פתרון מלא - מבחן 3

שאלה 1

א. הכיתה התבקשה לבדוק האם הביטוי 5^n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.
יוני החל את ההוכחה בבדיקה עבור $n=7$ ולאחר מכן ביצע בהצלחה את שלבי ההנחה וההוכחה.

עבור כל טענה, נקבע אם היא נכונה או שגויה:

i. ניתן להסיק שהביטוי 5^n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית עבור $n=402$: **הטענה נכונה**.
שלב הבדיקה בוצע עבור $n=7$ ולכן המשפט נכון עבור n מסוים זה.
נתון ששלבי ההנחה וההוכחה בוצעו בהצלחה ולכן אנו יודעים שמתקיים המשפט הבא:
"אם הביטוי 5^n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית עבור n מסוים, אז הביטוי 5^n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית גם עבור $n+1$".
אם כך, בעקבות הבדיקה עבור מקרה הבסיס $n=7$, נוכל להסיק שהמשפט מתקיים עבור $n=8$, $n=9$ וכך הלאה לכל $7\le n$ טבעי, ובפרט עבור $n=402$.

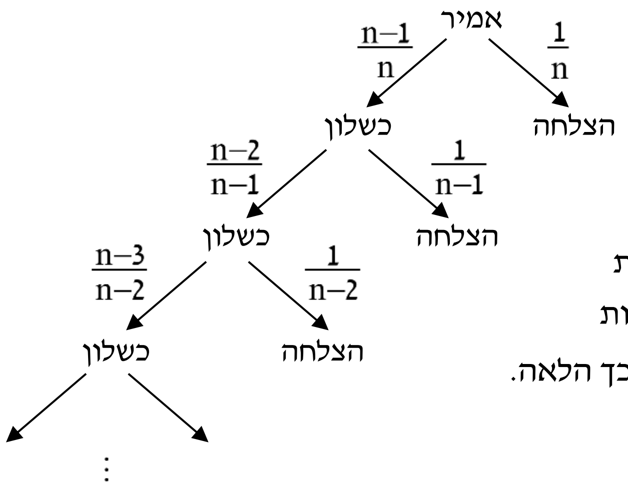
ii. ניתן להסיק שיש ערכי n שעבורם הביטוי 5^n-1 אינו מתחלק ב-4 ללא שארית: **הטענה שגויה**.
הוכחה באינדוקציה מראה נכונות של משפטים הנוגעים למספרים טבעיים, החל מערך n מסוים והלאה.
בתחילת ההוכחה נבחר ערך בסיס k, עליו מתבצע שלב הבדיקה, ובסופה ניתן להסיק את נכונות המשפט לכל $k\le n$. ההוכחה באינדוקציה <u>אינה</u> מספקת תובנות כלשהן עבור המספרים הטבעיים הקטנים מאותו k שנבחר ולכן לא ניתן לדעת אם המשפט שהוכח באינדוקציה נכון או שגוי עבורם.
לכן, על אף שראינו בסעיף i שהמשפט נכון לכל $7\le n$, אין בידינו שום מידע הנוגע לנכונות או אי הנכונות שלו עבור שאר המספרים הטבעיים, ולא ניתן להסיק שיש ערכי n שעבורם הביטוי 5^n-1 <u>אינו</u> מתחלק ב-4 ללא שארית.

iii. ייתכן שהביטוי 5^n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי: **הטענה נכונה**.
בסעיף i ראינו שנכונות המשפט הוכחה לכל $7\le n$ ובסעיף ii ראינו שללא חישובים נוספים לא ניתן לקבוע אם הוא מתקיים או שאינו מתקיים עבור $1\le n<7$. מכאן <u>שייתכן</u> שהוא מתקיים גם עבור $1\le n<7$ ולכן <u>ייתכן</u> שהוא מתקיים לכל n טבעי. כלומר ייתכן שהביטוי 5^n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.

ב. אמיר רכש כרטיס גירוד שבו n משבצות. רק באחת מהן מסתתר פרס. אמיר מנסה לגרד ולמצוא את הפרס. אם גירד תא ולא מצא את הפרס, יגרד תא נוסף וכך הלאה. הוא ינסה לגרד לכל היותר t פעמים ($1 \le t \le n$) ואם לא ימצא את הפרס, יעצור.

1. נביע באמצעות t ו-n, במידת הצורך, את ההסתברות שאמיר ימצא את הפרס.

לשם כך נסדר את הנתונים בדיאגרמת העץ הבאה:



ההסתברות להצליח בכל שלב היא תמיד 1 מתוך סך המשבצות שנותרו: בשלב הראשון ישנן n אפשרויות, בשני $n-1$ אפשרויות וכך הלאה.

ההסתברות להיכשל בכל שלב היא תמיד כמות המשבצות שנותרו פרט לזו שמסתירה את הפרס, מתוך סך המשבצות שנותרו: בשלב הראשון ישנן $n-1$ כאלו, בשני $n-2$ וכך הלאה.

ההסתברות להצלחה בניסיון הראשון היא: $\frac{1}{n}$.

ההסתברות להצלחה רק בניסיון השני היא: $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$.

ההסתברות להצלחה רק בניסיון השלישי היא: $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$.

למעשה, ניתן לראות שכל עוד אמיר מגרד מספר פעמים כך שבפעם האחרונה הוא זוכה בפרס, ההסתברות של אותו תרחיש תהיה תמיד שווה ל-$\frac{1}{n}$, ללא תלות במספר הגירודים "הלא מוצלחים" שהיו לפני הגירוד "המוצלח" האחרון.

אנו מעוניינים למצוא את ההסתברות שאמיר מצא את הפרס לאחר t ניסיונות <u>לכל היותר</u>. כלומר את ההסתברות של **איחוד** המאורעות: הפרס נמצא לאחר הניסיון הראשון, לאחר הניסיון השני, לאחר הניסיון השלישי וכך הלאה עד לניסיון ה-t. כיוון שאלו מאורעות <u>זרים</u> ההסתברות לאיחודם היא סכום ההסתברויות של כל אחד ואחד מהם בנפרד. מצאנו שההסתברות להתרחשות כל אחד מ-t מאורעות אלו היא: $\frac{1}{n}$ ולכן ההסתברות לאיחוד שלהם היא: $\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{\text{t פעמים}} = \frac{t}{n}$.

2. אמיר רכש 7 כרטיסי גירוד ומתכנן לפעול בכל כרטיס לפי המתואר בשאלה. נביע באמצעות t ו-n, במידת הצורך, את ההסתברות שיזכה סך הכל בפרס אחד:

אנו מעוניינים לחשב את ההסתברות להצלחה 1 מתוך 7, כאשר ההסתברות להצלחה יחידה היא $\frac{t}{n}$ ולכן,

לפי נוסחת ברנולי, ההסתברות המבוקשת היא: $\binom{7}{1} \cdot (\frac{t}{n})^1 \cdot (1-\frac{t}{n})^{7-1} = 7 \cdot (\frac{t}{n}) \cdot (1-\frac{t}{n})^6$

ג. הזווית α היא זווית במשולש חד זווית.

שרונה הביעה את אורך הצלע AB וקיבלה את הביטוי הבא: $AB = 3\cdot(\cos^3\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha)$.

תחילה נפשט את הביטוי $\cos^3\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha$:

נוציא גורם משותף $\cos\alpha$: $\cos^3\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha = \cos\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$: $\cos\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos\alpha\cdot 1 = \cos\alpha$

מצאנו ש: $\cos^3\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha = \cos\alpha$. כלומר, מתקיים: $AB = 3\cos\alpha$.

שרונה טענה שעבור כל α מתקיים: $AB < 3$. נראה מדוע הטענה נכונה:

מהגדרת הפונקציה הטריגונומטרית, לכל זווית חדה α מתקיים: $0 < \cos\alpha < 1$ ולכן: $AB < 3$.

לסיכום, הטענה נכונה.

ד. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^5}{2+\cos x}$.

1. נראה שהפונקציה $f(x)$ היא אי זוגית. מתקיים:

$$f(-x) = \frac{(-x)^5}{2+\cos(-x)} \rightarrow f(-x) = \frac{-x^5}{2+\cos x} \rightarrow f(-x) = -1\cdot\frac{x^5}{2+\cos x} \rightarrow f(-x) = -f(x)$$

במעבר הראשון, עבור המונה השתמשנו בחוקי חזקות עבור חזקה אי זוגית, ועבור המכנה השתמשנו בזהות הטריגונומטרית $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. מצאנו ש: $f(-x) = -f(x)$ ולכן הפונקציה $f(x)$ היא <u>פונקציה אי זוגית</u>.

2. נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$:

לפי הגדרת הפונקציה הטריגונומטרית, לכל x מתקיים $-1 \le \cos x \le 1$ ולכן:

$$-1 \le \cos x \le 1 \;\; /+2 \rightarrow 1 \le 2+\cos x \le 3 \rightarrow 2+\cos x \ne 0$$

מצאנו שלכל x הביטוי במכנה פונקציית המנה $f(x)$ שונה מאפס ולכן תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא <u>כל x</u>.

3. נחשב את האינטגרל $\int_{-4}^{4} f(x)dx$:

אנו מעוניינים בחישוב האינטגרל של הפונקציה בתחום הסימטרי שבין $x = 4$ לבין $x = -4$. בסעיף ד'1 הוכחנו שהפונקציה $f(x)$ היא אי זוגית ולכן השטח הכלוא בין $x = 4$ לבין ראשית הצירים שווה בערכו המוחלט לשטח הכלוא בין $x = -4$ לבין ראשית הצירים <u>אך בעל סימן מנוגד</u>. האינטגרל המבוקש שווה לסכום השטחים הללו, שסימניהם מנוגדים, ומכאן שהוא מתאפס ומתקיים: $\int_{-4}^{4} f(x)dx = 0$.

שאלה 2

נתונה הסדרה ההנדסית האינסופית היורדת a_n : $a_1, a_2, a_3, ...$, שמנתה q ואיבריה חיוביים.

באמצעות איברי הסדרה, מגדירים את הסדרה החדשה b_n : .... , $a_1 \cdot a_2$, $a_2 \cdot a_3$, $a_3 \cdot a_4$.

א. נקבע האם הסדרה b_n היא הנדסית או שאינה הנדסית:

כדי לקבוע אם b_n הנדסית יש לבדוק אם המנה בין שני איברים סמוכים <u>כלשהם</u> היא קבועה. נבצע את הבדיקה עבור האיברים הכלליים b_n ו- b_{n+1} ובכך נוכל להסיק נכונות עבור כלל האיברים בסדרה.

לפי ההגדרה, האיבר הכללי של הסדרה החדשה מקיים:

$$b_n = a_n \cdot a_{n+1} \rightarrow b_n = a_1 q^{n-1} \cdot a_1 q^{(n+1)-1} \rightarrow b_n = a_1 q^{n-1} \cdot a_1 q^n \rightarrow b_n = a_1{}^2 q^{2n-1}$$

ולכן:

$$b_{n+1} = a_1{}^2 \cdot q^{2(n+1)-1} \rightarrow b_{n+1} = a_1{}^2 \cdot q^{2n+1}$$

מכאן שהמנה של b_{n+1} ו- b_n היא:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_1{}^2 q^{2n+1}}{a_1{}^2 q^{2n-1}} \rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{q^{2n+1}}{q^{2n-1}} \rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = q^{2n+1-(2n-1)} \rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = q^2$$

מצאנו שהמנה בין כל שני איברים סמוכים בסדרה b_n היא קבועה, אינה תלויה ב-n ושווה ל- q^2.

לפיכך, <u>הסדרה הנדסית</u>.

ב. נתונות ארבע טענות. נקבע איזו מביניהן היא נכונה:

i. בהכרח מתקיים $a_2 < b_2$: ***הטענה שגויה***.

לדוגמה, אם: $a_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$: אז $b_n = \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}, ...$ ובמקרה זה $a_2 = \frac{1}{4}$ ו- $b_2 = \frac{1}{32}$ ולכן $b_2 < a_2$.

ii. בהכרח מתקיים: $b_2 < a_2$: ***הטענה שגויה***.

לדוגמה, אם: a_n : $8,4,2,1,...$ אז: b_n : $32,8,2,...$ ובמקרה זה $a_2 = 4$ ו- $b_2 = 8$ ולכן $a_2 < b_2$.

iii. אם a_1 הוא מספר טבעי אז בהכרח מתקיים: $a_2 < b_2$: ***הטענה שגויה***.

לדוגמה, אם: $a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$: אז $b_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, ...$ ובמקרה זה $a_1 = 1$ הוא מספר טבעית אך $b_2 < a_2$.

iv. אם a_1 הוא מספר טבעי אז יתכן שמתקיים: $b_2 < a_2$: ***הטענה נכונה***.

הדבר ייתכן, כפי שהראנו שמתקיים בדוגמה שהפריכה את טענה iii.

ג. כעת מכפילים ב- (-1) את האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה a_n.

לאחר השינוי סכום הסדרה a_n שווה לסכום הסדרה b_n. נתון: $1 < a_1 < 5$.

נמצא את תחום הערכים האפשריים של q:

I. לאחר כפל ב- (-1) של איברי a_n הנמצאים במקומות הזוגיים התקבלה הסדרה: $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \ldots$.

זוהי סדרה שהאיבר הראשון בה הוא a_1 ומנתה $-q$, כאשר q היא מנת הסדרה a_n המקורית.

נתון ש- a_n סדרה מתכנסת שאיבריה חיוביים ולכן: $0 < q < 1$. מכאן נובע ש: $-1 < -q < 0$ ולכן גם הסדרה החדשה, שהתקבלה לאחר שינוי סימני האיברים במקומות הזוגיים, היא סדרה מתכנסת.

נציב בנוסחה לסכום סדרה מתכנסת ונראה שסכום הסדרה החדשה הוא: $S = \frac{a_1}{1-(-q)} \rightarrow S = \frac{a_1}{1+q}$

II. מנת הסדרה b_n היא q^2. כיוון ש- $0 < q < 1$ אז גם: $0 < q^2 < 1$ ולכן הסדרה b_n מתכנסת.

האיבר הראשון בסדרה b_n הוא: $b_1 = a_1 \cdot a_2 \rightarrow b_1 = a_1 \cdot a_1 q \rightarrow b_1 = {a_1}^2 q$

לכן סכום הסדרה b_n הוא: $S = \frac{b_1}{1-q^2} \rightarrow S = \frac{{a_1}^2 q}{1-q^2}$

III. נתון שהסכומים שמצאנו ב-I ו-II שווים ולכן נוכל להשוות ביניהם ונקבל:

$$\frac{\cancel{a_1}}{1+q} = \frac{{a_1}^{\cancel{2}} q}{1-q^2} \xrightarrow{a_1 \neq 0} \frac{1}{1+q} = \frac{a_1 q}{1-q^2} \rightarrow a_1 = \frac{1-q^2}{q(1+q)} \rightarrow \frac{(1-q)(1+q)}{q(1+q)} \rightarrow a_1 = \frac{1-q}{q}$$

כאשר המעבר השלישי התבצע לפי נוסחת הכפל המקוצר $1-q^2 = (1-q)(1+q)$.

IV. כעת נוכל למצוא את תחום הערכים האפשריים עבור q:

נתון ש- $1 < a_1 < 5$ ולכן נציב בתוצאה של III ונקבל: $1 < a_1 < 5 \rightarrow 1 < \frac{1-q}{q} < 5$

ידוע ש- $0 < q$ ולכן מהצד הימני של אי השוויון נקבל: $\frac{1-q}{q} < 5 \rightarrow 1-q < 5q \rightarrow 1 < 6q \rightarrow \frac{1}{6} < q$

מהצד השמאלי של אי השוויון נקבל: $1 < \frac{1-q}{q} \rightarrow q < 1-q \rightarrow 2q < 1 \rightarrow q < \frac{1}{2}$

לסיום נסתכל על חיתוך שני התחומים שמצאנו ונסיק שמתקיים: $\frac{1}{6} < q < \frac{1}{2}$.

ד. נתון שסכום הסדרה a_n לאחר השינויים הוא 1.5. נמצא את q:

בשלב I של הסעיף הקודם מצאנו שסכום הסדרה החדשה לאחר השינויים הוא: $S=\frac{a_1}{1+q}$.

כעת נתון שסכום זה שווה ל-1.5 ולכן מתקיים:

$$S=\frac{a_1}{1+q} \rightarrow 1.5=\frac{a_1}{1+q} \rightarrow a_1=1.5\cdot(1+q)$$

בשלב III של סעיף ג' מצאנו שמתקיים השוויון: $a_1=\frac{1-q}{q}$ ולכן נוכל להציב את a_1 ולקבל:

$$a_1=1.5\cdot(1+q) \rightarrow \frac{1-q}{q}=1.5(1+q) \rightarrow 1-q=1.5q+1.5q^2 \rightarrow 1.5q^2+2.5q-1=0$$

לפי נוסחת השורשים פתרונות המשוואה הם: $q=-2$ ו- $q=\frac{1}{3}$.

