מקבץ תרגילי אתגר לתלמידים מתקדמים בהקבצת 5 יחידות בכיתה י'

לאור הפניות ממורים ברחבי הארץ, אנו מציגים מקבץ **תרגילי אתגר לתלמידים מתקדמים הלומדים בכיתה י' בהקבצת 5 יחידות**.

כמובן שרמת התרגילים גבוהה מהנדרש בבחינות של כיתה י' ואף בבחינות הבגרות ומטרתם לשפר את היכולת האלגברית ואת ההבנה המתמטית והגיאומטרית של התלמידים המתקדמים.

אלגברה:

א. פתור את המשוואות הבאות:

1. $\sqrt{x+4}+\sqrt{9-x}=\sqrt{x-1}+\sqrt{14-x}$

2. $\sqrt{x^2+5}+\sqrt{8-x^2}=x+\sqrt{13-x^2}$

3. $\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+x+14}=\sqrt{2x^2+2x+32}$

4. $\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}=\dfrac{5\sqrt{x}+21}{x+\sqrt{x}-6}$

5. $(x-3)(x+4)(x+5)(x-4)=180$

פתרונות: **1)** 5. **2)** 2. **3)** 1, 2-. **4)** 9. **5)** 5, 1, 2-, 6-.

ב. פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1. $\begin{cases}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2+5\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=6\\ x=y+1\end{cases}$

2. $\begin{cases}(x+2y)^2+3\cdot(x+2y)=40\\ (y-x)^2+3\cdot(y-x)=-2\end{cases}$

3. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{2x+6}\\ x+2y=13\end{cases}$

פתרונות: **1)** $(1,0)$. **2)** $(3,1),(-2,-3),\left(2\frac{1}{3},1\frac{1}{3}\right),\left(-1\frac{1}{3},-3\frac{1}{3}\right)$. **3)** $(5,4)$.

ג. פתור את אי השוויונות הבאים:

1. $(x^2-x)^2-26\cdot(x^2-x)+120<0$.

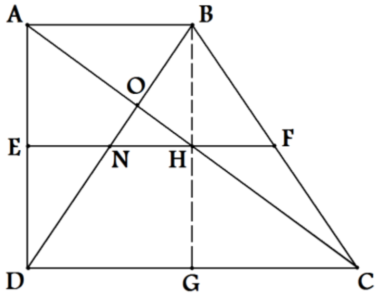
2. $x-5\le\dfrac{x^2+x-30}{x^2-x-2}\le 5-x$.

3. $\left(2x+\dfrac{3}{x}\right)^2-12\cdot\left(2x+\dfrac{3}{x}\right)+35<0$

פתרונות: **1)** $3<x<5$ או $-4<x<-2$. **2)** $4\le x\le 5$ או $x\le -2$. **3)** $1.5<x<3$ או $0.5<x<1$.

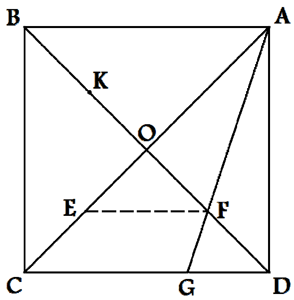
גיאומטריה:

תרגיל ללא שימוש בפרופורציה ודמיון:

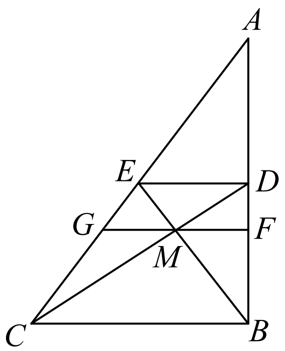


1. (**) בטרפז ABCD, קטע האמצעים EF חותך את האלכסונים בנקודות N ו-H כמתואר בשרטוט. הגובה BG עובר דרך הנקודה H.
נתון: $\measuredangle ADC = 90^O$
א. הוכח: $FN = CG$.
ב. נתון: שטח הטרפז CDNH הוא 60 סמ"ר.
חשב את שטח הטרפז ABFH.
ג. חשב את היחס: $\frac{BO}{NO}$.

תרגילים הכוללים שימוש במשפט תאלס:

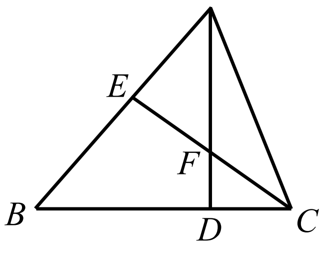


2. (**) אלכסוני הריבוע ABCD שהיקפו 4a, נחתכים בנקודה O. הנקודה G נמצאת על הצלע CD כך שהישר AG חותך את האלכסון BD בנקודה F.
הקטע EF הוא קטע אמצעים במשולש ΔCDO.
א. הבע באמצעות a את אורכי הצלעות EF ו-CG.
ב. נתון: שטח הטרפז CEFG הוא 21 סמ"ר. חשב את ערכו של a.
ג. נתון: הנקודה K היא אמצע BO. הוכח: המרובע KFGC הוא טרפז.

