נושא 5 - טריגונומטריה

* דף נוסחאות מפורט בטריגונומטריה מופיע בעמוד 370.

פונקציות טריגונומטריות מאפשרות לנו למצוא קשר בין יחסי צלעות המשולש לבין זוויותיו.

טריגונומטריה במשולש ישר זווית

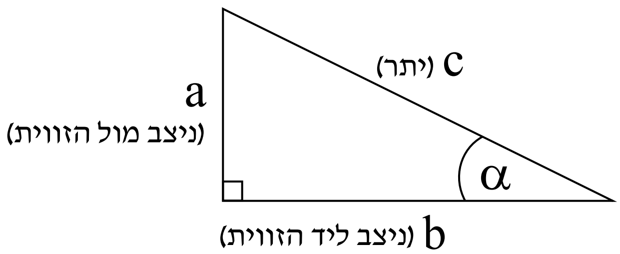
במשולש ישר זווית נשתמש ביחסים הבאים:

$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{הניצב שמול הזווית}} = \frac{b}{a}$$

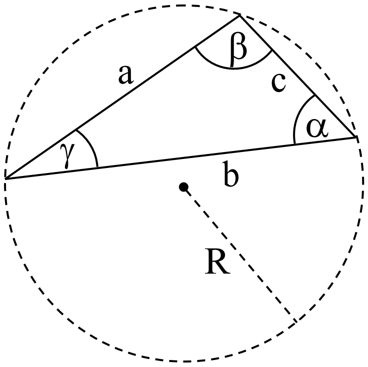


חשוב:
1. בשאלות במשולש ישר זווית לרוב נקבל שני נתונים (זוויות או צלעות) וכדי למצוא את הנתון השלישי (זווית/צלע), נשתמש בפונקציה המתאימה מבין הארבע בכדי להגיע לפתרון.
2. בכל שימוש, חובה לציין באיזה משולש אנו מבצעים את החישובים.
3. מותר ואף רצוי להשתמש במשפט פיתגורס בכל עת.

משפטי עזר בגיאומטריה שיסייעו בשאלות בהן הצורה מתפרקת למשולשים ישרי זווית (רשימה חלקית):

1. במלבן ובריבוע - האלכסונים שווים זה לזה וחוצים זה את זה.
2. במקבילית ובמעוין - האלכסונים חוצים זה את זה.
3. במעוין ובריבוע - האלכסונים מאונכים זה לזה וחוצים את הזוויות.
4. במשולש שווה שוקיים, הגובה לבסיס הוא גם חוצה זווית הראש ותיכון.
5. האלכסונים בטרפז שווה שוקיים שווים זה לזה.
6. בשאלות עם טרפז, לרוב נצטרך להוריד גובה כבניית עזר, מקדקודי הבסיס הקטן.
7. בשאלות עם טרפז שווה שוקיים, נוריד שני גבהים וכך נקבל מלבן ושני משולשים חופפים.

משפט הסינוסים



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

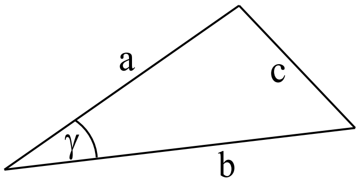
משפט הסינוסים מתקיים ב<u>כל משולש</u> ומשמעותו היא:
היחסים בין הצלעות לבין סינוסי הזוויות ש<u>מולן</u> שווים זה לזה ולקוטר <u>המעגל החוסם את המשולש</u> ($2R$).

בכל שימוש במשפט, <u>חובה לציין את המשולש בו אנו מבצעים חישובים</u>.

במשפט הסינוסים ניתן להשתמש כאשר ידועים לנו אורכי שתי צלעות והזווית שמול אחת מהן (צ.צ.ז) או כאשר ידועות שתי זוויות ואורך של צלע שמול אחת מהן (ז.ז.צ).

אולם, כאשר ידועים לנו אורכי שלוש צלעות (צ.צ.צ) או אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן (צ.ז.צ) לא ניתן להשתמש במשפט הסינוסים ובמקום זאת נשתמש במשפט הקוסינוסים המופיע בהמשך העמוד.