בסעיף ג' מצאנו ש: $\frac{1}{6}<q<\frac{1}{2}$ וכן האפשרות הראשונה נפסלת ונסיק ש: $q=\frac{1}{3}$.

שאלה 3

בסקר שנערך על שימוש באפליקציה כלשהי, רבע מהמשתתפים היו גברים והיתר היו נשים.
מחצית מהנשאלים טענו כי הם מרוצים מהאפליקציה. רבע מהנשאלים כלל לא הכירו אותה והיתר טענו כי אינם מרוצים ממנה. נגדיר את המאורעות:

המאורע A: "להיות אישה". המאורע B: "להיות מרוצה מהאפליקציה".

המאורע C: "לא להכיר את האפליקציה". **המאורע D: "להיות לא מרוצה מהאפליקציה"**

נסמן: $P(A\cap B)=m$. נתון: המאורעות A ו-C בלתי תלויים זה בזה.

א. נמצא את תחום הערכים האפשרי של m:

ראשית נזין את הנתונים בטבלה הבאה:

מאורע	מרוצה (B)	לא מכיר (C)	לא מרוצה (D)	סך הכל
אישה (A)	m			$\frac{3}{4}$
גבר ($\bar{A}$)				$\frac{1}{4}$
סך הכל	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

נתון שהמאורעות A ו-C בלתי תלויים זה בזה ולכן מתקיים : $P(A)\cdot P(C)=P(A\cap C)$. בנוסף, אם A ו-C בלתי תלויים אז גם $\bar{A}$ ו-C בלתי תלויים ולכן מתקיים : $P(\bar{A})\cdot P(C)=P(\bar{A}\cap C)$.

כעת נבצע את החישובים המתאימים ונעדכן את הטבלה :

$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

$$P(\bar{A}\cap C)=P(\bar{A})\cdot P(C)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

מאורע	מרוצה (B)	לא מכיר (C)	לא מרוצה (D)	סך הכל
אישה (A)	m	$\frac{3}{16}$		$\frac{3}{4}$
גבר ($\bar{A}$)		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$
סך הכל	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

לבסוף נמלא את התאים הלבנים החסרים באמצעות השלמת כל שורה ועמודה לערך שנמצא בתא האפור שבסופה :

מאורע	מרוצה (B)	לא מכיר (C)	לא מרוצה (D)	סך הכל
אישה (A)	m	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}-m$	$\frac{3}{4}$
גבר ($\bar{A}$)	$\frac{1}{2}-m$	$\frac{1}{16}$	$m-\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$
סך הכל	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

כדי למצוא את תחום הערכים האפשרי של m נוודא שבכל אחד מהתאים בטבלה בו מופיע הפרמטר נמצאת הסתברות שערכיה הם בטווח שבין 0 ל-1. נקבל את ארבעת אי השוויונות הבאים :

$$0\le P(A\cap B)\le 1\ \rightarrow\ 0\le m\le 1$$

$$0\le P(A\cap D)\le 1\ \rightarrow\ 0\le\frac{9}{16}-m\le 1\ \rightarrow\ -\frac{7}{16}\le m\le\frac{9}{16}$$

$$0\le P(\bar{A}\cap B)\le 1\ \rightarrow\ 0\le\frac{1}{2}-m\le 1\ \rightarrow\ -\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}$$

$$0\le P(\bar{A}\cap D)\le 1\ \rightarrow\ 0\le m-\frac{5}{16}\le 1\ \rightarrow\ \frac{5}{16}\le m\le\frac{21}{16}$$

זו מערכת אי-שוויונות שפתרונה הוא החיתוך : $\frac{5}{16}\le m\le\frac{1}{2}$ וזהו תחום הערכים האפשרי עבור m.

ב. נקבע האם יתכן שבמדגם של הסקר כלל לא היו נשים שמרוצות מהאפליקציה :

בסעיף א' מצאנו ש : $\frac{5}{16}\le m\le\frac{1}{2}$ כלומר : $\frac{5}{16}\le P\ (A\cap B)<\frac{1}{2}$.

מכאן שחיתוך המאורעות "להיות אישה" (A) ו-"להיות מרוצה מהאפליקציה" (B) גדול או שווה ל- $\frac{5}{16}$,

ובפרט הוא גדול מ-0. לכן לא יתכן שבמדגם כלל לא היו נשים שמרוצות מהאפליקציה.

ג. נתון: המאורע "להיות גבר" אינו תלוי במאורע B.

בחרו שלוש נשים. נחשב את ההסתברות שרובן מרוצות מהאפליקציה:

I. ניעזר בנתון החדש כדי למצוא את ערכו של הפרמטר m:

נתון שהמאורע "להיות גבר" ($\bar{A}$) אינו תלוי במאורע B ולכן:

$$P(\bar{A})\cdot P(B)=P(\bar{A}\cap B)\ \rightarrow\ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-m\ \rightarrow\ \frac{1}{8}=\frac{1}{2}-m\ \rightarrow\ m=\frac{3}{8}$$

II. לפני שנוכל לחשב את ההסתברות המבוקשת, נסתכל על מאורע שמורכב מבחירה בודדת:

אם ידוע ש-"נבחרה אישה" (A), נחשב את ההסתברות שהיא "מרוצה מהאפליקציה" (B):

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\ \rightarrow\ P(B/A)=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}\ \rightarrow\ P(B/A)=\frac{1}{2}$$

III. כעת נוכל לחשב את ההסתברות שנבחרו 3 נשים ורובן היו מרוצות מהאפליקציה, כלומר ההסתברות שמתוך 3 נשים שנבחרו 2 או 3 היו מרוצות מהאפליקציה.

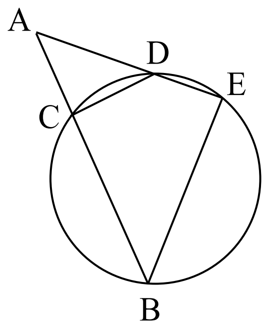
לפי נוסחת ברנולי, ההסתברות ש-2 מתוך 3 היו מרוצות היא: $\binom{3}{2}\cdot(\frac{1}{2})^2\cdot(1-\frac{1}{2})^1=\frac{3}{8}$

לפי נוסחת ברנולי, ההסתברות ש-3 מתוך 3 היו מרוצות היא: $\binom{3}{3}\cdot(\frac{1}{2})^3\cdot(1-\frac{1}{2})^0=\frac{1}{8}$

שני המאורעות הללו **זרים** ולכן ההסתברות שהתרחש האיחוד שלהם ("נבחרו 2 מתוך 3 או 3 מתוך 3) שווה לסכום ההסתברויות שלהם: $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$.

לסיכום, אם ידוע שנבחרו שלוש נשים, ההסתברות שרובן מרוצות מהאפליקציה היא $\frac{1}{2}$.

שאלה 4



מהנקודה A יוצאים שני קטעים החותכים את המעגל

בנקודות B, C, D ו-E כמתואר בשרטוט.

א. נוכיח: $\Delta ACD \sim \Delta AEB$

1)	$\sphericalangle CAD = EAB$	הזווית $\sphericalangle A$ שווה לעצמה
2)	$\sphericalangle ACD + \sphericalangle BCD = 180°$	סכום זוויות צמודות שווה ל- $180°$
3)	$\sphericalangle ACD = 180° - \sphericalangle BCD$	מסקנה מ-(2)
4)	$\sphericalangle BED + \sphericalangle BCD = 180°$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל (BCDE) שווה ל- $180°$
5)	$\sphericalangle BED = 180° - \sphericalangle BCD$	מסקנה מ-(4)
6)	$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BED$	מסקנה מ-(3) ו-(5)
7)	$\Delta ACD \sim \Delta AEB$	לפי משפט ז.ז. על סמך (1) ו-(6)

מ.ש.ל א'

ב. נתון: $AB = 10a$, $AE = 8a$, $BC = 2DE$.

נביע באמצעות a את אורכי הקטעים AC ו-DE.

