الفصل 10 - الزّوايا

مقدمة في الزّوايا

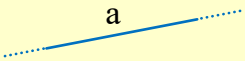
ما هي الهندسة؟

الهندسة هي فرع مركزيّ في الرّياضيات يبحث في مواضيع من بينها، النّقاط، والمستقيمات، والأشكال في المستوى والفراغ، وفي العلاقات بينها. يعود أصل كلمة هندسة (Geometry) إلى اليونانيّة القديمة، وتتكوّن من كلمتين: geo - وتعني الأرض، وَ metry - تعني القياس. لقد تطورت الهندسة في الأصل كأداة عمليّة لقياس الأراضي وأبعاد الأشياء، وتحوّلت على مرّ الأجيال إلى مجال رياضيّ واسع.

الهندسة الكلاسيكيّة، الّتي تُدرَّس اليوم في المدارس حول العالم، تعتمد في معظمها على المؤلّفات القديمة لعالم الرّياضيات اليونانيّ إقليدس الإسكندريّ (325 ق.م - 265 ق.م)، وهو أحد أعظم علماء الرّياضيات في التاريخ. بل إنّها تُسمّى على اسمه - 'هندسة إقليديّة'. تمثّلت مساهمتُه الهائلة في تنظيم الكثير من المعارف الرّياضيّة الّتي كانت معروفة بالفعل قبل عصره، وعَرَضَها في كتابه 'الأصول' (العناصر)، والذي يُعتبر أحد أكثر الكتب العلميّة تأثيرًا في التاريخ.

في الهندسة، تمّ تحديد **مفاهيم أساسية** مثل النقطة، والخطّ المستقيم، والمستوى، والتي لا نُعرّفها باستخدام مفاهيم أكثر بساطة، وهي تشكّل الأساس لتعريف مفاهيم أخرى كذلك. تم في الهندسة تحديد قواعد أساسيّة تُسمى **بديهيّات**، والّتي تصف العلاقات بين هذه المفاهيم الأساسيّة. البديهيّة هي قاعدة نفرض أنّها صحيحة، دون أن نبرهن صحّتها. على سبيل المثال، إحدى البديهيات في الهندسة الإقليدية هي القاعدة: "عَبْر كلّ نقطتين يمرّ مستقيم واحد ووحيد".

الخط المستقيم هو مفهوم أساسي لا نُعرّفه. في المرحلة الإعداديّة والثّانوية سنتناول الهندسة الإقليدية، وفي هذا السّياق يمكننا تخيّله بشكل حدسي كخطّ بدون سُمك، وهو عبارة عن مجموعة لانهائية من النّقاط المتلاصقة بعضها ببعض، لا ينحني ولا يلتوي، ويمتدّ بلا نهاية في كلا الاتجاهين.

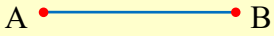


لنتمعّن في المستقيم الذي يظهر على اليسار. الخطوط المتقطّعة على الجانبين تمثّل امتداده اللّانهائي في كلا الطرفين، إذ لا يمكننا رسمه بالكامل. من المعتاد تسمية الخطوط المستقيمة بأحرف صغيرة كما هو موضّح في الرّسم حيث تمّت تسميته بالحرف a.

بمساعدة النقطة والخطّ المستقيم، سنُعرّف مفاهيم إضافية:

القطعة هي جزء من مستقيم، محدود بين نقطتين.

في الهندسة، من المعتاد تسمية النّقاط باستخدام أحرف كبيرة.



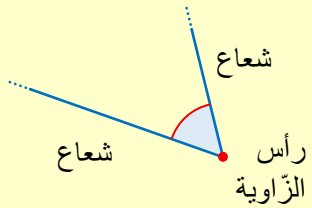
على الخطّ المستقيم على اليسار، تم تحديد النقاط AB والّتي هي أطراف قطعة يمكننا الرمز إليها وتسميتها القطعة AB أو القطعة BA. لا توجد أهمية لترتيب الأحرف.