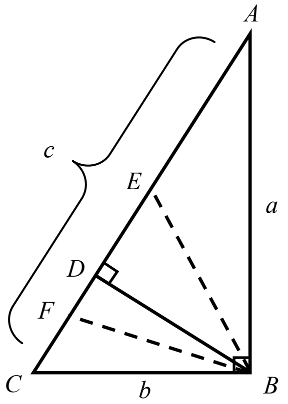


3. (**) במשולש ישר הזווית ΔABC $\left(AB \perp BC\right)$, התיכונים BE ו-CD נחתכים בנקודה M. דרך הנקודה M עובר ישר המקביל לקטע DE וחותך את צלעות המשולש בנקודות F ו-G כמתואר בשרטוט. היקף המשולש ΔADE הוא 36 ס"מ. הקטע AE ארוך בששה ס"מ מהקטע DE.
נתון: 18 ס"מ $\leq AD \leq$ 12 ס"מ.
א. מצא את טווח הערכים האפשרי עבור אורכי הקטעים: DF ו-DE.
ב. מצא את טווח הערכים האפשרי עבור היקף הטרפז BCED.
ג. כאשר היקף הטרפז BCED מקסימלי, חשב את היקף הטרפז GFDE.

תרגילים הכוללים שימוש במשפט חוצה הזווית:

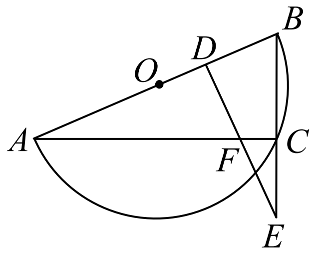


4. (**) במשולש ΔABC הגובה AD וחוצה הזווית CE נחתכים בנקודה F.
הגובה AD ארוך ב-3 ס"מ מהקטע BD. נתון: 5 ס"מ = CD. שטח המשולש ΔABC נמצא בטווח הערכים: 84 סמ"ר $\leq S_{\Delta ABC} \leq$ 12 סמ"ר.
א. מצא את טווח הערכים האפשריים של אורך BD.
(הדרכה: סמן $BD = x$).
ב. נתון: אורכו של BD הוא המקסימלי. חשב את אורך AE.
ג. חשב את שטח המשולש ΔACF.

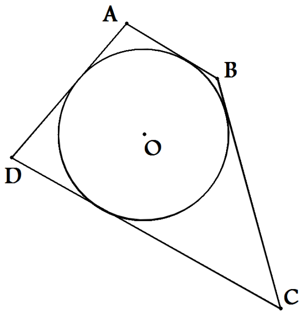


5. (**) הישר BD הוא הגובה ליתר במשולש ΔABC ישר הזווית.
נסמן: AB = a, BC = b, AC = c.
א. הבע באמצעות a, b ו-c את אורך הגובה BD.
ב. הבע באמצעות a, b ו-c את אורכי הקטעים AD ו-CD.
ג. נתון: הישרים BE ו-BF הם חוצי זוויות במשולשים ΔABD ו-ΔBCD בהתאמה. הוכח: $EF = \dfrac{a\cdot b\cdot(a+b+c)}{(a+c)\cdot(b+c)}$.

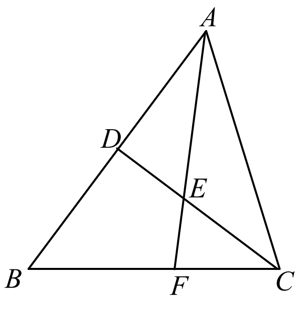
תרגילים במעגל:



6. (**) המשולש ΔABC חסום בחצי מעגל שמרכזו O וקוטרו AB.
מהנקודה D הנמצאת על הרדיוס BO מעלים אנך החותך את המיתר AC בנקודה F ואת המשך המיתר BC בנקודה E.
נסמן: $\angle BED = \alpha$. נתון: $\angle BAC \le \angle AFD \le 60^0$.
א. מצא את טווח הערכים האפשרי של α ושל הזווית $\angle CFD$.
ב. נתון: כאשר הזווית $\angle CFD$ היא מינימלית אז: $DO = R$, $AB = 6R$. חשב את היחס: $\dfrac{BC}{CE}$.



