
ארכימדס
אסף לוי
בכיוון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472
כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק א'
הוצאת ארכימדס
שאלון 472
הפונקציה המעריכית e^x
אינטגרל

הוצאת ארכימדס

שאלון 472

הפונקציה המעריכית e^x

אינטגרל

האינטגרל הלא מסוים

למדנו שפעולת חישוב האינטגרל, הנקראת '**אינטגרציה**', היא הפעולה **ההפוכה** לפעולת הגזירה. נחזור כעת על הגדרות שעסקנו בהן.

נתחיל בהגדרה של **פונקציה קדומה**:

הפונקציה $F\left(x\right)$ היא **פונקציה קדומה** לפונקציה $f\left(x\right)$ בתחום מסוים אם לכל x בתחום מתקיים: $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$. לדוגמה, אם נגזור את פונקציית הפולינום $F\left(x\right)=x^3$ תתקבל פונקציית הנגזרת $F'\left(x\right)=3x^2$.

הפונקציה $F\left(x\right)=x^3$ היא **פונקציה קדומה** לפונקציה $F'\left(x\right)=3x^2$.

האינטגרל הלא מסוים

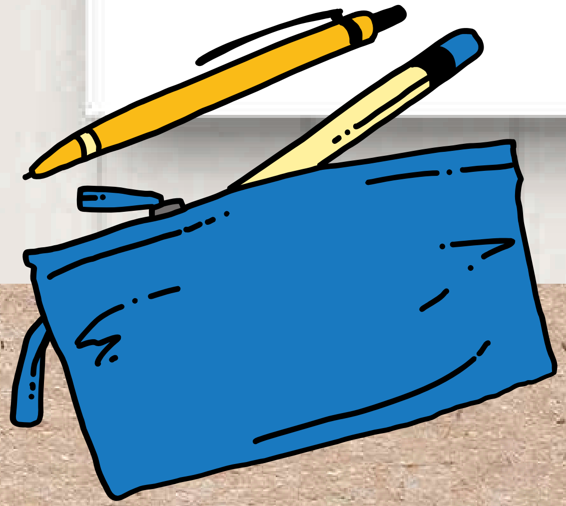
1. נתונות הפונקציות $f(x)=e^{2x}$ ו- $g(x)=2e^{2x}$ המוגדרות לכל x.

יהודה טען: "הפונקציה $f(x)=e^{2x}$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $g(x)=2e^{2x}$."

אייל טען: "הפונקציה $g(x)=2e^{2x}$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)=e^{2x}$."

דניאל טען: "לא ניתן לקבוע איזו משתי הפונקציות היא פונקציה קדומה לפונקציה האחרת."

מי מהם צודק? הסבירו.



האינטגרל הלא מסוים

כפי שלמדנו, כל הפונקציות הקדומות לפונקציה $F(x)$ נקראות האינטגרל הלא מסוים של הפונקציה $f(x)$.

נזכיר שהאינטגרל הלא מסוים של הפונקציה מסומן כך: $\int f(x)dx$

האינטגרל הלא מסוים

נתבונן בשלוש הפונקציות: $y = e^{3x} + 1$, $y = e^{3x} + 9$, $y = e^{3x} - 8$.

לשלושתן יש את **הנגזרת** $y' = 3e^{3x}$. יש עוד אין־סוף פונקציות אשר מתקבלות מהזזה אנכית כלפי מטה או כלפי מעלה זו של זו, והנגזרת של כולן היא $y' = 3e^{3x}$. לכן כאשר נבצע אינטגרציה לנגזרת זו, לא נקבל פונקציה יחידה אלא משפחת פונקציות שאותה נסמן בעזרת קבוע האינטגרציה c שבו עסקנו בשנה שעברה.

נקבל: $\int 3e^{3x}dx = e^{3x} + c$.

