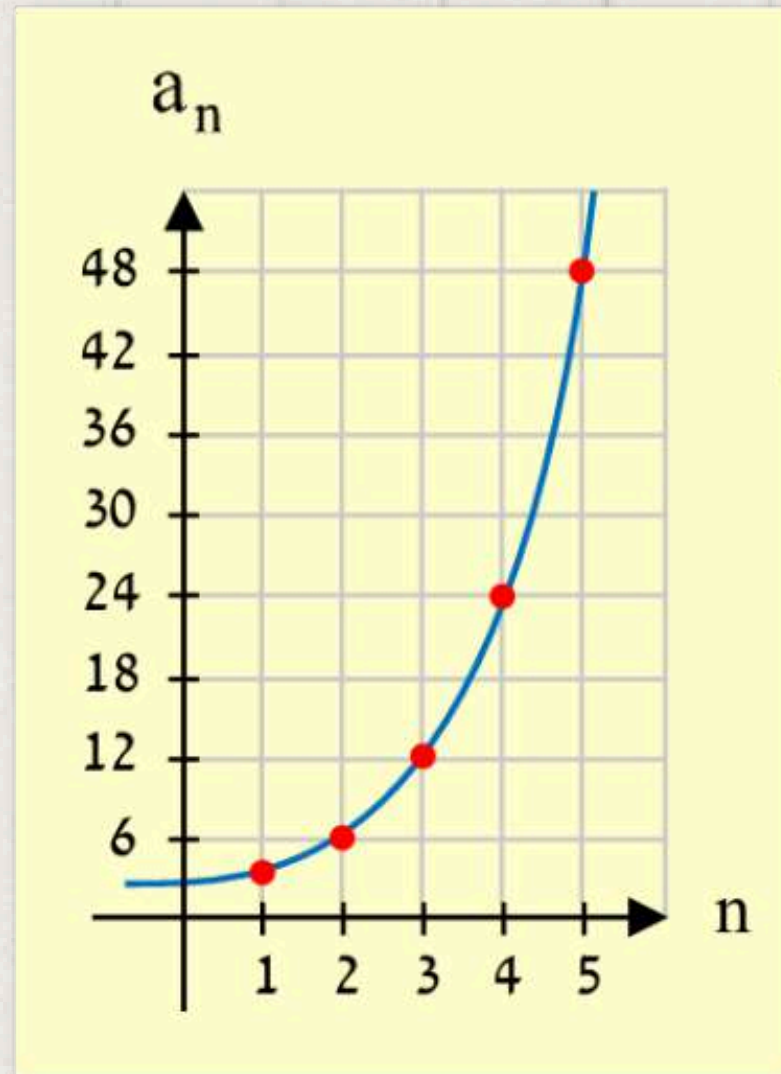
54. סדרה מוגדרת על ידי הנוסחה לאיבר הכללי $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

n	1	2	3	4	5
a_n	3	6	12	24	48

- א. הוכיחו שהסדרה הנדסית.
- ב. הסדרה בעלת 5 איברים השלימו את הטבלה במחברת:
- ג. העתיקו את מערכת הצירים למחברת, וסמנו בה את הנקודות המייצגות את חמשת האיברים בסדרה.
- ד. האם הנקודות המייצגות את איברי הסדרה ההנדסית נמצאות על ישר כפי שמצאנו בסדרה חשבונית?



הקשר בין סדרה הנדסית לבין פונקציית הגדילה המעריכית



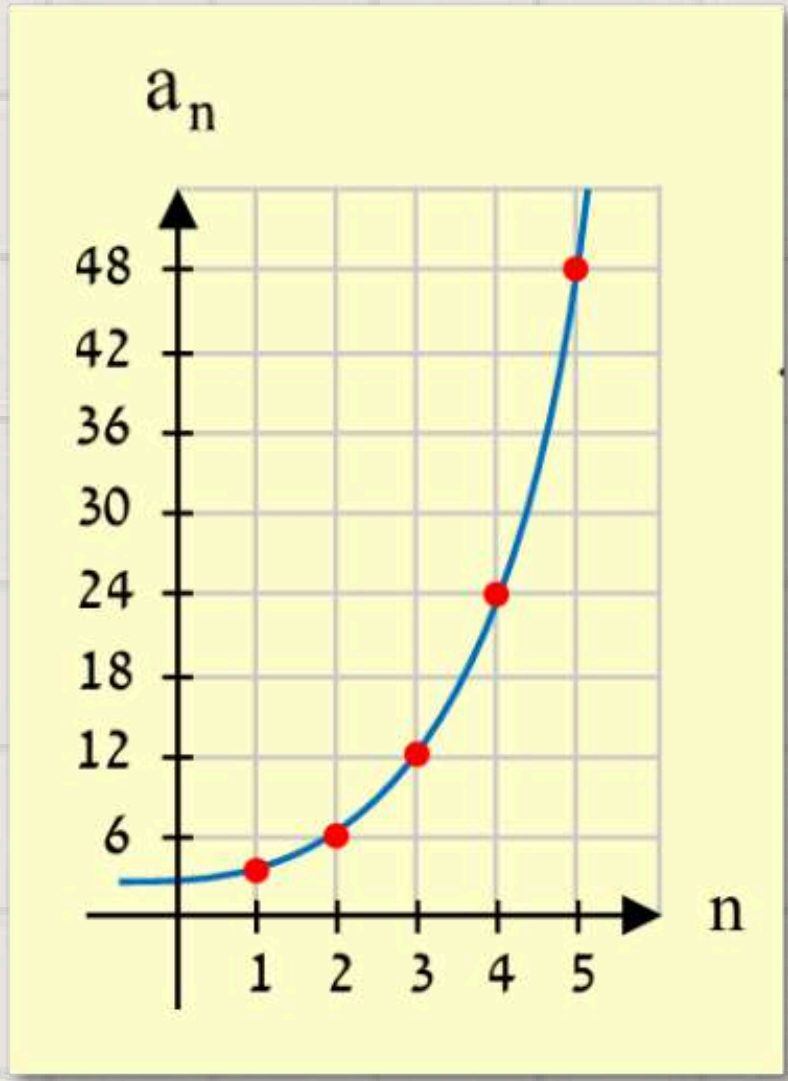
- הפונקציה המעריכית רציפה לאורך הזמן, ולכן הגרף שלה הוא **קו רציף**.
- בסדרה הנדסית רק עבור ערכי n טבעיים קיים איבר בסדרה, ולכן הייצוג הגרפי שלה הוא **גרף בדיד**.