משפט הקוסינוסים



משפט הקוסינוסים מתקיים <u>בכל משולש</u> וניתן להציגו בשני אופנים:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

ולאחר בידוד $\cos\gamma$:

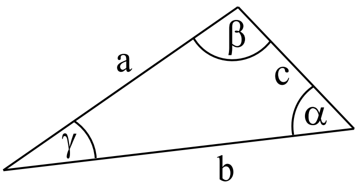
$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

בהצגה זו נשתמש כאשר ידועים לנו אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן (צ.ז.צ) ואנו רוצים למצוא את הצלע השלישית

בהצגה זו נשתמש כאשר ידועים לנו אורכי שלוש הצלעות (צ.צ.צ) ואנו רוצים למצוא את זוויות המשולש

בכל שימוש במשפט, <u>עלינו לציין את המשולש בו אנו מבצעים חישובים</u>.
כשנידרש לחשב זוויות, לעיתים נקבל שתי תשובות וכמובן נפסול את הזווית שאינה אפשרית בתוך משולש.

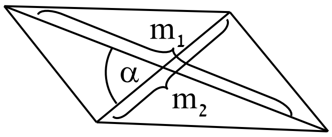
חישוב שטח משולש



ניתן לחשב את שטחו של כל משולש באמצעות הנוסחה: $S=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$.
נשתמש בנוסחה זו כאשר ידועים לנו אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן (צ.ז.צ).

אם ניעזר במשפט הסינוסים נוכל לחלץ מתוך הנוסחה הרגילה, נוסחה נוספת: $S=\frac{a^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.
נשתמש בנוסחה זו כאשר אנו יודעים אורך של צלע אחת ואת כל הזוויות.

חישוב שטח מרובע על פי אלכסוניו



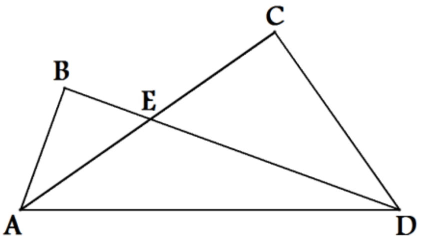
נסמן את אורכי האלכסונים באמצעות m_1 ו-m_2.

ניתן לחשב את שטחו של <u>כל מרובע</u> באמצעות אורכי אלכסוניו וסינוס הזווית ביניהם: $S=\frac{m_1\cdot m_2\cdot\sin\alpha}{2}$.
שימו לב שאין חשיבות באיזו מארבע הזוויות שבין האלכסונים נבחר (נקבל את אותו השטח).

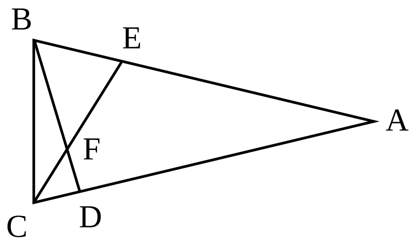
טריגונומטריה במישור - ללא מעגל - תרגול

השאלות בפרק זה עוסקות במשפטי הסינוסים והקוסינוסים ובחלקן נדרשות זהויות טריגונומטריות מתקדמות ומשוואות טריגונומטריות. ניתן להיעזר בדף הנוסחאות בטריגונומטריה בעמוד 370.

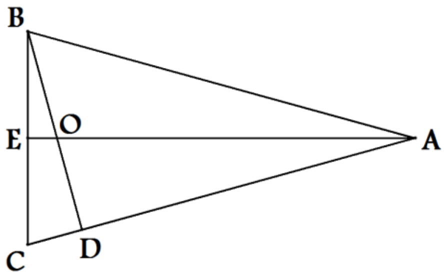
בפרק זה ניתן לצפות בחינם בפתרונות מוסרטים לשאלות 1 ו-8 באתר 'מתמטיקורס' בסריקת הברקוד:
ניתן לרכוש פתרון לשאלות נוספות לבחירתך