8)	$DE = x$	סימון
9)	$BC = 2x$	נתון $BC = 2DE$
10)	$AD = AE - DE$	חיסור קטעים
11)	$AD = 8a - x$	הצבה ב-(10) לפי הנתון $AE = 8a$ ו-(8)
12)	$AC = AB - BC$	חיסור קטעים
13)	$AC = 10a - 2x$	הצבה ב-(12) לפי הנתון $AB = 10a$ ו-(9)
14)	$\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AB}$	לפי (7), יחס צלעות במשולשים דומים
15)	$\frac{10a - 2x}{8a} = \frac{8a - x}{10a} \rightarrow 100a^2 - 20a = 64a^2 - 8ax$ $\rightarrow 36a^2 = 12ax \;\; /:12a \rightarrow x = 3a$	הצבה ופיתוח המשוואה המתקבלת מ-(14) ($12a \neq 0$ כיוון ש-a מייצג אורך צלע)
16)	$DE = 3a$	הצבה ב-(8) לפי (15)
17)	$AC = 10a - 2x \rightarrow AC = 10a - 2 \cdot 3a$ $\rightarrow AC = 10a - 6a \rightarrow AC = 4a$	הצבה ב-(13) לפי (15)

מ.ש.ל ב'

ג. נסמן: $CD = b$.
נביע באמצעות b את אורך BE

18)	$\frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AE}$	לפי (7), יחס צלעות במשולשים דומים
19)	$\frac{b}{BE} = \frac{4a}{8a} \rightarrow \frac{b}{BE} = \frac{1}{2} \rightarrow BE = 2b$	הצבה ופיתוח המשוואה המתקבלת מ-(18)

מ.ש.ל ג'

ד. אוריה הוסיפה למשולשים שבשרטוט תיכונים, חוצי זוויות וגבהים, ובעזרתם הביעה אורכי קטעים, היקפים ושטחים של מצולעים שנוצרו.

אוריה קיבלה שני ביטויים אלגבריים: ביטוי א': $\sqrt{2a^2 + b^2}$ וביטוי ב': $\frac{a^2}{2b}$.

עבור כל טענה נקבע אם היא נכונה או שגויה:

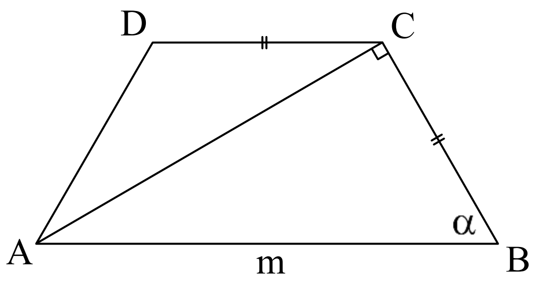
i. ייתכן שביטוי א' מייצג היקף של מצולע כלשהו - **הטענה נכונה**:

היקף נמדד ביחידות אורך ולכן בביטוי אלגברי המייצג אותו נצפה לראות יחידות אורך. הפרמטרים a ו-b מייצגים בשאלה אורכי צלעות ולכן נמדדים ביח' אורך. בביטוי שבתוך השורש שני הפרמטרים בחזקה שנייה ולכן כל אחד מהם בנפרד, וכך גם הסכום שלהם, מייצג ביטוי שנמדד ביח' של אורך בחזקה שנייה, כלומר יח' שטח. לאחר הוצאת השורש הריבועי חזרנו מיח' שטח, כלומר אורך בחזקה שנייה, בחזרה ליח' אורך ולכן הביטוי נמדד ביח' אורך והטענה נכונה.

ii. ייתכן שביטוי ב' מייצג שטח של מצולע כלשהו - **הטענה שגויה**:

שטח נמדד ביחידות של אורך בחזקה שנייה ולכן בביטוי אלגברי המייצג אותו נצפה לראות יח' שטח, כלומר אורך בחזקה שנייה. בביטוי ב' מחלקים מדידה של יח' שטח, כלומר של אורך בחזקה שנייה, במדידה של יח' אורך ממעלה ראשונה. התוצאה לאחר הצמצום היא ביטוי שמייצג מדידה של יח' אורך ממעלה ראשונה, כלומר ביטוי שאינו נמדד ביח' שטח ולכן הטענה שגויה.

שאלה 5



בטרפז ABCD ($AB \| CD$). נתון: $BC = CD$.

האלכסון AC מאונך לשוק BC.

נסמן: $\sphericalangle ABC = \alpha$, $AB = m$.

א. נוכיח: $AD = m\sqrt{1 - \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha}$:

I. נבטא את הצלעות BC ,AC ו-CD ואת הזווית $\sphericalangle ACD$ באמצעות הפרמטרים m ו- α.

במשולש ΔABC מתקיים:

$$\sin\sphericalangle ABC = \frac{AC}{AB} \rightarrow \sin\alpha = \frac{AC}{m} \rightarrow AC = m\sin\alpha$$

$$\cos\sphericalangle ABC = \frac{BC}{AB} \rightarrow \cos\alpha = \frac{BC}{m} \rightarrow BC = m\cos\alpha$$

כמו כן, נתון: $BC = CD$ ולכן: $CD = m\cos\alpha$.

בטרפז ABCD מתקיים:

הזוויות $\sphericalangle ABC$ ו- $\sphericalangle BCD$ נמצאות על אותה שוק ולכן סכומן שווה ל- $180°$. נקבל את המשוואה:

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180° \rightarrow \sphericalangle ABC + (\sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD) = 180°$$

$$\rightarrow \alpha + (90° + \sphericalangle ACD) = 180° \rightarrow \sphericalangle ACD = 90° - \alpha$$

II. נשתמש במשפט הקוסינוסים כדי לבטא את הצלע המבוקשת AD באמצעות הפרמטרים m ו- α.

במשולש ΔACD מתקיים:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cdot \cos\sphericalangle ACD$$

$$\rightarrow AD^2 = (m\sin\alpha)^2 + (m\cos\alpha)^2 - 2 \cdot m\sin\alpha \cdot m\cos\alpha \cdot \cos(90° - \alpha)$$

$$\rightarrow AD^2 = m^2\sin^2\alpha + m^2\cos^2\alpha - 2 \cdot m^2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos(90° - \alpha)$$

נסדר את אגף ימין מחדש:

$$\rightarrow AD^2 = m^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - m^2 \cdot \cos(90° - \alpha) \cdot (2\sin\alpha \cdot \cos\alpha)$$

כעת נוכל להשתמש בזהויות הטריגונומטריות: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

ו- $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ כדי לקבל:

$$\rightarrow AD^2 = m^2 \cdot 1 - m^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha$$

$$\rightarrow AD^2 = m^2(1 - \sin 2\alpha \sin\alpha)$$

לבסוף, נוציא שורש משני אגפי השוויון ונקבל:

$$AD = \sqrt{m^2(1 - \sin\alpha\sin 2\alpha)} \rightarrow AD = \sqrt{m^2} \cdot \sqrt{(1 - \sin\alpha\sin 2\alpha)} \rightarrow AD = m \cdot \sqrt{(1 - \sin\alpha\sin 2\alpha)}$$

ב. נתון: שטח המשולש ΔABC גדול פי שניים משטח המשולש ΔACD.

נביע באמצעות m את אורך AD:

I. באמצעות הנתון על היחס בין שטחי המשולשים נמצא את הזווית α.

נבטא באמצעות הפרמטרים m ו- α את שטח המשולש <u>ישר הזווית</u> ΔABC:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot AC}{2}\rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{m\cos\alpha\cdot m\sin\alpha}{2}\rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{m^2}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

באמצעות הנוסחה לחישוב שטח משולש על פי שתי צלעות סמוכות והזווית שביניהן, נבטא באמצעות הפרמטרים m ו- α את שטח המשולש ΔACD:

$$S_{\Delta ACD}=\frac{AC\cdot CD\cdot\sin\sphericalangle ACD}{2}\rightarrow S_{\Delta ACD}=\frac{m\sin\alpha\cdot m\cos\alpha\cdot\sin(90^\circ-\alpha)}{2}$$

נסדר מחדש את אגף ימין ובנוסף נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$:

$$\rightarrow S_{\Delta ACD}=\frac{m^2}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha\rightarrow S_{\Delta ACD}=\frac{m^2}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

כעת נציב בנתון לפיו $S_{\Delta ABC}=2\cdot S_{\Delta ACD}$ ונקבל:

$$S_{\Delta ABC}=2\cdot S_{\Delta ACD}\rightarrow\frac{m^2}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot(\frac{m^2}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha)$$

נצמצם ביטויים זהים בשני האגפים ונקבל את השוויון:
$$\rightarrow 1=2\cdot\cos\alpha\rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

זוהי משוואה טריגונומטרית שפתרונה הכללי הוא: $\alpha=\pm60^\circ+360^\circ k$.

הזווית α היא אחת הזווית החדות במשולש ישר הזווית ΔABC ולכן היא מקיימת: $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

הפתרון היחיד בתחום זה מתקבל עבור $k=1$ והוא: $\alpha=60^\circ$.