הקשר בין סדרה הנדסית לבין פונקציית הגדילה המעריכית



- הייצוג הגרפי של סדרה הנדסית מתחיל מהערך $n=1$.
בסדרה הנדסית אין משמעות לערכי n שליליים,
ולכן אין לה ייצוג גרפי ברביע השני והשלישי.
- בשאלות גדילה ודעיכה בדקנו לעיתים את ערך
הפונקציה המעריכית עבור $t=0$ ואף עבור t שלילי.
לכן הגרף שלה עשוי להופיע גם ברביע השני.



נדגים בעזרת הייצוג הגרפי של הסדרה מהשאלה הקודמת,

שבה הנוסחה לאיבר הכללי הייתה $a_n = 3 \times 2^{n-1}$.

איברי הסדרה מיוצגים באופן גרפי על ידי הנקודות

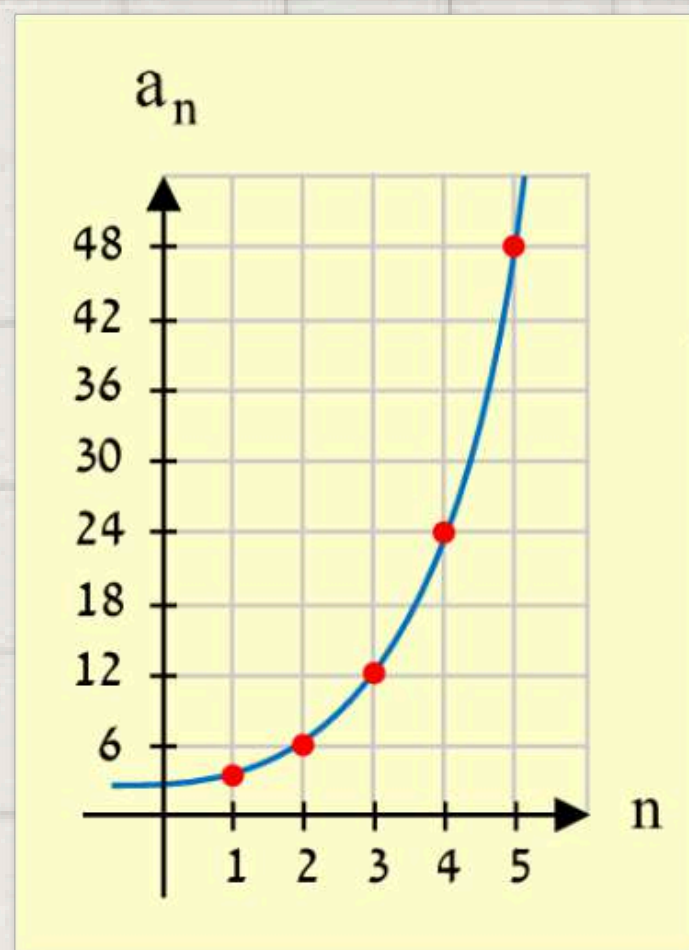
האדומות. דרך נקודות אלו עובר הגרף הרציף של

הפונקציה המעריכית $f(t) = 3 \times 2^{t-1}$ שהיא פונקציית

הגדילה המעריכית $f(t) = 3 \times 2^{t-1} = 3 \times 2^t \times \frac{1}{2} = 1.5 \times 2^t$.

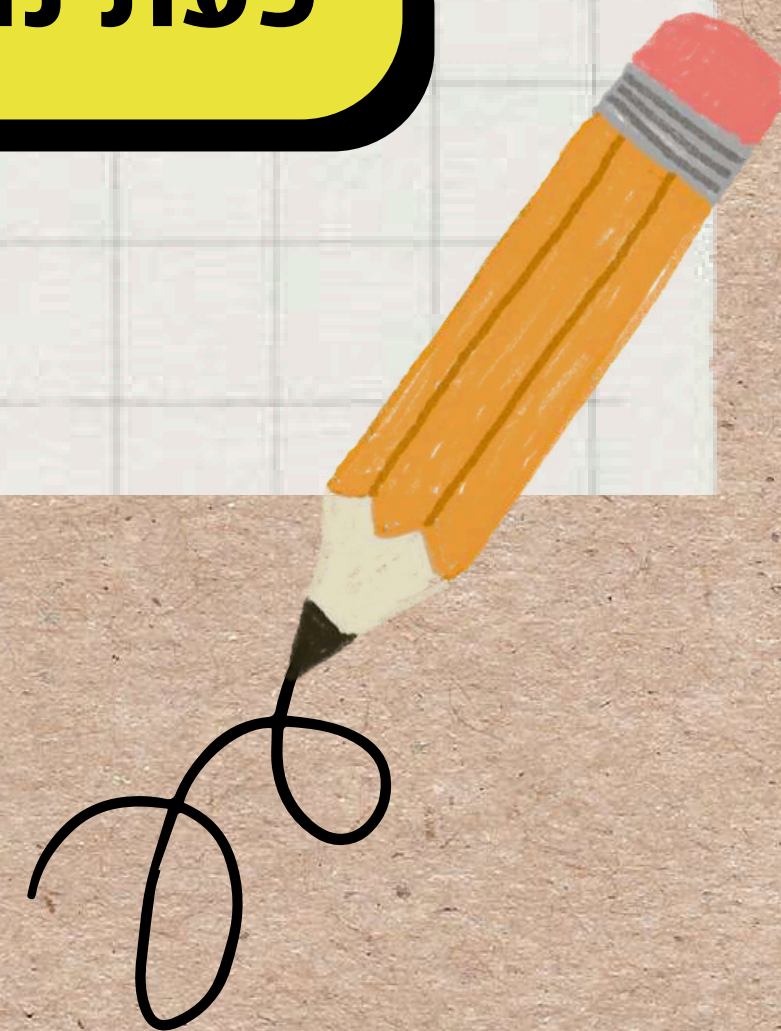
ניתן לראות, שגם הסדרה וגם פונקציית הגדילה המעריכית,