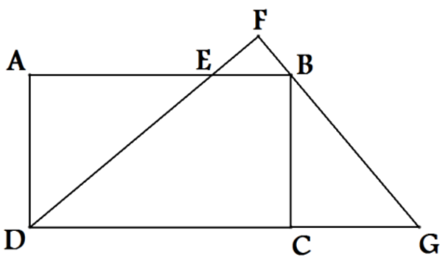
1. הצלע AD משותפת למשולשים ΔACD ו-ΔABD. הצלעות AC ו-BD נחתכות בנקודה E. הקטע AE חוצה את הזווית $\sphericalangle BAD$.
נתון: $CE =$ 4 ס"מ, $\sphericalangle ADB = 20°$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD = 90°$.
חשב את:
א. אורך הקטע AE.
ב. שטח המשולש ΔABE.
ג. שטח המשולש ΔADE.



2. במשולש ΔABC שווה השוקיים $(AB = AC)$, הגובה BD וחוצה הזווית CE נחתכים בנקודה F.
נתון: $BD =$ 10 ס"מ, $BC =$ 11 ס"מ. חשב את:
א. הזווית $\sphericalangle ACE$.
ב. הזווית $\sphericalangle BAC$.
ג. אורך הקטע AC.

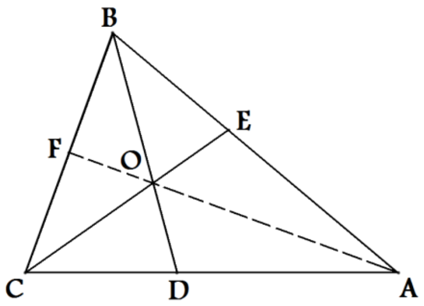


3. במשולש שווה השוקיים ΔABC ששטחו 28 סמ"ר, הקטע AE הוא הגובה לבסיס BC. נתון: $AB = AC =$ 10 ס"מ.
הזווית $\sphericalangle BAC$ חדה.
א. חשב את הזווית $\sphericalangle DAO$.
ב. נתון שהגבהים AE ו-BD נחתכים בנקודה O.
חשב את שטחי המשולשים:
1. ΔABO. 2. ΔADO.



4. נתונים המשולש ישר הזווית ΔDFG $(\sphericalangle DFG = 90°)$ והמלבן $ABCD$. הקדקוד B נמצא על הצלע FG.
הצלע DF חותכת את המלבן בנקודה E.
נתון: $CG =$ 5 ס"מ, $\sphericalangle CGB = 50°$.
א. חשב את אורך הקטע BG.
ב. נתון: שטח המשולש ΔBEF הוא 21 סמ"ר.
חשב את אורך הקטע BF.
ג. חשב את אורך הקטע CD.

5. במשולש שווה השוקיים ΔABC חוצי הזוויות BD ו-CE נחתכים בנקודה O. המשכו של הישר AO חותך את הבסיס BC בנקודה F. נסמן: $BC = 2k$. נתון: $BO = 1.3BF$.

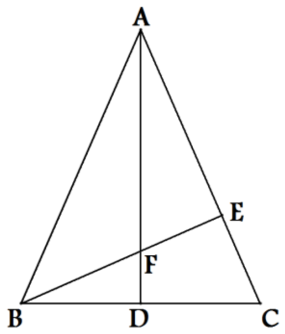


א. חשב את הזוויות:
1. $\sphericalangle EBO$.
2. $\sphericalangle BOE$.

ב. הבע באמצעות k את שטח המשולש ΔBEO.

ג. נתון ששטח המשולש ΔBEO הוא 56 סמ"ר.
חשב את אורך BE.

6. הישרים AD ו-BE הם גבהים במשולש שווה השוקיים ΔABC $(AB = AC)$.
נסמן: $AC = AB = a$, $\sphericalangle ACB = \alpha$.

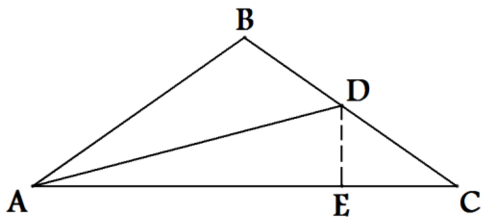


א. הבע באמצעות α את היחס בין שטחי המשולשים: $\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta ABD}}$.