II. נציב את $\alpha=60^\circ$ בביטוי שמצאנו בסעיף א' ומייצג את אורך הצלע AD:

$$AD=m\cdot\sqrt{(1-\sin\alpha\sin2\alpha)}\rightarrow AD=m\cdot\sqrt{1-\sin60^\circ\cdot\sin(2\cdot60^\circ)}$$

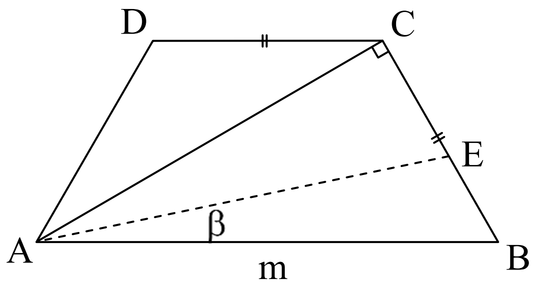
$$\rightarrow AD=m\cdot\sqrt{1-\sin60^\circ\cdot\sin120^\circ}\rightarrow AD=m\cdot\sqrt{1-\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}}\rightarrow AD=m\cdot\sqrt{1-\frac{3}{4}}$$

$$\rightarrow AD=m\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}\rightarrow AD=m\cdot\frac{1}{2}$$

כלומר מצאנו ש: $AD=\frac{m}{2}$.

ג. הנקודה E נמצאת על השוק BC כך ש: $\sphericalangle BAE=\beta$.

נמצא את β שעבורה שטח המשולש ΔABE שווה לשטח המשולש ΔACD.



I. בסעיף ב' מצאנו ש: $S_{\Delta ACD}=\frac{m^2}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$. נציב את $\alpha=60°$ ונקבל:

$$S_{\Delta ACD}=\frac{m^2}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha \rightarrow S_{\Delta ACD}=\frac{m^2}{2}\cdot\sin 60°\cdot\cos^2 60° \rightarrow S_{\Delta ACD}=\frac{m^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{1}{2})^2$$

$$\rightarrow S_{\Delta ACD}=\frac{m^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{4} \rightarrow S_{\Delta ACD}=\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot m^2$$

II. סכום הזוויות במשולש $\sphericalangle ABE$ שווה ל- $180°$ ולכן:

$$\sphericalangle ABE+\sphericalangle BAE+\sphericalangle AEB=180° \rightarrow 60°+\beta+\sphericalangle AEB=180° \rightarrow \sphericalangle AEB=120°-\beta$$

III. נבטא את שטח המשולש ΔABE באמצעות הנוסחה לחישוב שטח על פי שלוש זוויות וצלע:

$$S_{\Delta ABE}=\frac{AB^2\cdot\sin\sphericalangle ABE\cdot\sin\sphericalangle BAE}{2\cdot\sin\sphericalangle AEB} \rightarrow S_{\Delta ABE}=\frac{m^2\cdot\sin 60°\cdot\sin\beta}{2\cdot\sin(120°-\beta)}$$

$$\rightarrow S_{\Delta ABE}=\frac{m^2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\beta}{2\cdot\sin(120°-\beta)} \rightarrow S_{\Delta ABE}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot m^2\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(120°-\beta)}$$

IV. אנו מחפשים β עבורה שטחי המשולשים ΔABE ו- ΔACD שווים ולכן נשווה את הביטויים שמצאנו:

$$S_{\Delta ABE}=S_{\Delta ACD} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot m^2\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(120°-\beta)}=\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot m^2 \Big/ :\frac{\sqrt{3}}{4}m^2$$

$$\rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin(120°-\beta)}=\frac{1}{4} \rightarrow 4\sin\beta=\sin(120°-\beta)$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ונקבל:

$$\rightarrow 4\sin\beta=\sin 120°\cdot\cos\beta-\cos 120°\sin\beta \rightarrow 4\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta-(-\frac{1}{2}\sin\beta)$$

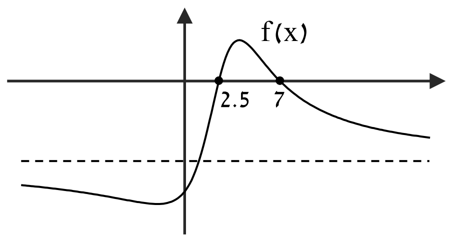
$$\rightarrow 4\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta+\frac{1}{2}\sin\beta \rightarrow 3\frac{1}{2}\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta \Big/ :3\frac{1}{2}\cos\beta$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$:

$$\rightarrow \frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sqrt{3}}{7} \rightarrow \tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{7} \rightarrow \beta=13.9°$$

ומצאנו ש: $\beta=13.9°$.

שאלה 6



לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.

מגדירים פונקציה חדשה: $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ בתחום $0\le x$.

לפני ההסבר, נזכיר מהו אינטגרל מצטבר: הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה ״צוברת שטח״ שהערך שלה בכל נקודה שווה לסכום השטחים הכלואים בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין ציר ה-x: הסכום מורכב מהשטחים שמעל ציר ה-x והם בעלי סימן חיובי ומהשטחים שמתחת לציר ה-x והם בעלי סימן שלילי.

לכל $0\le x$ הערך של $g(x)$ יהיה שווה לשטח המצטבר החל מ-0 ועד לנקודה x שבחרנו.

כאשר גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא <u>מתחת</u> לציר ה-x השטח שמתווסף לסכום הכולל הוא בעל סימן שלילי, כלומר ערכו של הסכום המצטבר <u>יורד</u> ולכן הפונקציה $g(x)$ נמצאת במגמת ירידה.

כאשר גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא <u>מעל</u> לציר ה-x השטח שמתווסף לסכום הכולל הוא בעל סימן חיובי, כלומר ערכו של הסכום המצטבר <u>עולה</u> ולכן הפונקציה $g(x)$ נמצאת במגמת עלייה.

א. נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0\le x$:

בתחום $0\le x$ גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא מתחת לציר ה-x כאשר: $0\le x<2.5$ ו- $7<x$ ומעל לציר ה-x כאשר: $2.5<x<7$.

מכאן נובע שתחום הירידה של $g(x)$ הוא: $0<x<2.5$ ו- $7<x$ ותחום העלייה של $g(x)$ הוא: $2.5<x<7$
.

ב. נראה מדוע לפונקציה $g(x)$ <u>אין</u> אסימפטוטה אופקית בתחום הנתון:

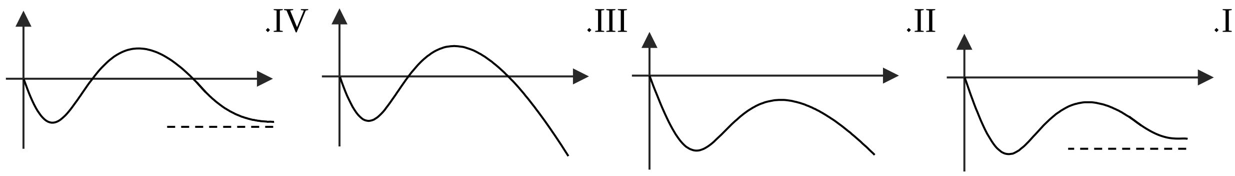
המשמעות של אסימפטוטה אופקית עבור פונקציה המוגדרת בתחום $0\le x$, היא שקיים ערך כלשהו אליו הפונקציה ״שואפת״ להגיע כאשר ערכי ה-x שלה שואפים לאינסוף. ערך מסוים שככל שנציב שיעורי x הולכים וגדלים נראה את ערכי הפונקציה הולכים ומתקרבים אליו.

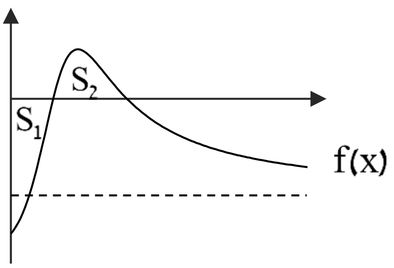
נשים לב שככל ש-x גדל, הפונקציה $f(x)$ הולכת ומתקרבת לאסימפטוטה כלשהי מתחת לציר ה-x.

לכן, ככל ש-x גדל, הפונקציה $g(x)$ צוברת שטח שלילי הולך וגדל. כלומר, גרף הפונקציה $g(x)$ אינו הולך ומתקרב לערך אסימפטוטי כלשהו, כי אם יורד עוד ועוד ללא מגבלה.

ג. נתון שהשטח השמאלי, המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין שני הצירים, גדול מהשטח הימני, המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין ציר ה-x.

נקבע איזה מהגרפים הבאים מתאר את גרף הפונקציה $g(x)$:





נתבונן בפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \le x$.

נסמן את השטח השמאלי ב-S_1 ואת השטח הימני ב-S_2.

השטח S_1 בעל סימן שלילי והשטח S_2 בעל סימן חיובי.