الشعاع هو جزء من مستقيم محدود من جهة واحدة بواسطة نقطة.

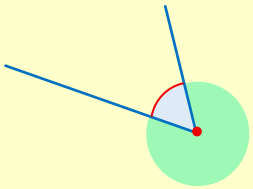
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

سنتناول في هذا الفصل موضوع الزّوايا.

الزّاوية هي شكل هندسيّ مكوّن من شعاعين
يخرجان من نقطة مشتركة تُسمّى **رأس الزّاوية**.
يُسمّى الشّعاعان **ساقي الزّاوية أو ضلعي الزّاوية**.
من هنا وصاعدًا، وللسّهولة، سنرسم ساقَي الزّوايا كقِطَع، وليس كأشعَّة.



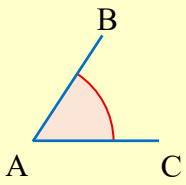
انتبهوا! شعاعان يخرجان من نفس النّقطة يصنعان **زاويتين**.
في الرّسم على اليسار يصنع الشّعاعان الزّاويتين الملوّنتين - الزّرقاء والخضراء.
من المتّبع الإشارة إلى الزّاوية برسم قوس مُنحنٍ.



1. انسخوا الرسم الذي على اليسارفي الدّفتر.
   أ. علِّموا رؤوس الزّوايا بلون **أزرق**.
   ب. لَوِّنوا بلون **أحمر** كلّ القطع الّتي هي سيقان لزوايا.

تسمية الزّوايا

المفهوم **"تسمية زوايا"** يشير إلى الطّريقة التي من خلالها "نعطي اسمًا" لزاوية بكتابة رياضيّة.
لنتمَعَّن في الزّاوية على اليسار. النّقطة A هي رأس الزّاوية منها يخرج
السّاقان AB وَ AC. نعرض الآن **إمكانيّتين** لتسمية الزّاوية باستخدام رموز:



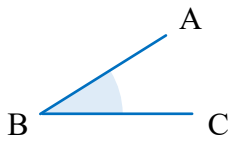
طريقة أ: تسمية الزّاوية باستخدام الأحرف الثّلاثة التي تظهر على ساقي الزّاوية.
في هذه التّسمية، وهي الأكثر قبولًا، تظهر الأحرف الثّلاثة بحيث يكون الحرف الذي يمثّل رأس الزّاوية في الوسط، وعلى الجانبين تظهر الأحرف التي تمثّل أطراف السّاقين. رأس الزّاوية الظّاهر في الرّسم هو A، لذلك سيظهر الحرف A في الوسط، وعلى جانبيه الحرفان B وَ C. أي أنّه، يمكننا تسمية الزّاوية الموجودة في الرّسم بأحد الخيارين: $\sphericalangle BAC$ أو $\sphericalangle CAB$.

طريقة ب: تسمية الزّاوية باستخدام رأس الزّاوية فقط.
رأس الزّاوية هو A، وبناءً على ذلك، يمكننا الإشارة إلى الزّاوية في الرّسم على أنها الزاوية A، ونضيف رمز الزاوية $\sphericalangle$. للتلخيص، الزّاوية الظّاهرة في الرّسم هي الزاوية $\sphericalangle A$.

في كلا الخيارين، سنرمز إلى الزّوايا باستخدام أحرف إنجليزية **كبيرة**، مثل A، B، C وَ D. وليس باستخدام أحرف صغيرة مثل a، b، c وَd. وكما سنرى لاحقاً، إنّ التسمية باستخدام حرف واحد لا تتناسب مع كل زاوية.

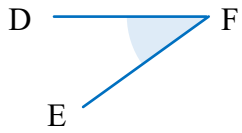
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

2. حددوا بأيّ من الخيارات التّالية يمكن تسمية الزّاوية الزّرقاء:



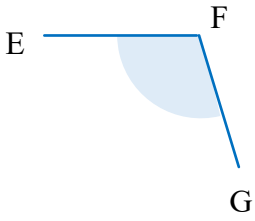
i. ∢ABC ii. ∢CBA iii. ∢CAB iv. ∢B v. ∢C

3. اقترحوا إمكانيّتين لتسمية الزّاوية الزّرقاء الّتي أمامكم باستخدام ثلاثة أحرف.