הפונקציה הקדומה

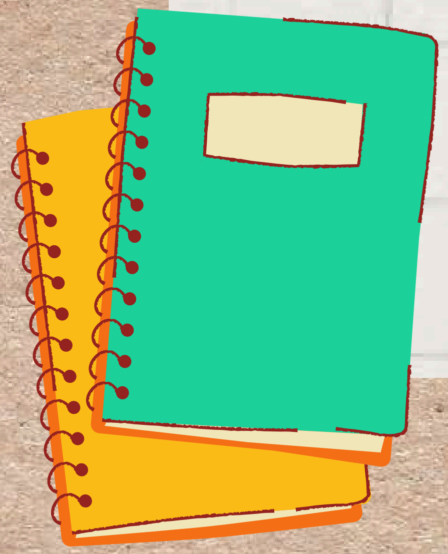
באופן כללי, עבור פונקציה **קדומה** לפונקציה נוכל לכתוב:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

נשים לב שקבוע האינטגרציה c יכול לקבל **כל** ערך מספרי.

האינטגרל הלא מסוים של הפונקציה שעסקנו בה קודם הוא:

$$\int 3e^{3x}dx = e^{3x} + c$$



חוקי האינטגרציה

חוקי האינטגרציה שלמדנו חלים על כל פונקציה שיש לה פונקציה קדומה:

אינטגרל של **מספר קבוע:**

$$\int kdx = kx + c$$

אינטגרל של **פונקציית חזקה:**

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + e$$

אינטגרל של פונקציה שהוכפלה **במספר קבוע:**

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

אינטגרל של **סכום והפרש פונקציות:**

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

דוגמאות למציאת פונקציה קדומה:

$$\int 5e^x dx = 5\int e^x dx = 5e^x + c$$

$$\int (3x^2 - 2e^x)dx = 3\left(\frac{x^3}{3}\right) - 2e^x + c = x^3 - 2e^x + c$$

מנקודה זו והלאה, לאחר הסברים, המצגת מפנה לתרגול בכרך א' של הספר בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472:

כעת נוכל לפתור את תרגילים 3-4 בעמוד 176.

אינטגרציה לביטוי מעריכי ליניארי

כעת נציג כלל אינטגרציה נוסף: $\int e^{mx+b}dx=\frac{e^{mx+b}}{m}+c$.

נדגיש שכלל זה מתאים כאשר החזקה היא **ביטוי ליניארי**.

נדגים בעזרת הפונקציות: $f\left(x\right)=e^{7x+6}$, $g\left(x\right)=3e^{-2x+9}$:

$$\int e^{e+6}dx=\frac{e^{7x+6}}{7}+c$$

$$\int 3e^{-2x+9}dx=3\int e^{-2x+9}dx=3\left(\frac{e^{-2x+9}}{-2}\right)+c=-\frac{3e^{-2x+9}}{2}+c$$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 5-6 בעמוד 177.

מציאת הפונקציה הקדומה

בשאלה הקודמת עסקנו במציאת פונקציה **קדומה יחידה**.
לאחר אינטגרציה נקבל ייצוג כללי של **משפחת פונקציות קדומות**.
אם נרצה למצוא פונקציה קדומה **יחידה**, נזדקק לשיעורי נקודה
הנמצאת על הגרף של פונקציה קדומה זו, ובעזרתם נמצא את ערך c
המתאים לאותה פונקציה קדומה **יחידה**.

מציאת הפונקציה הקדומה

דוגמה: נתונה הנגזרת $f'(x) = 2e^{2x-4}$. נתון: $f(2) = 6$.

מצאו את הפונקציה הקדומה .

מציאת הפונקציה הקדומה

דוגמה: נתונה הנגזרת $f'(x) = 2e^{2x-4}$. נתון: $f(2) = 6$.

מצאו את הפונקציה הקדומה .

פתרון: נמצא את האינטגרל הלא מסוים:

$$\int \left(2e^{x-4}\right)dx \to f(x) = \frac{2e^{2x-4}}{2} + c = e^{2x-4} + c$$

נציב את הנתון $f(2) = 6$ בפונקציה:

$$f(2) = e^{2\times2-4} + c = 6 \to e^{0} + c = 6 \to 1 + c = 6 \to c = 5$$

לסיכום, הפונקציה הקדומה היא: $f(x) = e^{2x-4} + 5$.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 2-8 בעמודים 179-180.

תזכורת! מהו האינטגרל המסוים?