7. (**) מעגל שמרכזו בנקודה O חסום במרובע ABCD.
נתון: AB = 2 ס"מ, BC = 7 ס"מ, AD = 3 ס"מ.
א. חשב את אורך הצלע CD.
ב. נסמן את רדיוס המעגל כ-r.
הבע באמצעות r את שטח המרובע ABCD.



8. (**) הנקודות D ו-F נמצאות על צלעות המשולש שווה השוקיים ΔABC ($AC = BC$) שהיקפו 176 ס"מ. הישרים CD ו-AF נחתכים בנקודה E שהיא גם מרכז המעגל החסום במשולש ΔABC. נתון: AD = 33 ס"מ. חשב את:
א. אורך CF.
ב. היחס בין שטחי המשולשים: $\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta CEF}}$.

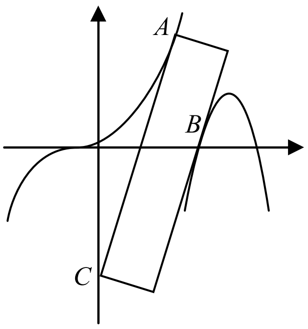
פתרונות: 1) א. 6 סמ"ר. **ב.** 24 סמ"ר. **ג.** 18 סמ"ר. **2) ג.** 12.5 סמ"ר. **3) ב.** $60°$. **ג.** 20.48 סמ"ר.
ד. 9.42 סמ"ר=3π. **4) ב.** 30.92 ס"מ. **ג.** לא ניתן. **5) א.** $\frac{ab}{c}$. **ב.** $AD = \frac{a^2}{c}$, $CD = \frac{b^2}{c}$.
6) א. $30^0 \le \alpha \le 45^0$, $120^0 \le \angle DFC \le 135^0$. **ב.** 3. **7) א.** 8 ס"מ. **ב.** 10r. **8) א.** 25 ס"מ. **ב.** $1\frac{8}{25} = 1.32$.

חשבון דיפרנציאלי

1. (**) נתונה הפונקציה: $f(x)=2mx^3-3mx^2-12mx+m^2$, $(0<m)$.
   א. הבע באמצעות m, במידת הצורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.
   ב. מצא עבור אילו ערכי m, נקודת המקסימום של הפונקציה תהיה ברביע השני ונקודת המינימום של הפונקציה תהיה ברביע הרביעי.

2. (**) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3\left(p+1\right)\cdot x^2+6px$, $(0<p)$.
   א. הבע באמצעות p, במידת הצורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.
   ב. מצא עבור אילו ערכי p, שתי נקודות הקיצון של הפונקציה יהיו מאותו צד של ציר ה-x.

3. (*) מלבן חותך את ציר ה-y בנקודה $C(0,-4)$ ומשיק לגרפים של הפונקציות $f(x)=\left(x+1\right)^3$ ו: $g(x)=-x^2+18x-41$ בנקודות A ו-B בהתאמה.
   שיעור ה-y של הנקודה A הוא 8. מצא את:
   א. משוואת הישר AC.
   ב. שיעורי הנקודה B.



4. (**) גרף הפונקציה: $f\left(x\right)=\left(-x+2p\right)^3+\left(x+4p\right)^3$ $\left(0<p\right)$ חותך את ציר ה-y בנקודה A.
   נסמן את נקודת הקיצון של הפונקציה כנקודה B.
   א. הבע באמצעות p, במידת הצורך, את:
      1. משוואת הישר AB.
      2. שיעורי הנקודה C בה הישר AB חותך את ציר ה-x.
   ב. נתון: ראשית הצירים בנקודה O. מצא עבור אילו ערכי p, שטח המשולש ΔBCO גדול מ-$3p^6$.

5. (**) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{mx^2}{m+x}+m$ $(0<m)$.
   א. הבע באמצעות m, במידת הצורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.
   ב. מצא עבור אילו ערכי m יהיו שתי נקודות הקיצון של הפונקציה בצדדים שונים של ציר ה-x.

פתרונות: 1) א. $\min(2,m^2-20m)$, $\max(-1,\ m^2+7m)$. **ב.** $0<m<20$.

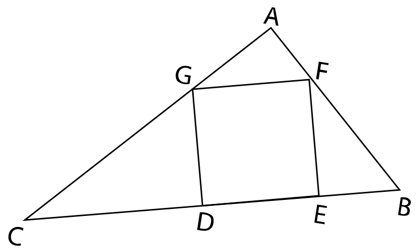
2) א. $(p,3p^2-p^3)$, $(1,3p-1)$. **ב.** $\frac{1}{3}<p<3$. **3) א.** $y=12x-4$. **ב.** $B(3,4)$.