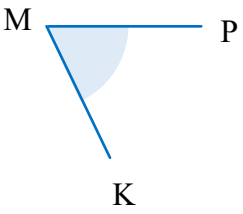


4. تظهر في كلّ بند زاوية زرقاء. اقترحوا إمكانيّتين لتسميتها:

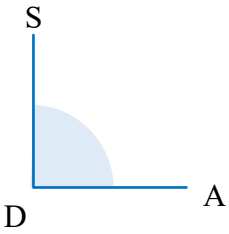
أ.



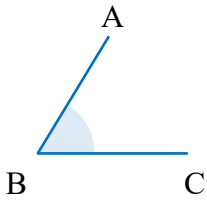
ب.



ج.



5. طُلِبَ من الصّف أن يُسَمّوا الزّاوية **الزّرقاء** المرسومة على اليسار.

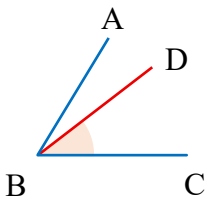


أ. اقترحت وداد: "نسمّي الزّاوية ∢ABC".

اقترح جلال: "نسمّي الزّاوية ∢B".

هل التّسميات (الرّموز) الّتي اقترحوها صحيحة؟ أيّ منها كنتم ستختارون؟ علّلوا.

ب. بعد أن مرّروا القطعة BD، طُلِبَ من الصّف تسمية الزّاوية **الحمراء** على اليسار. اقترحت وداد: "نسمّي الزاوية بـ ∢DBC".



اقترح جلال: "نسمّي الزّاوية بـ ∢B".

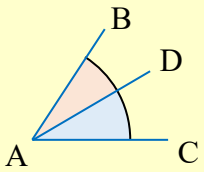
هل التسميات الّتي اقترحوها صحيحة؟ أيّ منها كنتم تختارون؟ اشرحوا.

ج. في أيّ حالات، حسب رأيكم، يُفضّل استخدام كلّ طريقة من طرق التّسمية التي اقترحها جلال ووداد؟

في السّؤال السّابق، تناولنا سلبيات وإيجابيات الطّرق التي تعلمناها لتسمية الزّوايا.

في الرّسم على اليسار الرأس A مشترك للزّاويتين الزّرقاء والحمراء.

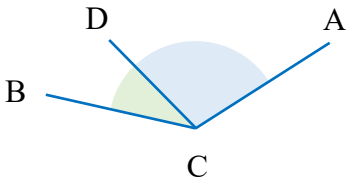
لا يمكننا تسمية هاتين الزّاويتين بنفس الاسم ∢A، لأنّ هذه التّسمية لا تُمَكِّنُنا من التّمييز بينهما. الحل هو التّسمية باستخدام ثلاثة أحرف:



الزّاوية الحمراء بـ ∢BAD أو بـ ∢DAB، والزّاوية الزّرقاء بـ ∢CAD أو بـ∢DAC.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

6. في الرّسم أمامكم، الرّأس C مشترك لِعِدَّة زوايا.



أ. أيّ من التّعابير التّالية يمثّل الزّاوية الزّرقاء؟

i. ∢ACD ii. ∢ACB iii. ∢C iv. ∢DCA

ب. أيّ من التّعابير التّالية يمثّل الزّاوية الخضراء؟

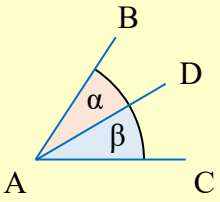
i. ∢DCB ii. ∢BCD iii. ∢C iv. ∢B

تسمية/ رمز مقدار الزّاوية باستخدام الأحرف اليونانية

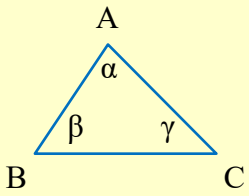
بعد أن عرضنا طرقاً مختلفة لتسمية زاوية، سنعرض الآن طريقة يمكننا من خلالها تسمية **مقدار** الزّاوية. هذه التّسمية تكون باستخدام أحرف يونانيّة:

على سبيل المثال، بمساعدة الأحرف ألفا α، بيتّا β، چاما γ، دِلتا δ.