כדי לזהות את תחומי החיוביות והשליליות של $g(x)$

נחלק את הקרן החיובית של ציר ה-x ל-3 תחומים :

1. בין ציר ה-y לבין נקודת החיתוך השמאלית של $f(x)$ עם ציר ה-x :

כל עוד הפונקציה $g(x)$ ״צוברת״ את השטח S_1 בעל הסימן השלילי היא תהיה במגמת ירידה.
בקצה השמאלי, עבור $x = 0$, הפונקציה $g(x)$ מתאפסת ולכן בתחום 1 הפונקציה $g(x)$ תהיה <u>שלילית</u>.

2. בין שתי נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה-x :

נתון שהשטח השמאלי גדול יותר בערכו המוחלט מהשטח הימני ולכן מתקיים : $S_1 + S_2 < 0$.

מכאן נובע שגם לאחר שהפונקציה $g(x)$ סיימה לצבור את <u>כל</u> השטח החיובי S_2 היא עדיין בעלת סימן שלילי ולכן גם בתחום 2 הפונקציה $g(x)$ תהיה <u>שלילית</u>.

3. מימין לנקודת החיתוך הימנית של $f(x)$ עם ציר ה-x :

הפונקציה $f(x)$ שלילית בתחום זה ולכן השטח שהפונקציה $g(x)$ צוברת שם יהיה תמיד בעל סימן שלילי. ראינו שבקצה השמאלי של תחום 3 הפונקציה $g(x)$ בעלת סימן שלילי ולכן נסיק שבכל התחום הפונקציה $g(x)$ תהיה <u>שלילית</u>.

לסיכום מצאנו שלכל $0 \le x$ הפונקציה $g(x)$ היא שלילית ולכן נותר לבחור אחד מבין הגרפים I ו-II.

בסעיף ב׳ ראינו שלפונקציה $g(x)$ אין אסימפטוטה אופקית ולכן ניתן לפסול את אפשרויות I.

מכאן נובע שהגרף המתאים לתיאור הפונקציה $g(x)$ הוא <u>גרף II</u>.

ד. נתונה הפונקציה: $f(x)=-\frac{2x^2-19x+35}{x^2-5x+13}$.

1. מבלי לגזור את הפונקציה $f(x)$, נקבע איזה מהביטויים הבאים מייצג את הנגזרת $f'(x)$:

i. $-\frac{9(x^2-2x-8)}{(x^2-5x+13)^3}$ ii. $-\frac{9}{(x^2-5x+13)^2}$ iii. $-\frac{9(x^2-2x-8)}{(x^2-5x+13)^2}$

ביטוי i: לא ייתכן שהמכנה של הפונקציה $f(x)$ יופיע במכנה של הנגזרת בחזקת 3. לכן אפשרות זו <u>אינה מתאימה</u>.

ביטוי ii: מהשרטוט הנתון בתחילת השאלה ניתן לראות של- $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון ולכן במונה הנגזרת נצפה לראות ביטוי ממעלה שנייה שהשוואתו לאפס תניב שני פתרונות. לכן אפשרות זו <u>אינה מתאימה</u>.

ביטוי iii: המונה מתאפס עבור שני ערכי x באופן המתאים לקיומן של שתי נקודות הקיצון. המכנה הוא למעשה המכנה של הפונקציה בחזקת 2, כנדרש. לכן אפשרות זו היא <u>המתאימה</u>.

2. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון ונקבע את סוגן:

נשווה את הנגזרת לאפס:

$$f'(x)=0 \rightarrow -\frac{9(x^2-2x-8)}{(x^2-5x+13)^2}=0 \rightarrow x^2-2x-8=0$$

פתרונות המשוואה הם: $x=-2$ ו- $x=4$ ולכן ערכי x אלו מצביעים על חשד לנקודות קיצון.

כדי למצוא את שיעור ה-y של הנקודות נציב בפונקציה $f(x)$:

$$f(4)=-\frac{2\cdot4^2-19\cdot4+35}{4^2-5\cdot4+13} \rightarrow f(4)=1$$

$$f(-2)=-\frac{2\cdot(-2)^2-19\cdot(-2)+35}{(-2)^2-5\cdot(-2)+13} \rightarrow f(-2)=-3$$

בעזרת הגרף הנתון בשאלה, נוכל להסיק שנקודות הקיצון הן: $\min(-2,3)$, $\max(4,1)$.

3. נמצא את האסימפטוטה האופקית לגרף הפונקציה:

$$\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{2x^2-19x+35}{x^2-5x+13}=\lim_{x\to\pm\infty}-\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{19x}{x^2}+\frac{35}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{13}{x^2}}\approx-\frac{2-0^{\pm}+0^{+}}{1-0^{\pm}+0^{+}}\approx-\frac{2}{1}\approx-2$$

ולכן האסימפטוטה האופקית של $f(x)$ היא $y=-2$.

שאלה 7

נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{\cos x}{x}$ ו: $g(x)=\frac{x}{\cos x}$ בתחום: $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

א. 1. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים של $f(x)$ ו- $g(x)$ בתחום: $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

I. עבור $f(x)$:

<u>חיתוך עם ציר ה-x</u>:

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{\cos x}{x}=0 \ /\cdot x \rightarrow \cos x=0 \rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

ערכי ה-k עבורם מתקבלים פתרונות בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ הם: $k=-1$, $k=0$ ו- $k=1$ שנותנים בהתאמה את: $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ ו- $x=\frac{3\pi}{2}$.

מכאן נובע ששיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה-x הם: $(-\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{3\pi}{2},0)$.

<u>חיתוך עם ציר ה-y</u>:

הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת ב- $x=0$ ולכן אין לה נקודות חיתוך עם ציר ה-y.

II. עבור $g(x)$:

<u>חיתוך עם ציר ה-x</u>:

$$g(x)=0 \rightarrow \frac{x}{\cos x}=0 \ /\cdot\cos x \rightarrow x=0$$

הפתרון היחיד למשוואה הוא $x=0$ ומכאן נובע שנקודת החיתוך היחידה עם ציר ה-x היא: $(0,0)$.

<u>חיתוך עם ציר ה-y</u>:

$$g(0)=\frac{0}{\cos 0} \rightarrow g(0)=0$$

לכן שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה-y הם: $(0,0)$.

א. 2. נמצא את האסימפטוטות האנכיות של $f(x)$ ו- $g(x)$ בתחום: $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

כדי למצוא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציות נמצא את נקודות אי ההגדרה שלהן.
בשני המקרים מדובר על פונקציית מנה ולכן נקודות אי ההגדרה הן הנקודות שמאפסות את המכנה.

I. עבור $f(x)$:

נשווה את המכנה לאפס ונקבל: $x = 0$. זו נקודת אי ההגדרה היחידה של $f(x)$ שאינה מאפסת את המונה.
לפיכך, האסימפטוטה האנכית היחידה של הפונקציה היא $x = 0$.

II. עבור $g(x)$:

נשווה את המכנה לאפס ונקבל: $\cos x = 0$. בסעיף א׳1, שלב I, מצאנו שהפתרונות של משוואה זו בתחום הנתון הם: $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ ו- $x = \frac{3\pi}{2}$. מכאן נובע שאלו הן נקודות אי ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון ולכן אלו הן שלוש האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$.

א. 3. נמצא את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$ ו- $g(x)$ בתחום: $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

עבור כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מצאנו את נקודות החיתוך עם ציר ה-x ואת נקודות אי ההגדרה.
מכאן שמצאנו את כל הנקודות בהן הפונקציות יכולות לעבור בין תחום חיוביות לשליליות, או להיפך, ולכן כל שנותר כדי לזהות תחומים אלו הוא להציב את הנתונים בטבלת חיוביות ושליליות.

I. עבור $f(x)$:

$x = \frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$x = 0$	$-\frac{\pi}{2} < x < 0$	$x = -\frac{\pi}{2}$	שיעור ה-x
קצה תחום	$-$	נקודת אפס	$+$	נקודת אי-הגדרה	$-$	קצה תחום	סימן הפונקציה

ולכן מצאנו שתחום החיוביות הוא: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ותחום השליליות הוא: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

II. עבור $g(x)$:

$x = \frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$x = 0$	$-\frac{\pi}{2} < x < 0$	$x = -\frac{\pi}{2}$	שיעור ה-x
קצה תחום	$-$	נקודת אי-הגדרה	$+$	נקודת אפס	$-$	קצה תחום	סימן הפונקציה

ולכן מצאנו שתחום החיוביות הוא: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ותחום השליליות הוא: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

ב. נתון שלמשוואה $x\cdot\sin x+\cos x=0$ יש פתרון אחד בלבד בתחום : $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

נשרטט סקיצות של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הפונקציה $g(x)$:

בסעיפים הקודמים מצאנו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ וכן את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות. לפני שנוכל לשרטט את הגרפים ננסה למצוא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות.