כאשר הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום: $a \le x \le b$, והפונקציה היא פונקציה קדומה שלה, ההפרש $F(b) - F(a)$ נקרא האינטגרל המסוים של הפונקציה $f(x)$ בתחום: $a \le x \le b$. בכתיב מתמטי נציג זאת כך:

$$\int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$ עבור $a \le x \le b$.

הקבוע c מתבטל בפעולת החיסור, ולכן אינו מופיע באינטגרל המסוים.

חישוב אינטגרל מסוים

דוגמה: חשבו את האינטגרל המסוים: $\int_0^2 e^{-x+2}dx$.

חישוב אינטגרל מסוים

דוגמה: חשבו את האינטגרל המסוים: $\int_0^2 e^{-x+2}dx$.

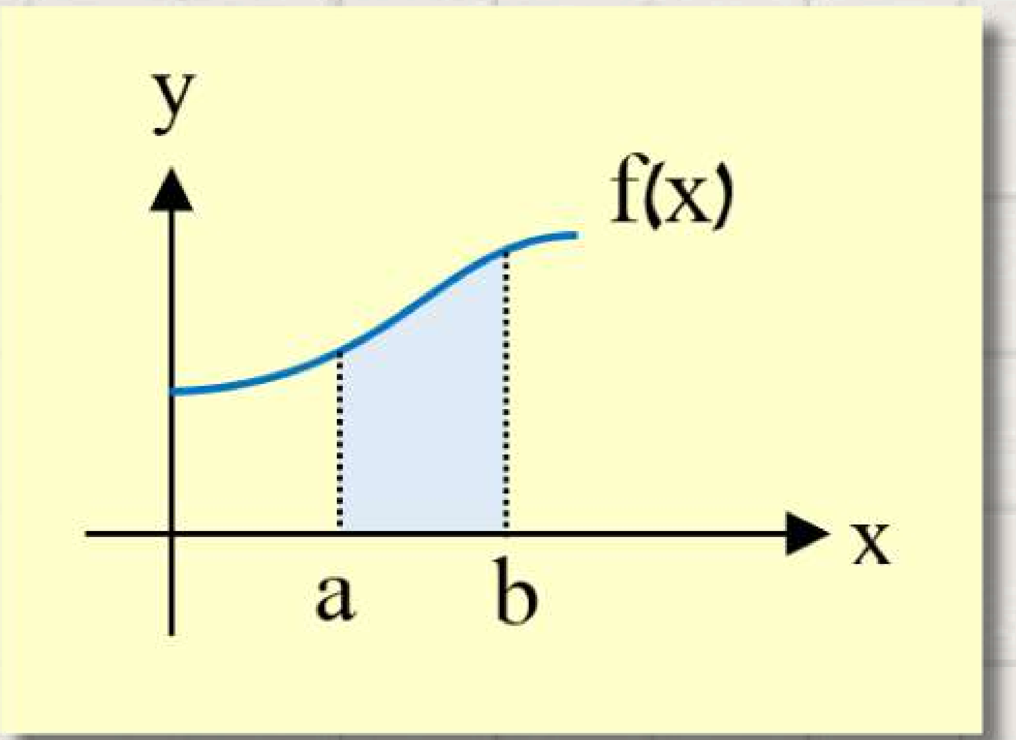
פתרון:

$$\int_0^2 e^{-x+2}dx = \left[-e^{-x+2}\right]_0^2 = -e^{-2+2} - \left(-e^{-0+2}\right) = -e^0 + e^2 = -1 + e^2$$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 9-10 בעמודים 180-181.

חישוב שטחים בעזרת אינטגרל

נתבונן בשרטוט משמאל, שבו השטח הכחול מוגבל מלמעלה על ידי גרף הפונקציה , מלמטה על ידי ציר ה־x ומהצדדים על ידי הישרים $x = a$ ו־$x = b$.