ב. חשב את היחס $\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta ABD}}$ בהינתן ש: $\alpha = 45^\circ$.

ג. ללא קשר לסעיף ב', נתון: $S_{\Delta BCE} = 3 \cdot S_{\Delta ABD}$. מצא את α.

7. הקטע AD הוא חוצה זווית במשולש שווה השוקיים ΔABC $(BC = AB)$ ששטחו 45 סמ"ר.
נתון: $\sphericalangle ABC = 110^\circ$. מהנקודה D יוצא ישר המאונך לבסיס AC וחותך אותו בנקודה E. חשב את:

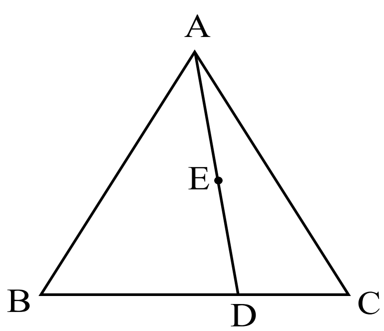


א. אורך חוצה הזווית AD.

ב. היקף המשולש ΔAED.

ג. שטח המשולש ΔACD.

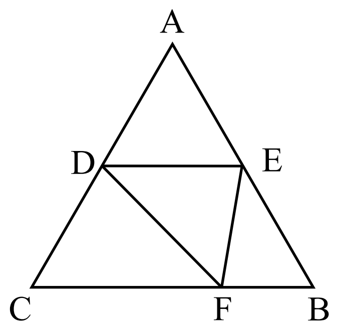
8. המשולש ΔABC הוא שווה צלעות והיקפו 24 ס"מ.
הנקודה D נמצאת על הצלע BC כך שמתקיים: $BD = 3CD$.
הזווית $\sphericalangle ADC$ קהה. חשב את:



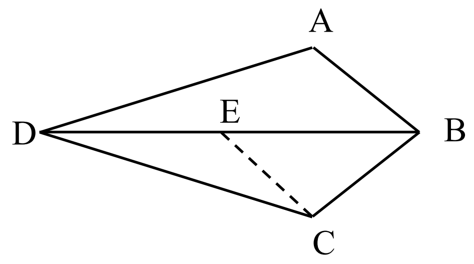
א. אורך הקטע AD.

ב. גודל הזווית $\sphericalangle BAD$.

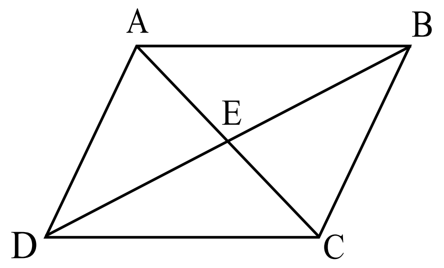
ג. אורך התיכון BE במשולש ΔABD.



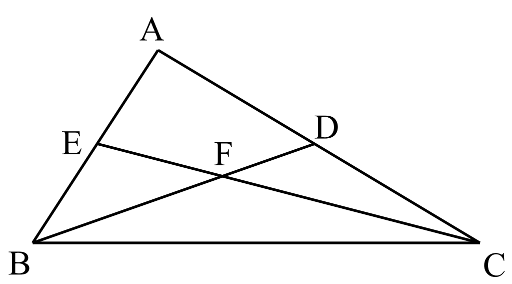
9. הישר DE הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC שווה הצלעות שהיקפו 36 ס"מ. הנקודה F נמצאת על הצלע BC כך ש: $CF = 2BF$.
חשב את:
א. אורך הקטע EF.
ב. אורך הקטע DF.
ג. שטח המשולש ΔDEF.



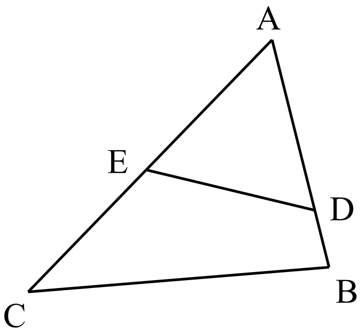
10. ABCD הוא דלתון $(AB = BC)$. נסמן: $\sphericalangle BAD = \alpha$.
נתון: $AB =$ 6 ס"מ , $AD =$ 12 ס"מ.
א. הבע באמצעות α את שטח המשולש ΔABD.
ב. נתון: שטח הדלתון הוא $36\sqrt{3}$ סמ"ר.
הזווית α קהה. מצא את α.
ג. הצב $\alpha = 120°$ וחשב את הזווית $\sphericalangle ABD$.
ד. הנקודה E היא אמצע האלכסון BD.
חשב את אורך הקטע CE.