מייצגות תהליך גדילה מעריכית שבו בסיס החזקה הוא $q=2$.





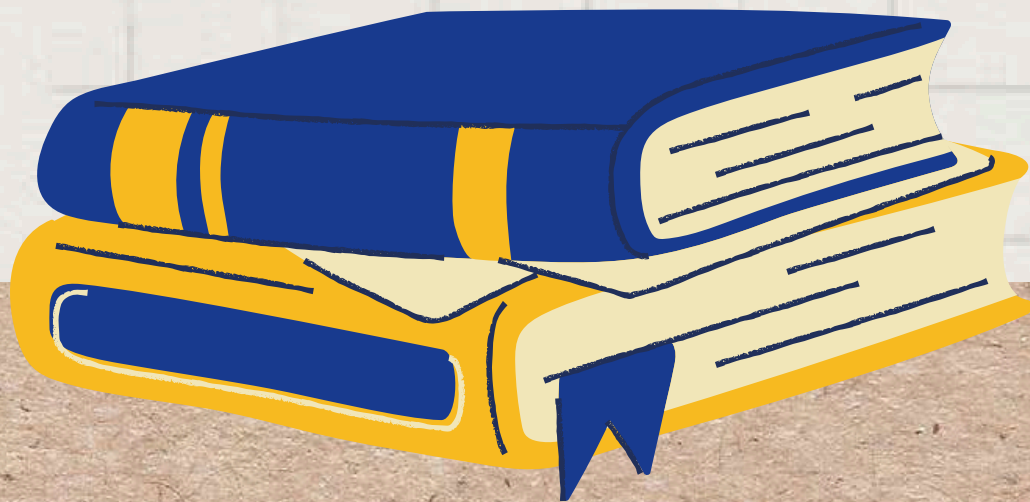
כעת נוכל לפתור את תרגילים 52-58 בעמודים 198-201.





תכונת הסדרה הנדסית

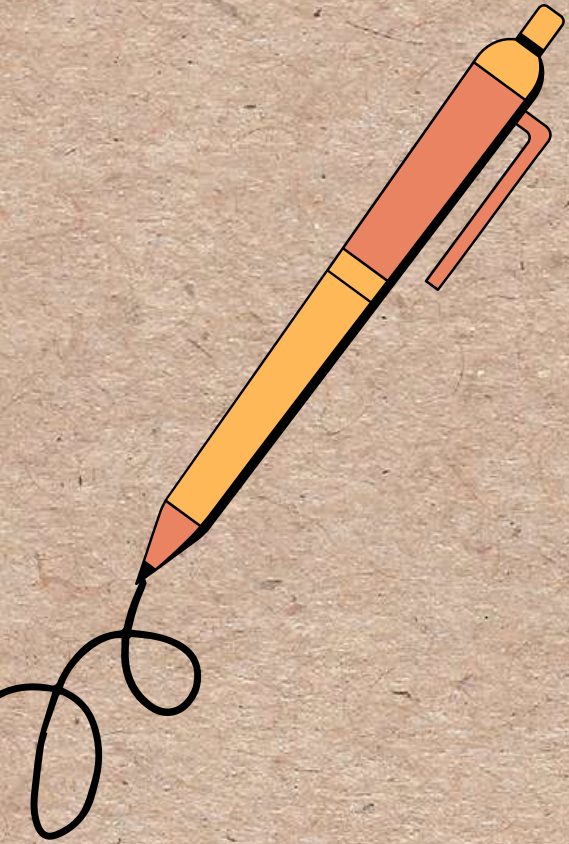
אם a, b, c הם שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית, אז מתקיימת
תכונת הסדרה הנדסית: $b^2 = ac$ המאפיינת כל סדרה הנדסית.
ערכו המוחלט של כל איבר (מלבד הראשון והאחרון) הוא **הממוצע
ההנדסי** של שני האיברים הנמצאים מצדדיו.
למעשה, מכאן מקור השם 'סדרה הנדסית'.





תכונת הסדרה ההנדסית

דוגמה: המספרים x , 6 , $9x$ מהווים סדרה הנדסית.
מצאו את הערכים האפשריים של x , ועבור כל ערך מצאו את מנת הסדרה.





תכונת הסדרה ההנדסית

דוגמה: המספרים x , 6 , $9x$ מהווים סדרה הנדסית.
מצאו את הערכים האפשריים של x , ועבור כל ערך מצאו את מנת הסדרה.