נגזור את $f(x)$:

$$f(x)=\frac{\cos x}{x}\ \rightarrow\ f'(x)=\frac{-\sin x\cdot x-\cos x\cdot 1}{x^2}\ \rightarrow\ f'(x)=\frac{-(x\sin x+\cos x)}{x^2}$$

נשווה את $f'(x)$ לאפס :

$$f'(x)=0\ \rightarrow\ \frac{-(x\sin x+\cos x)}{x^2}=0\ \rightarrow\ -(x\sin x+\cos x)=0\ \rightarrow\ x\sin x+\cos x=0$$

נגזור את $g(x)$:

$$g(x)=\frac{x}{\cos x}\ \rightarrow\ g'(x)=\frac{1\cdot\cos x-x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}\ \rightarrow\ g'(x)=\frac{x\sin x+\cos x}{\cos^2 x}$$

נשווה את $g'(x)$ לאפס :

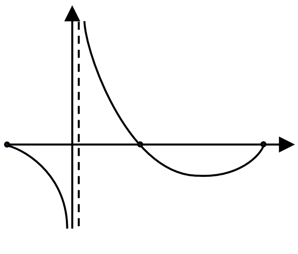
$$g'(x)=0\ \rightarrow\ \frac{x\sin x+\cos x}{\cos^2 x}=0\ \rightarrow\ x\sin x+\cos x=0$$

בשני המקרים קיבלנו את המשוואה $x\cdot\sin x+\cos x=0$ שאינה פתירה באמצעות הכלים שיש ברשותנו במסגרת שאלון 571 ולכן אין ביכולתנו למצוא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

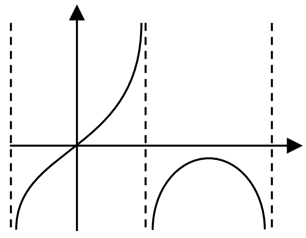
מצד שני, **נתון** לנו שלמשוואה $x\cdot\sin x+\cos x=0$ יש פתרון אחד בלבד בתחום : $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ ולכן אנו יודעים שלכל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש לכל היותר נקודת קיצון אחת בתחום.

כעת נוכל לשרטט את הגרפים של שתי הפונקציות :

עבור הפונקציה $f(x)$: קיימות שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-x, כאשר בשמאלית מביניהן הפונקציה עוברת מחיוביות לשליליות. הפונקציה מוגדרת בין נקודות החיתוך ולכן נצפה לראות שם שינוי במגמת הפונקציה מירידה לעלייה.
לכן נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה תתקבל בין שתי נקודות אלו :



עבור הפונקציה $g(x)$: בין האסימפטוטות האנכיות הימנית והאמצעית הפונקציה תמיד שלילית ומוגדרת ולכן נצפה לראות שם שינוי במגמת הפונקציה מעלייה לירידה. לכן נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה תתקבל בתחום זה :



ג. בתחום הנתון, נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ הן $A(x_A, y_A)$ ו- $B(x_B, y_B)$, בהתאמה. מבין שלוש הטענות הבאות: **i.** $x_B < x_A$ **ii.** $x_B = x_A$ **iii.** $x_A < x_B$

נראה מדוע ii היא הנכונה:

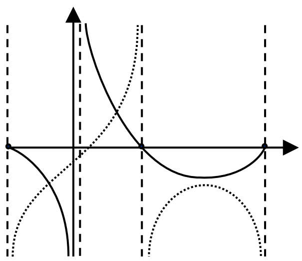
בסעיף ב׳ ראינו ששיעור ה-x של נקודת הקיצון של $f(x)$ הוא פתרון המשוואה: $x\sin x + \cos x = 0$.

בנוסף ראינו שגם שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $g(x)$ הוא פתרון המשוואה: $x\sin x + \cos x = 0$.

מכאן ששיעורי ה-x של נקודות הקיצון של שתי הפונקציות זהים ולכן מתקיים: $x_B = x_A$ וטענה ii היא הנכונה.

ד. נתון: $y_B < y_A$. נקבע כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x)=g(x)$ בתחום: $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$:

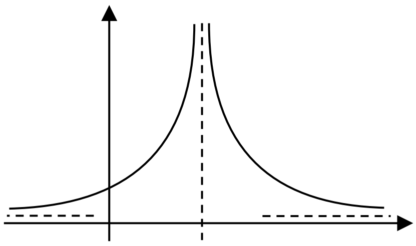
נשרטט את שני הגרפים על אותה מערכת צירים - גרף $f(x)$ בקו רציף ו- $g(x)$ במנוקד.



מהנתון $y_B < y_A$ נובע שנקודת __המינימום__ של $f(x)$ נמצאת __מעל__ נקודת __המקסימום__ של $g(x)$ ולכן אין לגרפים נקודות חיתוך בתחום: $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$. בנוסף, מהשרטוט המשותף ניתן לראות שבכל אחד מהתחומים: $-\frac{\pi}{2} \le x \le 0$ ו- $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ הגרפים נחתכים פעם אחת בלבד ולכן יש להם בסך הכל שתי נקודות חיתוך.

מכאן נובע שבתחום: $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ למשוואה: $f(x)=g(x)$ יש שני פתרונות.

שאלה 8



לפניכם גרף הפונקציה : $f(x)=\frac{8}{(x-5)^2}$.

א. נמצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים :

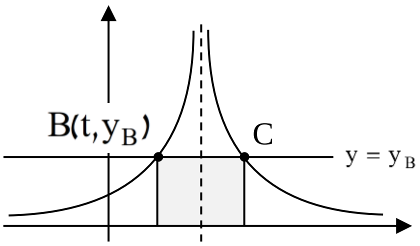
I. אסימפטוטה אנכית :

$f(x)$ היא פונקציית מנה ולכן היא אינה מוגדרת עבור ערכי x המאפסים את המכנה שלה. המכנה של הפונקציה מתאפס רק עבור $x=5$ ולכן זו האסימפטוטה האנכית היחידה של הפונקציה $f(x)$.

II. אסימפטוטה אופקית :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{(x-5)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{x^2-10x+25}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{10x}{x^2}+\frac{25}{x^2}}\approx\frac{0^+}{1-0^{\pm}+0^+}\approx 0$$

ולכן האסימפטוטה האופקית של $f(x)$ היא $y=0$.



ב. הנקודה $B(t,y_B)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון : $0<t<5$. הישר $y=y_B$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות B ו-C. הקטע BC הוא צלע במלבן שאחת מצלעותיו נמצאת על ציר ה-x.

1. נביע באמצעות t את שיעור ה-x של הנקודה C :

ראשית נבטא את שיעור ה-y של הנקודה B באמצעות t על ידי הצבה בפונקציה $f(x)$: $f(t)=\frac{8}{(t-5)^2}$.

הנקודות B ו-C נמצאות על אותו ישר המקביל לציר ה-x ולכן הן בעלות שיעור y זהה. כעת כאשר ידוע לנו שיעור ה-y של הנקודה C נציב אותו בפונקציה כדי למצוא את שיעור ה-x של הנקודה :

$$f(x)=\frac{8}{(t-5)^2}\ \rightarrow\ \frac{8}{(x-5)^2}=\frac{8}{(t-5)^2}\ \rightarrow\ 8\cdot(t-5)^2=8\cdot(x-5)^2\ \rightarrow\ (x-5)^2=(t-5)^2$$

נוציא שורש משני אגפי המשוואה ונקבל : $x-5=\pm(t-5)$.

עבור השורש החיובי נקבל :

$$x-5=+(t-5)\ \rightarrow\ x-5=t-5\ \rightarrow\ x=t$$

אך זהו שיעור ה-x של הנקודה B ולכן אינו יכול להתאים לנקודה C.

עבור השורש השלילי נקבל:

$$x-5=-(t-5) \rightarrow x-5=-t+5 \rightarrow x=-t+10$$

ולכן שיעור ה-x של הנקודה C הוא: $x_C=-t+10$.

2. נמצא את t שבעבורו היקף המלבן מינימלי ונמצא את היקף המלבן המינימלי:

I. אורך הצלע BC שווה להפרש שבין שיעור ה-x של הנקודה C לבין שיעור ה-x של הנקודה B:

$$BC=x_C-x_B \rightarrow BC=(-t+10)-(t) \rightarrow BC=-2t+10$$

אורך הצלע הניצבת ל-BC שווה לשיעור ה-y של הישר עליו נמצאת הצלע BC: $\frac{8}{(t-5)^2}$.