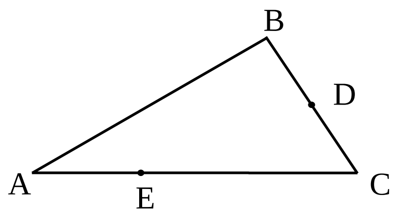
11. נתונה המקבילית ABCD שאלכסוניה נחתכים בנקודה E.
נסמן: $AB = m$, $\sphericalangle BDC = \alpha$, $\sphericalangle BAC = \beta$.
א. הבע באמצעות α , β ו-m את שטח המקבילית.
ב. נתון: $\alpha = 14°$, $\beta = 31°$. שטח המקבילית הוא 34 סמ"ר.
חשב את אורכי אלכסוני המקבילית.



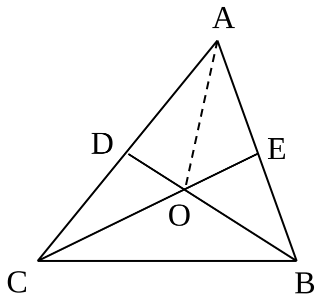
12. במשולש ΔABC אורכי התיכונים BD ו-CE הנחתכים בנקודה F הם בהתאמה 3a ו-4.5a. נתון: $\sphericalangle DFC = 29°$.
הזוויות $\sphericalangle BDC$ ו- $\sphericalangle BEC$ קהות.
א. הבע באמצעות a את:
1. אורך הצלע BC.
2. היקף המשולש ΔABC.
ב. נתון: היקף המשולש ΔABC הוא 20 ס"מ.
חשב את שטח המשולש ΔBCF.



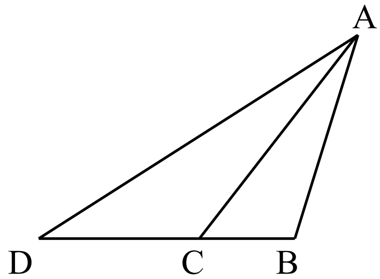
13. הנקודות D ו-E נמצאות על צלעות במשולש ΔABC כמתואר בשרטוט. נתון: $AD = 3BD$, $CE = AE$.
נסמן: $BD = b$, $\sphericalangle BAC = \alpha$.
א. חשב את היחס בין שטחי המשולשים: $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}$.
ב. נתון: $AD = AE =$ 3 ס״מ. הבע באמצעות α את:
1. אורך הקטע DE.
2. אורך הקטע BC.
ג. נתון: $BC = 2DE$. חשב את α.



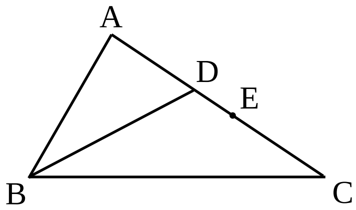
14. במשולש ΔABC נסמן: $BC = 2m$.
נתון: $AC = 2BC$, $\sphericalangle ACB = 60°$.
א. חשב את הזווית $\sphericalangle BAC$.
ב. הנקודה D היא אמצע BC. הנקודה E נמצאת על AC כך ש: $CE = 3AE$. נתון: $DE = \sqrt{7}$ ס״מ. מצא את m.
ג. הצב $m = 1$. חשב את שטח המרובע ABDE.



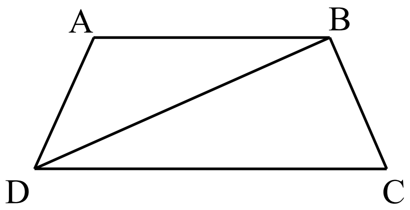
15. במשולש ΔABC התיכונים BD ו-CE נחתכים בנקודה O.
נתון: $DO =$ 2 ס״מ, $EO =$ 3 ס״מ, $\sphericalangle EOB = 50°$. חשב את:
א. אורך הצלע BC.
ב. אורך הצלע AB.
ג. שטח המשולש ΔABO.