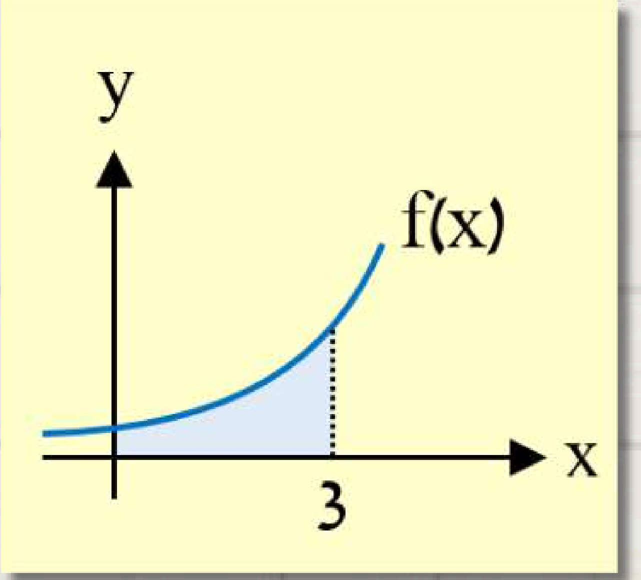


במקרה כזה, כאשר הפונקציה אי־שלילית בתחום $a \le x \le b$, השטח שווה לאינטגרל המסוים: $S = \int_a^b f(x)dx$.

דוגמה:

חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

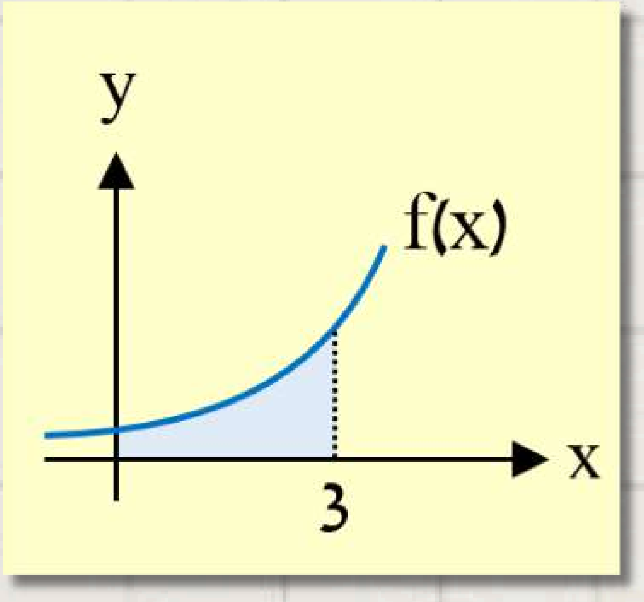
$f(x) = e^x$, על ידי הישר $x = 3$ ועל ידי הצירים.



דוגמה:

חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

$f\left(x\right)=e^{x}$, על ידי הישר $x=3$ ועל ידי הצירים.



פתרון:

נבצע אינטגרציה לפי $S=\int_{a}^{b} f\left(x\right)d$ ונקבל:

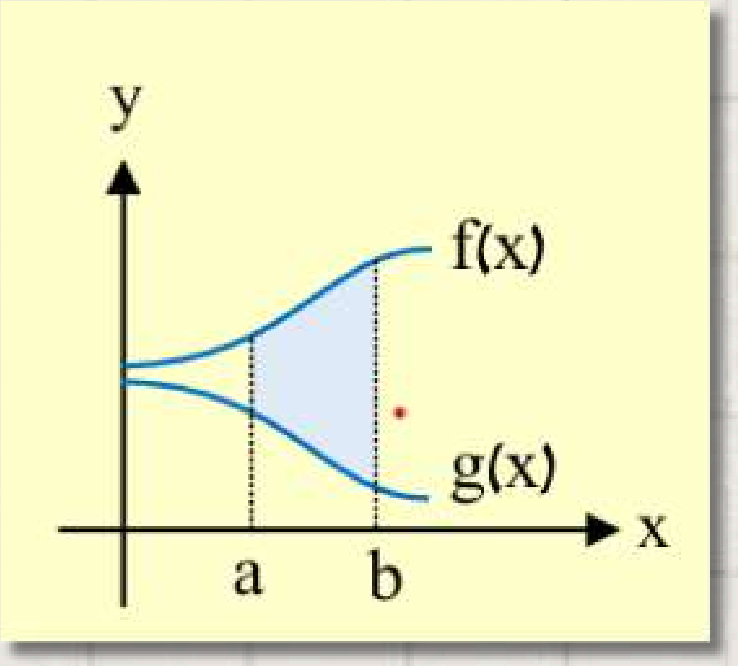
$$S=\int_{0}^{3} e^{x}dx=\left[e^{x}\right]_{0}^{3}=e^{3}-e^{0}=e^{3}-1=19.086$$

השטח הוא 19.086 יח"ר.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 3-1 בעמוד 182.