פתרון:

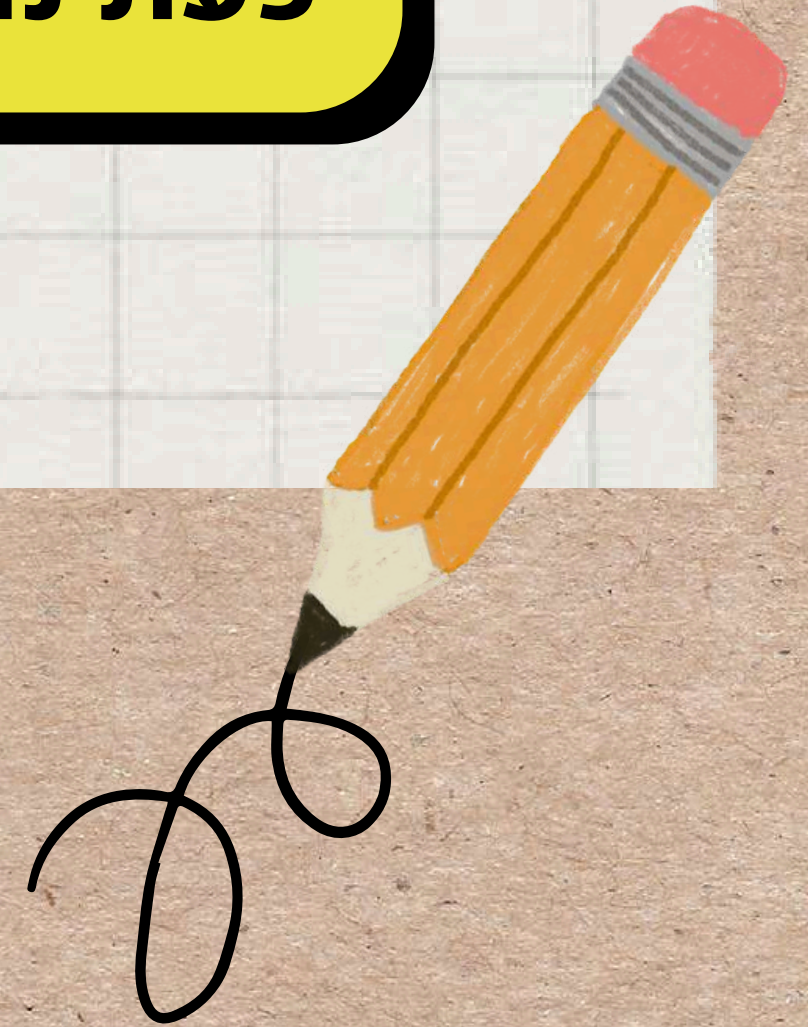
ניעזר בתכונות הסדרה ההנדסית:

$$6^2 = x \times 9x \rightarrow 36 = 9x^2 \rightarrow 4 = x^2 \rightarrow x = \pm 2$$

אם $x=2$, נקבל את המנה $q=3$, ואילו אם $x=-2$, נקבל את המנה $q=-3$.



כעת נוכל לפתור את תרגילים 60-63 בעמודים 202-203.





ארכימדס
פתרונות למידה

אסף לוי $a^1 = a$

בכיוון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472

כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק ב'

סדרה הנדסית
סדרה חשבונית
גיאומטריה במרחב (וקטורים)

$\log_a a = 1$
 $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

מהדורת 2025

הוצאת ארכימדס

שאלון 472

סדרה הנדסית

סכום





הנוסחה לחישוב סכום סדרה הנדסית

הנוסחה לחישוב סכום סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית היא:

$$S_n = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}, \quad (q \neq 1), \quad \text{נדגים כעת את השימוש בה.}$$





דוגמה:

חשבו את סכום 12 האיברים הראשונים בסדרה הנדסית שבה $a_1 = 7$ ו- $q = 2$.



דוגמה:

חשבו את סכום 12 האיברים הראשונים בסדרה הנדסית שבה $a_1 = 7$ $q = 2$.

פתרון:

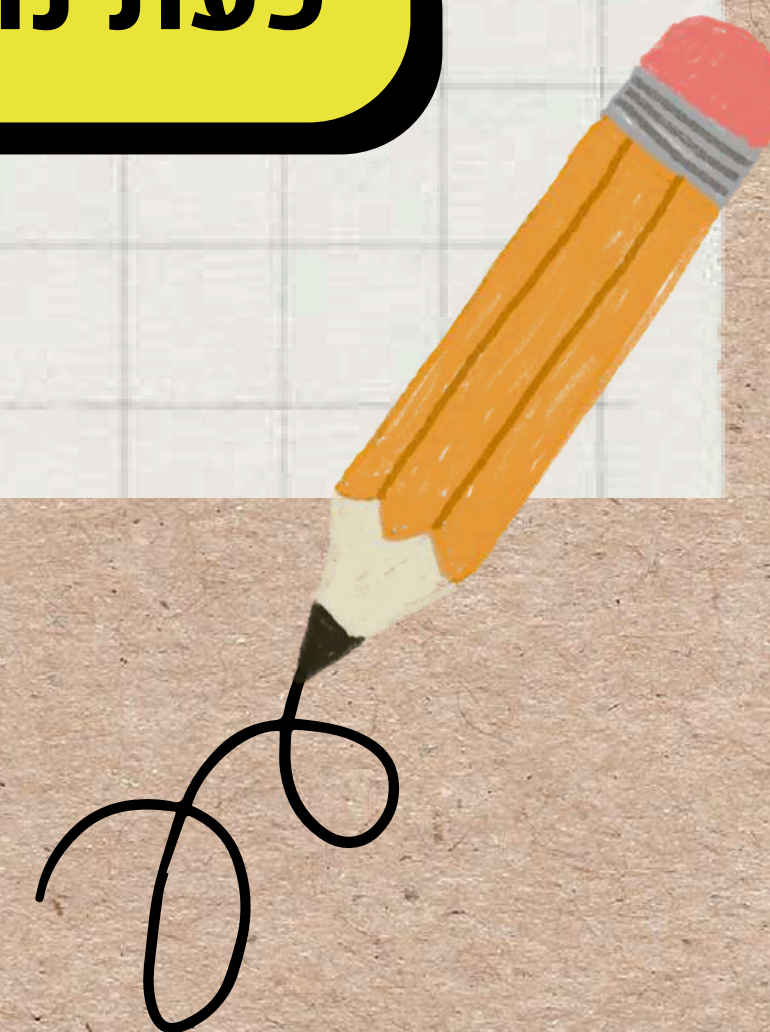
נציב $n = 12$, $q = 2$, $a_1 = 7$ בנוסחת הסכום ונקבל:

$$s_{12} = \frac{7 \times (2^{12} - 1)}{2 - 1} = \frac{7 \times (4,096 - 1)}{1} = \frac{7 \times 4,095}{1} = 28,665$$

לסיכום, סכום 12 האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית הנתונה הוא 28,665.



כעת נוכל לפתור את תרגילים 1-13 בעמודים 208-211.





הוכחה שסדרה היא הנדסית בעזרת נוסחת הסכום S_n

כאשר עסקנו בסדרה חשבונית, נעזרנו בנוסחה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה כדי למצוא את הנוסחה לאיבר הכללי, ובעזרתה הוכחנו

שהסדרה חשבונית. לשם כך הסתמכנו על הנוסחה $S_n - S_{n-1} = a_n$ המתקיימת לכל n טבעי גדול מ-1 ($n \geq 2$).

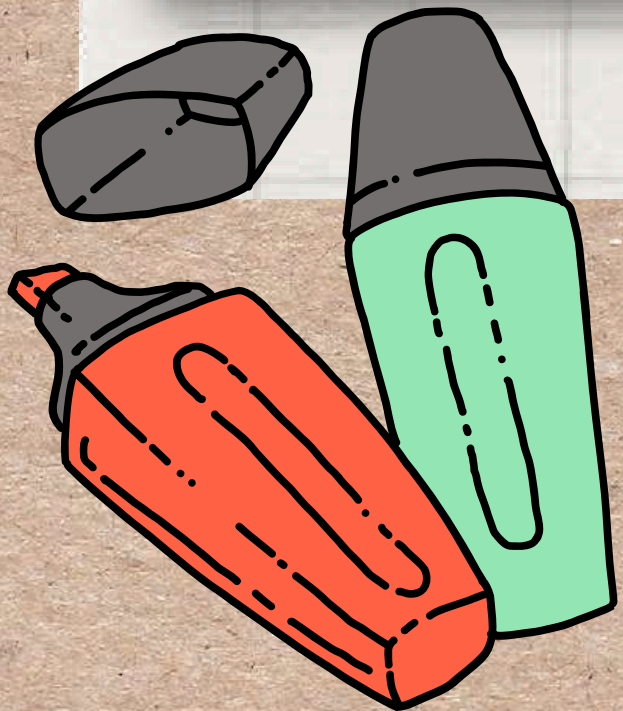
נעשה זאת כעת בהקשר של סדרה הנדסית.





S_n הוכחה שסדרה היא הנדסית בעזרת נוסחת הסכום

דוגמה: נתונה הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה $S_n = 5(4^n - 1)$.
הוכיחו שהסדרה הנדסית.





הוכחה שסדרה היא הנדסית בעזרת נוסחת הסכום S_n

פתרון: תחילה ניעזר בנוסחה $S_n - S_{n-1} = a_n$ ($2 \leq n$). כדי למצוא את הביטוי המייצג את S_{n-1}

נציב את הביטוי $n-1$ במקום n בנוסחה $S_n = 5(4^n - 1)$:

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= [5(4^n - 1)] - [5(4^{n-1} - 1)] = 5[(4^n - 1) - (4^{n-1} - 1)] = 5(4^n - 1 - 4^{n-1} + 1) \\ &= 5(4^n - 4^{n-1}) = 5(4 \cdot 4^{n-1} - 4^{n-1}) = 5(3 \cdot 4^{n-1}) = 15 \cdot 4^{n-1} \end{aligned}$$

התקבלה הנוסחה לאיבר הכללי: $a_n = 15 \cdot 4^{n-1}$. עבור $2 \leq n$. לפני שניעזר בנוסחה כדי להוכיח

שהסדרה הנדסית, יש לבדוק שהיא נכונה לכל n טבעי. כלומר, נכונה גם עבור $n = 1$.

ידוע שהאיבר הראשון בסדרה שווה ל- S_1 , ולכן נציב $n = 1$ בנוסחת האיבר הכללי $a_n = 15 \cdot 4^{n-1}$

שמצאנו וגם בנוסחת הסכום $S_n = 5(4^n - 1)$:

$$a_n = 15 \cdot 4^{n-1} \rightarrow a_1 = 15 \cdot 4^{1-1} \rightarrow a_1 = 15 \cdot 4^0 \rightarrow a_1 = 15 \cdot 1 \rightarrow a_1 = 15$$

$$S_n = 5(4^n - 1) \rightarrow S_1 = 5(4^1 - 1) \rightarrow S_1 = 5(4 - 1) \rightarrow S_1 = 5 \cdot 3 \rightarrow S_1 = 15$$