16. במשולש ΔABC הנקודה C נמצאת על BD כך שמתקיים:
$CD = 2BC$. נתון: $AC = BD$. נסמן: $\sphericalangle ACB = \beta$.
א. הבע באמצעות β את היחס: $\frac{AD}{AB}$.
ב. נתון: $AD = 2AB$. מצא את β.
ג. הצב $\beta = 41.41°$. שטח המשולש ΔACD הוא 20 סמ״ר.
חשב את אורך AC.



17. (*) במשולש ΔABC הישר BD הוא חוצה זווית.
נסמן: $\sphericalangle BAD=\beta,\ \sphericalangle ABD=\alpha,\ AC=m$.
א. הבע באמצעות α ו-β את ערך המנה: $\frac{BC}{AB}$.
ב. נתון: $\alpha=30^\circ$, $BC=2AB$. מצא את β.
ג. הצב $\beta=90^\circ$. הנקודה E נמצאת על CD כך שנתון: $CE=2$ ס"מ.
הבע באמצעות m את אורך BE.



18. (*) הטרפז ABCD שווה שוקיים. האלכסון BD מאונך לשוק BC.
נסמן: $\sphericalangle BDC=\alpha,\ AB=m$.
א. הבע באמצעות α ו-m את אורך האלכסון BD.
ב. נתון: $BD=1.5AB$. מצא את α.
ג. הצב $\alpha=26.728^\circ$. נתון: $AD=10$ ס"מ. מצא את m.

תשובות:

1) א. 4.16 ס"מ. **ב.** 4.05 סמ"ר. **ג.** 11.86 סמ"ר. **2) א.** 32.69°. **ב.** 49.24°. **ג.** 13.2 ס"מ.
3) א. 17.03°. **ב. 1.** 12.68 סמ"ר. **2.** 10.51 סמ"ר. **4) א.** 7.78 ס"מ. **ב.** 5.94 ס"מ. **ג.** 16.32 ס"מ.
5) א. 1. 39.72°. **2.** 79.43°. **ב.** $0.607k^2$. **ג.** 14.04 ס"מ.
6) א. $\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta ABD}}=4\cos^2\alpha$. **ב.** $\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta ABD}}=2$. **ג.** $\alpha=30^\circ$. **7) א.** 11.58 ס"מ. **ב.** 26.16 ס"מ. **ג.** 27.97 סמ"ר.
8) א. 7.21 ס"מ. **ב.** 46.11°. **ג.** 6.08 ס"מ. **9) א.** 5.29 ס"מ. **ב.** 7.21 ס"מ. **ג.** 15.58 סמ"ר.
10) א. $36\sin\alpha$. **ב.** 120°. **ג.** 40.91°. **ד.** 5.19 ס"מ. **11) א.** $\frac{2m^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
ב. $AC=6.72$ ס"מ, $BD=14.31$ ס"מ. **12) א. 1.** 4.85a. **2.** 11.21a. **ב.** 4.61 סמ"ר. **13) א.** 0.375.
ב. 1. $\sqrt{18-18\cos\alpha}$. **2.** $\sqrt{52-48\cos\alpha}$. **ג.** 33.56°. **14) א.** 30°. **ב.** $m=1$. **ג.** 2.165 סמ"ר.
15) א. 9.1 ס"מ. **ב.** 6.19 ס"מ. **ג.** 9.19 סמ"ר. **16) א.** $\sqrt{\frac{13+12\cos\beta}{10-6\cos\beta}}$. **ב.** 41.41°. **ג.** 9.52 ס"מ.
17) א. $\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$. **ב.** 90°. **ג.** $\sqrt{\frac{4}{3}m^2-4m+4}$. **18) א.** $\frac{m\cdot\cos\alpha}{\cos2\alpha}$. **ב.** 26.728°. **ג.** 13.24 ס"מ.