שטח המוגבל על ידי גרפים של שתי פונקציות

בשרטוט משמאל השטח הכחול מוגבל מלמעלה על ידי גרף הפונקציה $f\left(x\right)$, מלמטה על ידי גרף הפונקציה $g\left(x\right)$ ומהצדדים על ידי הישרים $x=a$ ו־ $x=b$.



בשנה שעברה למדנו שבמקרים מסוג זה, כאשר מתקיים: $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ נחשב את השטח בעזרת הנוסחה:

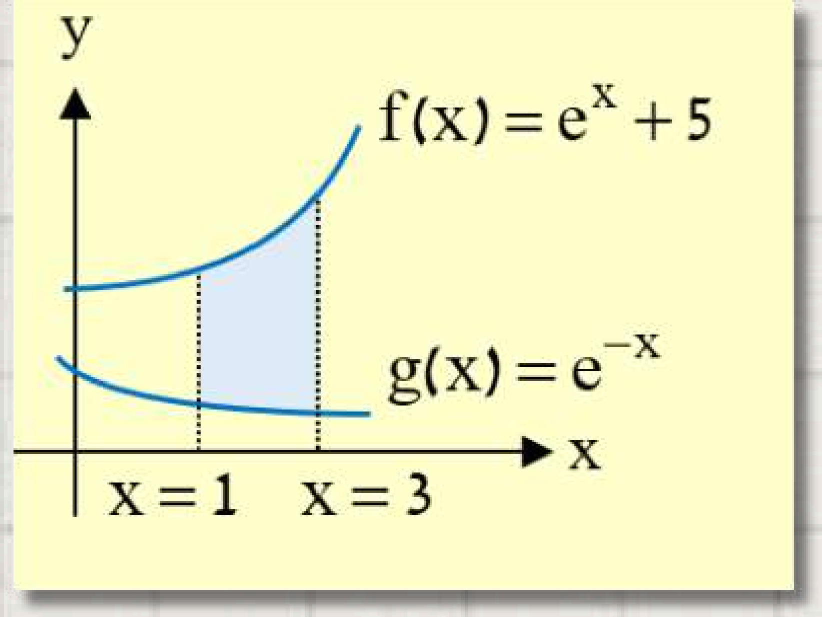
$$S=\int_{a}^{b}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx$$

הפונקציה המגבילה את השטח **מלמעלה**, תופיע **משמאל** בנוסחה.

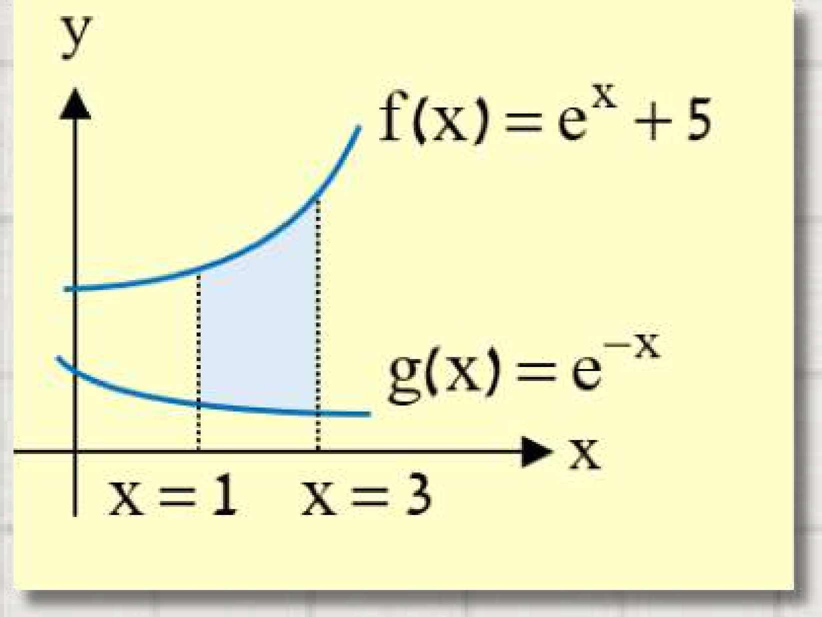
שטח המוגבל על ידי גרפים של שתי פונקציות

דוגמה:

חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרפים של
הפונקציות $f\left(x\right)=e^{x}+5$ ו- $g\left(x\right)=e^{-x}$,
על ידי הישר $x=3$ ועל ידי הישר $x=1$.



שטח המוגבל על ידי גרפים של שתי פונקציות



דוגמה:

חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f\left(x\right)=e^{x}+5$ ו- $g\left(x\right)=e^{-x}$, על ידי הישר $x=3$ ועל ידי הישר $x=1$.

פתרון:

נציב בנוסחה: $S=\int_{a}^{b}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx$

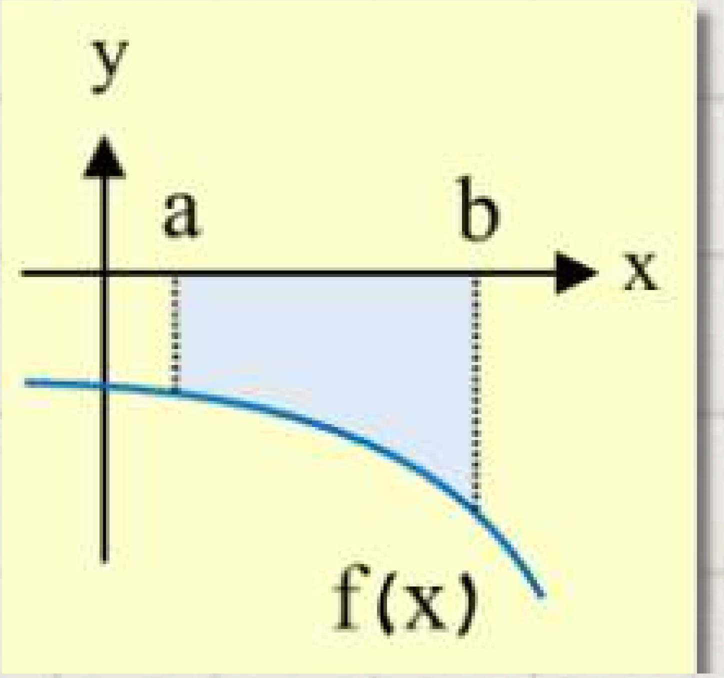
$$S=\int_{1}^{3}\left(e^{x}+5x+e^{-x}\right)dx=\left[e^{x}+5x+e^{-x}\right]_{1}^{3}=\left(e^{3}+5\left(3\right)+e^{-3}\right)-\left(e^{1}+5\left(1\right)+e^{-1}\right)$$

$$=\left(35.135\right)-\left(8.086\right)=27.049$$

השטח הוא 27.049 יח"ר.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 4-6 בעמודים 183-184.

חישוב שטח הנמצא מתחת לציר ה-X



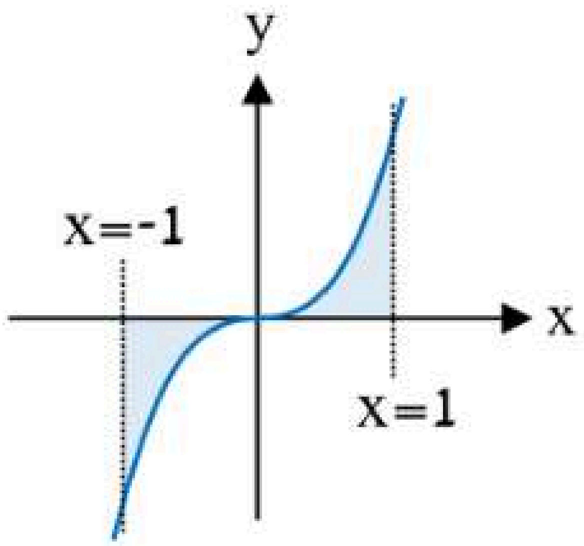
בשרטוט משמאל השטח האפור מוגבל מלמטה על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, מלמעלה על ידי ציר ה־x שהוא הפונקציה $y=0$, ומהצדדים על ידי הישרים $x=a$ ו־ $x=b$. בנוסחה לחישוב שטח, ונקבל:

$$S=\int_a^b (0-f(x))dx=\int_a^b (-f(x))dx=-\int_a^b f(x)dx$$

כלומר, כאשר הפונקציה היא שלילית בתחום $a \le x \le b$, כמו במקרה זה, נחשב שטח שמתחת לציר ה־x, בעזרת הנוסחה $S=-\int_a^b f(x)dx$.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 7-8 בעמוד 184.

9. לפניכם גרף הפונקציה: $f(x)=e^{2x}-e^{-2x}$.



א. הראו שהפונקציה $f(x)$ היא אי־זוגית.

ב. חשבו את השטח המוגבל ברביע הראשון על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר $x=1$ ועל ידי ציר ה־x.

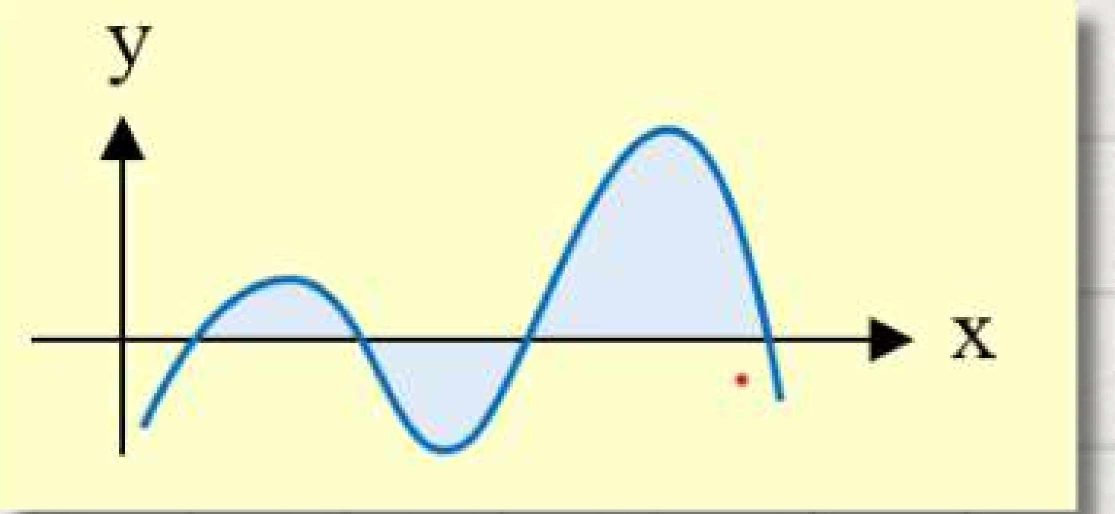
ג. היעזרו בסעיפים א' ו־ב', **ובלי לחשב אינטגרל נוסף**, חשבו את השטח המוגבל ברביע השלישי על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר $x=-1$ ועל ידי ציר ה־x.

ד. חשבו את סכום השטחים הצבועים.

ה. סופי טענה: "ניתן היה לחשב את השטח הצבוע **כולו** בעזרת האינטגרל: $\int_{-1}^{1}(e^{2x}-e^{-2x})dx$".

1. חשבו את האינטגרל.
2. האם סופי צודקת? הסבירו.