II. נבטא באמצעות t את היקף המלבן:

$$P(t)=2\cdot(-2t+10)+2\cdot\frac{8}{(t-5)^2} \rightarrow P(t)=-4t+20+\frac{16}{(t-5)^2}$$

זוהי פונקציה לפי המשתנה t ולכן כדי למצוא את ערכה המינימלי תחילה נגזור את הפונקציה:

$$P'(t)=-4+0+\frac{0\cdot(t-5)^2-16\cdot2\cdot(t-5)\cdot1}{(t-5)^4} \rightarrow P'(t)=-4-\frac{32}{(t-5)^3}$$

כעת נשווה את הנגזרת לאפס כדי למצוא את הנקודות החשודות בתור קיצון:

$$P'(t)=0 \rightarrow -4-\frac{32}{(t-5)^3}=0 \rightarrow -4=\frac{32}{(t-5)^3} \rightarrow -4\cdot(t-5)^3=32 \rightarrow (t-5)^3=-8$$

נוציא שורש שלישי משני אגפי המשוואה ונקבל:

$$(t-5)^3=-8 \rightarrow t-5=-2 \rightarrow t=3$$

נציב את הנקודה שמצאנו בטבלה עלייה וירידה כדי למצוא את סוג הקיצון:

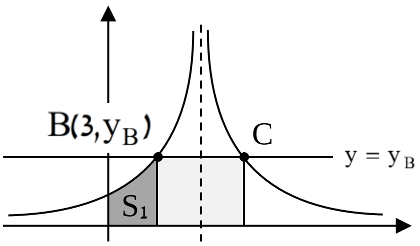
שיעור ה-t	$t<3$	$t=3$	$3<t$
סימן הנגזרת	$-$		$+$
מגמת הפונקציה (עלייה/ירידה)	↘	min	↗

ומצאנו שעבור $t=3$ הפונקציה שמייצגת את היקף המלבן מקבלת ערך מינימלי.

כדי למצוא את ההיקף המינימלי נציב את שיעור ה-t שמצאנו בפונקציית ההיקף $P(t)$:

$$P(3)=-4\cdot3+20+\frac{16}{(3-5)^2} \rightarrow P(3)=12$$

לסיכום, מצאנו שעבור $t=3$ מתקבל ההיקף המינימלי שאורכו 12 יח'.



ג. נתון: היקף המלבן הוא 12 יח'.
נחשב את השטח המוגבל בין הצלע השמאלית של המלבן
לבין גרף הפונקציה $f(x)$ והצירים:

נסמן את השטח המבוקש ב-S_1.

היקף המלבן הנתון הוא הערך המינימלי שמצאנו בסעיף ב'2 ולכן נסיק ש- $t = 3$.

מצאנו שהשטח המבוקש כלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין ציר ה-x בתחום שבין $x = 0$ ל- $x = 3$ ולכן נוכל לחשב אותו באמצעות האינטגרל הבא:

$$S_1 = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{8}{(x-5)^2}dx = 8\cdot\int_0^3 \frac{1}{(x-5)^2}dx = 8\cdot\int_0^3 (x-5)^{-2}dx$$

$$\rightarrow S_1 = 8\cdot\left[\frac{(x-5)^{-1}}{-1}\right]_0^3 = 8\cdot\left[\frac{-1}{x-5}\right]_0^3 = -8\cdot\left[\frac{1}{x-5}\right]_0^3 = -8\cdot\left[\left(\frac{1}{3-5}\right)-\left(\frac{1}{0-5}\right)\right] = -8\cdot\left[\left(\frac{1}{-2}\right)-\left(\frac{1}{-5}\right)\right]$$

$$= -8\cdot\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right] = -8\cdot\left(-\frac{3}{10}\right) = \frac{24}{10} = 2.4$$

לכן <u>השטח המבוקש הוא 2.4 יח"ר</u>.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=(9-n)\cdot f(x)$ (n טבעי) שהגרף שלה חותך את ציר ה-y מעל ראשית הצירים.

1. נמצא את טווח ערכי n האפשריים לפי הנתון:

כפל של הפונקציה $f(x)$ בקבוע שאינו אפס יביא למתיחה או כיווץ שלה ביחס לציר ה-x. עבור קבוע שלילי יתקבל בנוסף שיקוף ביחס לציר ה-x. כיוון שהפונקציה $f(x)$ עצמה כבר חותכת את ציר ה-y מעל לראשית הצירים כל מתיחה או כיווץ שאינם כוללים שיקוף, יובילו לפונקציה חדשה שתחתוך גם היא את ציר ה-y מעל לראשית הצירים. לכן הקבועים המתאימים הם כל המספרים החיוביים.

נבדוק מתי המקדם של $f(x)$ בפונקציה $g(x)$ יהיה חיובי ונקבל: $0 < 9-n \rightarrow n < 9$

כיוון ש-n מספר טבעי הערכים האפשריים הם כל המספרים הטבעיים בטווח: $1 \le n \le 8$.

<u>נשים לב</u> שעבור $n = 9$ אמנם לא יתבצע שיקוף אך במקרה זה מתקבלת הפונקציה $g(x) = 0\cdot f(x) = 0$ החותכת את ציר ה-y בראשית הצירים ולא מעליו ולכן אינה מקיימת את התנאי הנדרש.

2. כאשר היקף המלבן מינימלי, נמצא את טווח הערכים האפשריים של השטח המוגבל בין הישר $x=t$ לבין גרף הפונקציה $g(x)$ והצירים.

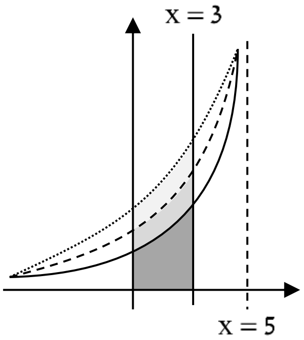
נתון שהיקף המלבן מינימלי ולכן מתקיים $t=3$ ונסיק שהשטח המבוקש הוא השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$ לבין הצירים, בתחום שבין $x=0$ לבין $x=3$.

נראה כיצד הצבת ערכי n שונים תשפיע על גודלו של שטח זה:

עבור $n=8$ נקבל $g(x)=(9-8)\cdot f(x)=1\cdot f(x)$ ולכן במקרה זה $g(x)=f(x)$

עבור $n=7$ נקבל $g(x)=(9-7)\cdot f(x)=2\cdot f(x)$ ולכן במקרה זה $g(x)=2\cdot f(x)$.

עבור $n=6$ נקבל $g(x)=(9-6)\cdot f(x)=3\cdot f(x)$ ולכן במקרה זה $g(x)=3\cdot f(x)$.



בשרטוט משמאל ניתן לראות את גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $x<5$.

הגרף הרציף מייצג את $g(x)$ המתקבלת עבור $n=8$, כלומר $g(x)$ שזהה ל- $f(x)$.

הגרף המקווקו מייצג את $g(x)$ המתקבלת עבור $n=7$. ניתן לראות שהשטח הכלוא גדל בהשוואה לשטח שהתקבל קודם לכן.

הגרף המנוקד מייצג את $g(x)$ המתקבלת עבור $n=6$. ניתן לראות שהשטח הכלוא גדל אף יותר בהשוואה לשטח שהתקבל קודם לכן.

מכאן שאם נמשיך באופן דומה עבור ערכי n הולכים וקטנים נקבל שטח שהולך וגדל עד לערך המקסימלי שיתקבל בקצה התחום עבור $n=1$, בהתאם לטווח הערכים שמצאנו בסעיף ד'1.

אנו מחפשים את טווח הערכים עבור השטח שתואר ולכן יש למצוא את ערכו המינימלי וערכו המקסימלי:

הערך המינימלי המתקבל כאשר $n=8$ והפונקציה היא $g(x)=f(x)$, חושב בסעיף ג' וערכו 2.4 יח"ר.

הערך המקסימלי המתקבל כאשר $n=1$ והפונקציה היא $g(x)=8\cdot f(x)$ יחושב באופן הבא:

$$S_{max}=\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 8\cdot f(x)dx=8\cdot\int_0^3 f(x)dx=8\cdot 2.4=19.2$$

כאשר את האינטגרל בתוכו נמצאת רק הפונקציה $f(x)$ חישבנו כבר בסעיף ג'.

מצאנו את השטח המינימלי ואת השטח המקסימלי ולכן נוכל לקבוע שעבור השטח המבוקש S טווח הערכים הוא: 19.2 יח"ר $\le S \le$ 2.4 יח"ר.