הוכחה שסדרה היא הנדסית בעזרת נוסחת הסכום S_n

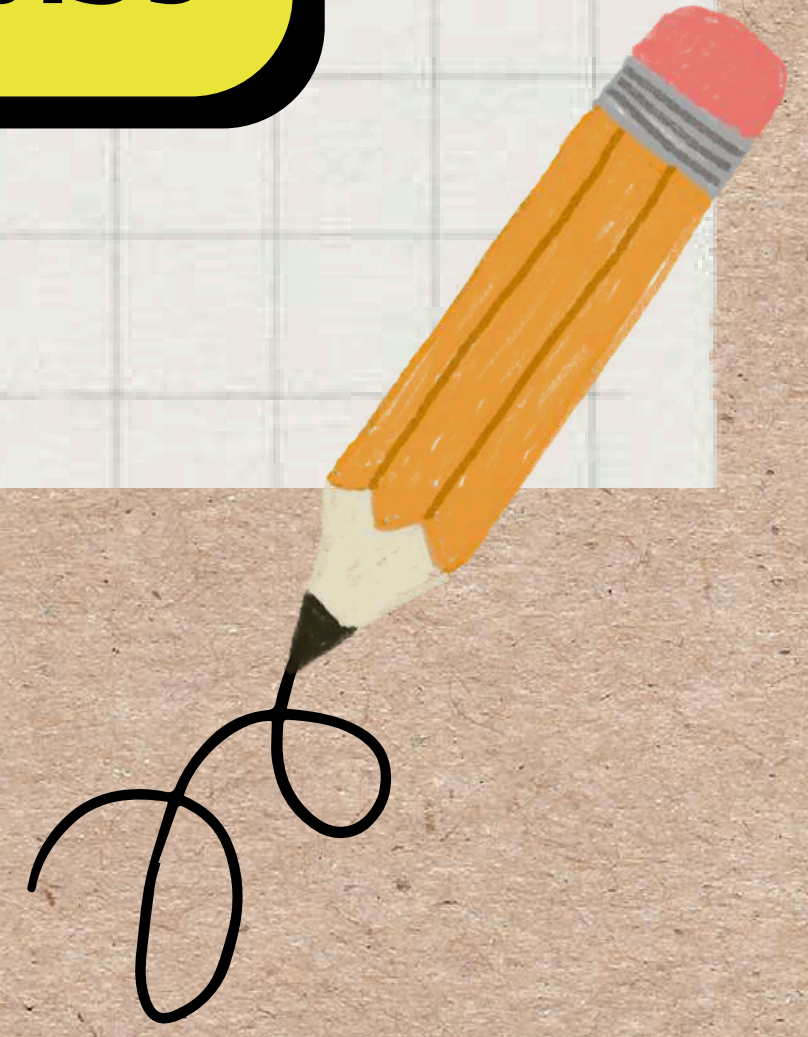
מכאן שהנוסחה $a_n = 15 \cdot 4^{n-1}$ נכונה לכל n טבעי. כדי להוכיח שהסדרה הנדסית, ניעזר בנוסחה זו, ונראה שהמנה בין כל איבר לבין האיבר שלפניו היא מספר קבוע שאינו תלוי ב- n :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{15 \cdot 4^n}{15 \cdot 4^{n-1}} = 4^{n-(n-1)} = 4^1 = 4 \quad \text{נחשב את המנה:}$$

לסיכום, הסדרה הנדסית, והמנה שלה 4.



כעת נוכל לפתור את תרגילים 14-15 בעמוד 213.

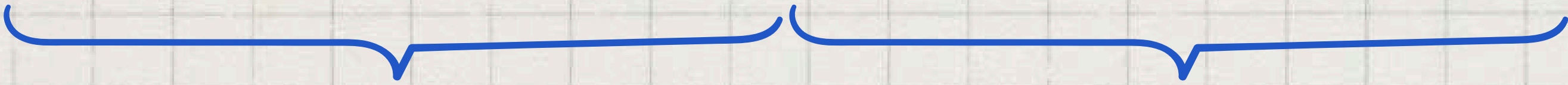




סכום האיברים האחרונים

תזכורת! עבור כל n טבעי הביטוי $2n$ הוא זוגי.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$$