4) א. 1) $y=18p^2x+72p^3$. **2)** $C\left(-4p,0\right)$. **ב.** $0<p<6$.

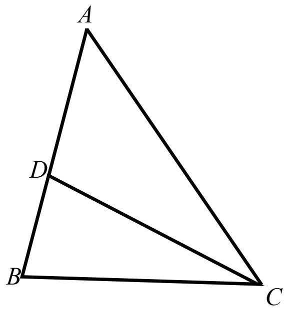
5) א. $\min(0,m)$, $\max(-2m,m-4m^2)$. **ב.** $0.25<m$.

טריגונומטריה

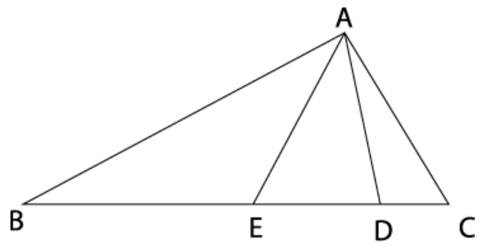
1. (**) הריבוע DEFG חסום במשולש ישר הזווית ΔABC ($\measuredangle BAC = 90^0$). נסמן: AC=b, $\measuredangle AGF = \beta$.
הבע באמצעות b ו- β את אורך צלע הריבוע.



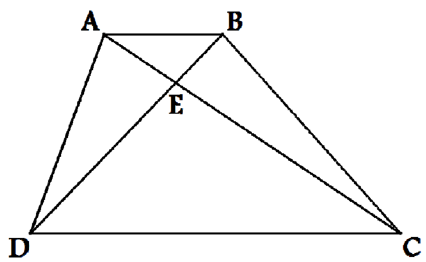
2. (**) הנקודה D נמצאת על הצלע AB במשולש ΔABC.
נתון: $AD = 1.5BD$. נסמן: AC = 8m, $BC = CD = 7m$.
   א. הבע באמצעות m את אורך הקטע BD.
   ב. נתון: היקף המשולש ΔACD נמצא בתחום:
   18 ס״מ $< P <$ 36 ס״מ. מצא באיזה תחום מספרי נמצא שטח המשולש ΔBCD.



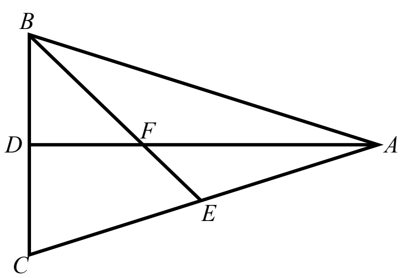
3. (**) הנקודות D ו-E נמצאות על הצלע BC במשולש ΔABC.
הישר AE חוצה את הזווית $\measuredangle BAD$.
נסמן: AD = 21a, AB = 56a, BD = 55a.
   א. הבע באמצעות a את אורך הקטע AE.
   ב. נתון: 24 ס״מ $< AE <$ 48 ס״מ. נסמן: AC=24a.
   הבע באמצעות a את תחום הערכים האפשרי של שטח המשולש ΔACD.



4. (**) אלכסוני הטרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ נחתכים בנקודה E.
נתון: AB=6 ס״מ, BC=9 ס״מ, CD=12 ס״מ.
היקף המשולש ΔABE הוא 14 ס״מ. חשב את:
   א. אורך הקטע BE.
   ב. הזווית $\measuredangle CED$.
   ג. שטח הטרפז ABCD.



5. (**) זווית הראש במשולש שווה השוקיים ΔABC היא $\measuredangle BAC = 2\beta$. התיכונים AD ו-BE נחתכים בנקודה F.
נסמן: $AB = 2m$.
   א. הוכח: $BE = m \cdot \sqrt{1 + 8\sin^2\beta}$.
   ב. נתון: $AF = BE$. מצא את β.



פתרונות:

1) $\frac{b\sin\beta}{1+\sin\beta\cdot\cos\beta}$. **2) א.** $2m$. **ב.** 6.93 סמ״ר $< S_{\Delta BCD} <$ 27.71 סמ״ר. **3) א.** $24a$.

ב. 93.54 סמ״ר $\le S_{\Delta ACD} \le$ 374.16 סמ״ר. **4) א.** $3\frac{2}{3}$ ס״מ. **ב.** $96.83°$. **ג.** 70.99 סמ״ר. **5) ב.** 16.38^0.