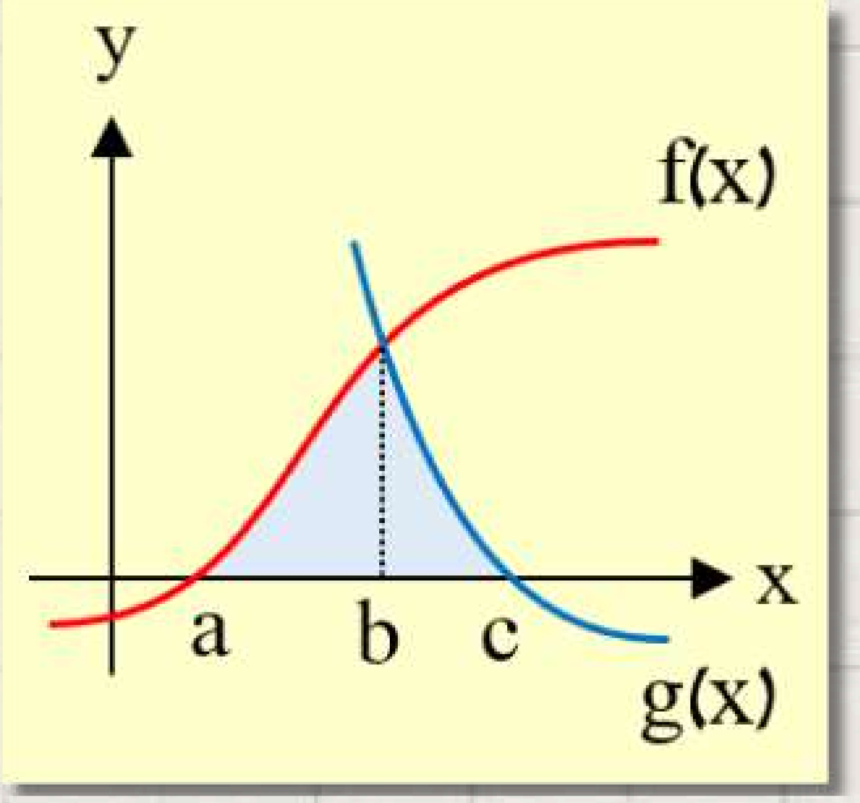
שטח שחלקו נמצא מתחת וחלקו מעל לציר ה-X



בשאלה הקודמת עסקנו בפונקציה שהגרף שלה בחלקו מתחת לציר ה־x ובחלקו מעל ציר ה־x, כך שחלק מהשטח המבוקש בין גרף הפונקציה לבין ציר ה־x נמצא מעל הציר,
וחלקו נמצא מתחתיו. במקרים אלו, בדומה למקרה המופיע בשרטוט משמאל, לא נוכל לחשב את השטח כולו על ידי אינטגרל מסוים אחד, אלא נחשב כל שטח בנפרד, ולאחר מכן נחבר את השטחים.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 10-13 בעמודים 186-187.

חישוב שטח מרוכב



בשרטוט משמאל מופיע שטח שחלקו מוגבל מלמעלה על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, וחלקו מוגבל מלמעלה על ידי גרף הפונקציה $g(x)$.

במקרה מסוג זה נפריד בין השטחים על ידי אנך, כמתואר בשרטוט, נחשב כל שטח בנפרד,

ונחבר את השטחים

לפי הנוסחה:

$$S = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx$$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 14-25 בעמודים 187-190.

שטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$

בשנה שעברה עסקנו בשאלות שבהן גרף פונקציית הנגזרת הגביל שטח, וחישבנו אותו בעזרת אינטגרל. בשאלות מסוג זה נסתמך על אינטגרל מסוים לפי הנוסחה:

$$S=\int_a^b f'(x)dx=[f(x)]_a^b$$

נשתמש בנוסחה זו כאשר בתחום השטח המוגבל נמצא **מעל ציר ה־x**.
אם בתחום זה השטח המוגבל נמצא **מתחת לציר ה־x**, נחשבו לפי הנוסחה:

$$S=\int_a^b -f'(x)dx=[-f(x)]_a^b \cdot$$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 1-26 בעמודים 193-201.

למרחב ההוראה
לחצו כאן

במרחב ההוראה מאות דפי תרגול, וביניהם בחינות מתכונת. המרחב מיועד לצוותי הוראה במוסדות לימוד אשר רכשו את הספר.

למי לפנות?

לשאלות לארכימדס:

במספר 050-9074007 של הוצאת ארכימדס

להזמנות מרובזות - פונים ל-"יש הפצות":

טלפון 03-5595354 או וואטסאפ 054-7154211