n איברים ראשונים

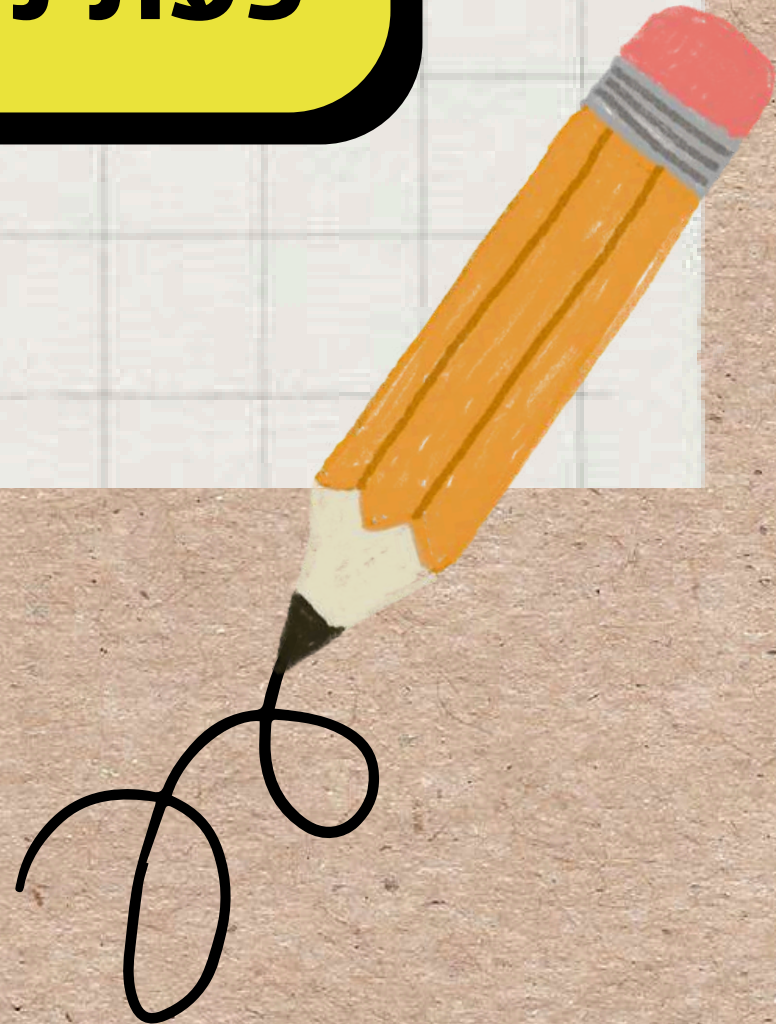
n איברים אחרונים



$2n$ איברים



כעת נוכל לפתור את תרגילים 16-20 בעמודים 213-214.



21. נתונה סדרה הנדסית בעלת 14 איברים: $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots, a_{13}, a_{14}$.

א. נתייחס לאיברים הנמצאים במקומות האיזוגיים (האדומים) כתת־סדרה בפני עצמה.

1. הסבירו מדוע תת־סדרה זו היא הנדסית, ומצאו את מנתה ואת האיבר הראשון שלה.

2. חשבו את סכום האיברים הנמצאים במקומות האיזוגיים.

ב. נתייחס לאיברים הנמצאים במקומות הזוגיים (הכחולים) כתת־סדרה בפני עצמה.

1. הסבירו מדוע תת־סדרה זו היא הנדסית, ומצאו את מנתה ואת האיבר הראשון שלה.

2. חשבו את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.





כעת נוכל לפתור את תרגילים 22-27 בעמודים 215-217.





ארכימדס
פתרונות למידה

אסף לוי $a^1 = a$

בכיוון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472

כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק ב'

סדרה הנדסית
סדרה חשבונית
גיאומטריה במרחב (וקטורים)

$\log_a a = 1$
 $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

מהדורת 2025

הוצאת ארכימדס

שאלון 472

סדרה הנדסית

אין-סופית שסכומה מתכנס





מהי סדרה הנדסית אין-סופית שסכומה מתכנס?



1. התבוננו בסדרות ההנדסיות שלפניכם, ונסו למצוא מאפיין משותף לכולן:

- i. $\dots, \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}$ ii. $\dots, 2, 4, 8$ iii. $\dots, \frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1$ iv. $\dots, -\frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, -\frac{1}{10}$



מהי סדרה הנדסית אין-סופית שסכומה מתכנס?

1. התבוננו בסדרות ההנדסיות שלפניכם, ונסו למצוא מאפיין משותף לכולן:

$$\text{i. } \dots, \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5} \quad \text{ii. } \dots, 2, 4, 8 \quad \text{iii. } \dots, \frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1 \quad \text{iv. } \dots, -\frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, -\frac{1}{10}$$

הסדרות שהופיעו בשאלה הקודמת הן סדרות הנדסיות אין-סופיות שבהן המנה q היא שבר בתחום $0 < q < 1$ או $-1 < q < 0$.

סדרות מסוג זה נקראות סדרות הנדסיות **אין-סופיות שסכומן מתכנס**.

בעזרת השאלה הבאה נבין את מקור השם.

2. נתונה הסדרה ההנדסית האינסופית: $\dots, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.

א. חשבו את הסכומים הבאים, והציגו אותם כשבר פשוט:



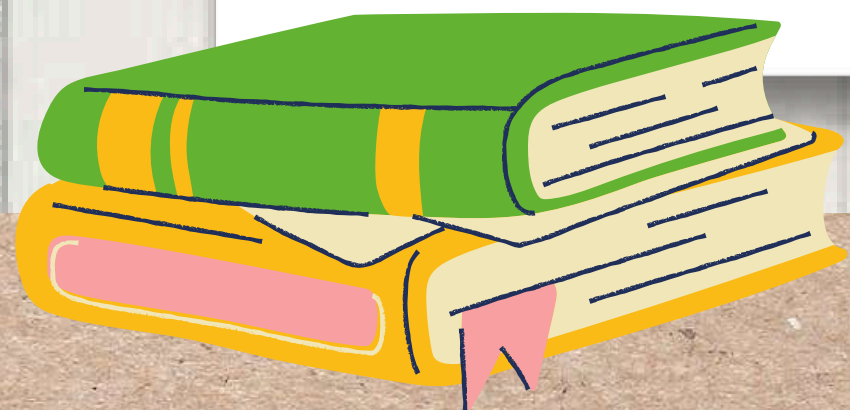
1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ 3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ 4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

ב. פז העלה השערה: "ככל שנחבר יותר איברים החל מהראשון, הסכום ילך ויתקרב ל-1".

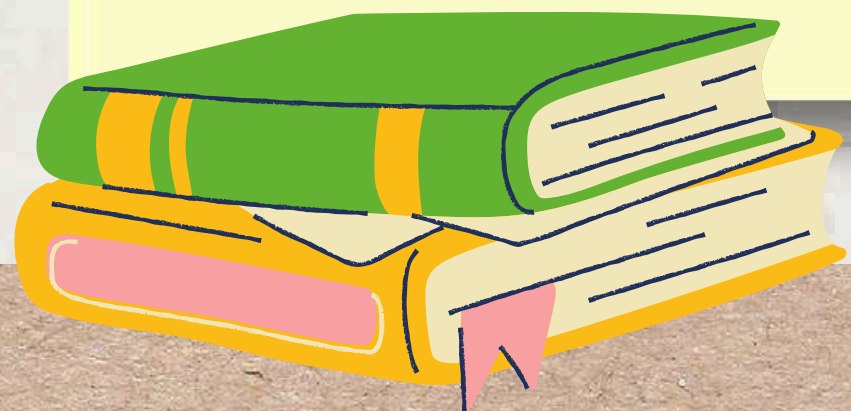
היעזרו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית, וחשבו את:

1. סכום 10 האיברים הראשונים. 2. סכום 20 האיברים הראשונים.

ג. האם הסכומים שחישבתם תומכים בהשערתו של פז?



בשאלה הקודמת עסקנו בסדרה הנדסית אינסופית, וכאשר סכמנו עוד ועוד איברים, הסכום התקרב יותר ויותר ל-1. בסדרות הנדסיות אינסופיות שבהן המנה q היא שבר בתחום $0 < q < 1$ או $-1 < q < 0$, ככל שנסכום יותר איברים החל מהאיבר הראשון, סכום הסדרה ילך ויתקרב למספר סופי כלשהו. נהוג לומר שסכום הסדרה **מתכנס** למספר סופי, וזהו מקור השם של הסדרה. בסדרות אלו אף נוכל לחשב את סכום הסדרה למרות שהיא אינסופית.





נוכל לחשב את סכומה של סדרה הנדסית אינסופית שבה המנה q היא שבר בתחום $0 < q < 1$ או

$$-1 < q < 0, \text{ והאיבר הראשון הוא } a_1, \text{ בעזרת הנוסחה: } S = \frac{a_1}{1-q}$$

מכיוון שהסדרה אינסופית, לא נסמן את סכומה בעזרת הביטוי S_n , אלא בעזרת האות S בלבד.

נחשב בעזרת נוסחה זו את סכום הסדרה שהופיעה בשאלה הקודמת: $\dots, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.

נציב בנוסחת הסכום את האיבר הראשון $a_1 = \frac{1}{2}$ ואת המנה $q = \frac{1}{2}$, ונקבל:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow S = 1$$

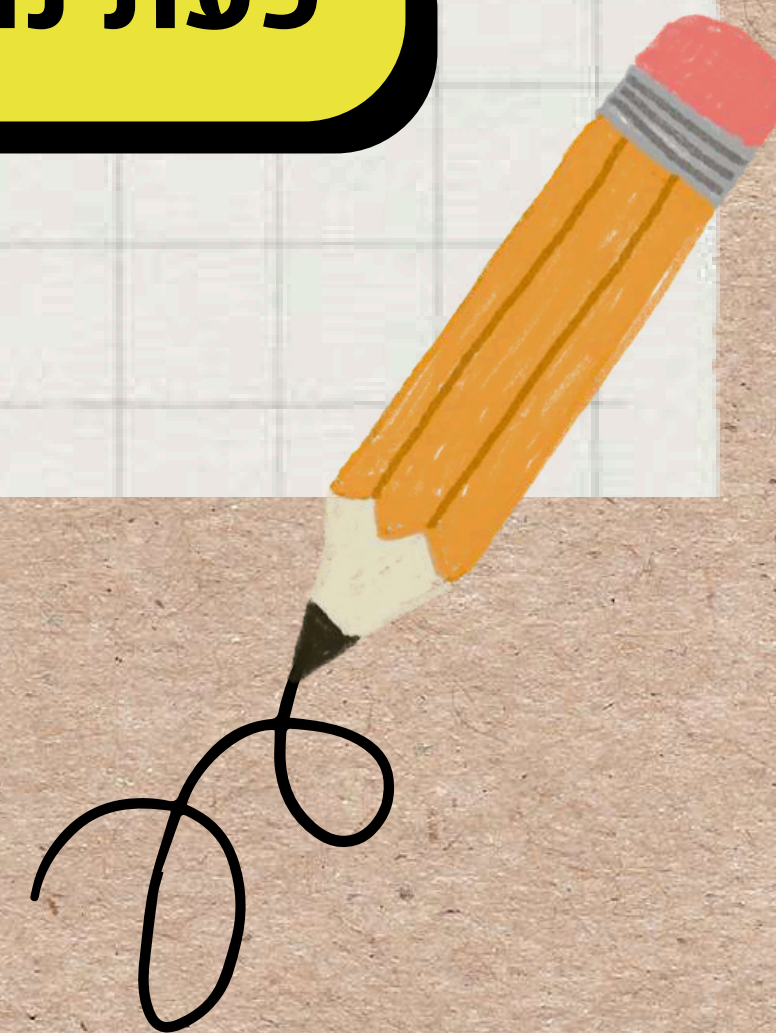
מצאנו שסכום הסדרה הוא 1. למעשה, השערותו של פז הייתה נכונה:

ככל שנחבר יותר איברים החל מהראשון, הסכום ילך ויתקרב ל-1.





כעת נוכל לפתור את תרגילים 21-3 בעמודים 224-220.





שימו לב!

- שאלות המשלבות סדרה הנדסית וסדרה חשבונית מופיעות בעמודים 226-229.
- שאלות סיכום בנושא סדרות מופיעות בעמודים 230-238.





למרחב ההוראה לחצו כאן

במרחב ההוראה מאות דפי תרגול, וביניהם בחינות מתכונת. המרחב מיועד לצוותי הוראה במוסדות לימוד אשר רכשו את הספר.



למי לפנות?

לשאלות לארכימדס:

במספר 050-9074007 של הוצאת ארכימדס

להזמנות מרובזות - פונים ל- "יש הפצות":

טלפון 03-5595354 או ווטסאפ 054-7154211