في الرّسم مقدار الزّاوية الحمراء سُمّيَ أو رُمِز له بـ α، ومقدار الزّاوية الزّرقاء بـ β.

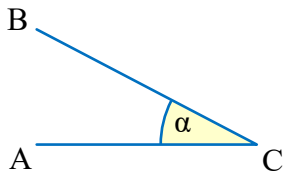


عندما نرمز بأحرف يونانيّة **لا نضيف** الإشارة ∢ ، على سبيل المثال، نكتب α ولا نكتب ∢α . يمكن استخدام الأحرف اليونانيّة كرُموز لمقادير زوايا في مضلّعات مختلفة. على سبيل المثال، من المُتَّبَع تسمية زوايا المثلّث باستخدام الأحرف α، β، وَγ، كما هو موصوف في الرّسم.



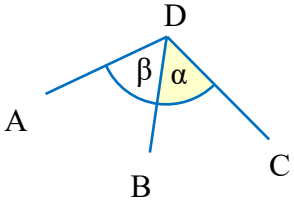
7. يظهر في كلّ بند رسم واحد وأربعة تعابير. حدّدوا أيًّا من التعابير **يُمثّل** الزّاوية الّتي مقدارها α، واشرحوا لماذا كلّ واحد من التّعابير الأخرى لا يمثّلها:

أ. الرّسم على اليسار. التّعابير:



i. ∢C ii. ∢B iii. ∢CBA iv. ∢ACB

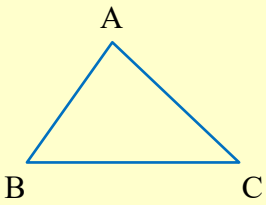
ب. الرّسم على اليسار. التّعابير:



i. ∢D ii. ∢CDB iii. ∢CBD iv. ∢BDC

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

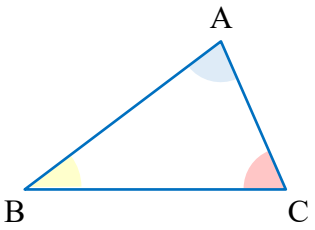
تسمية المثلّث



المفهوم **'تسمية مثلّث'** يشير إلى الطّريقة الّتي فيها "نعطي اسمًا" للمثلّث بكتابة رياضيّة. من المُتّبع تمثيل رؤوس مضلّع – مثلّث، شكل رباعي، مخمّس وما إلى ذلك – بواسطة أحرف لاتينيّة كبيرة. يظهر على اليسار مثلّث رؤوسه A، B، وَ C.

بناءً على ذلك، يمكننا تسمية المثلّث الظّاهر على اليسار بـالمثلّث ABC بإضافة الرمز Δ على النّحو التّالي: ΔABC . إذ أنّ ترتيب الأحرف في تسمية المثلّث **ليس مهمًا**، لذلك يمكننا تسمية المثلّث الظّاهر في الرّسم أيضًا بأيّ من الخيارات التالية: ΔACB ، ΔBAC ، ΔBCA ، ΔCAB ، ΔCBA .

8. أمامكم مثلّث.

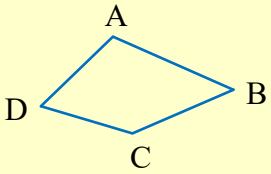


أ. اقترحوا **إمكانيّتين** لتسمية المثلّث.

ب. اقترحوا **إمكانيّتين** لتسمية الزّاوية.

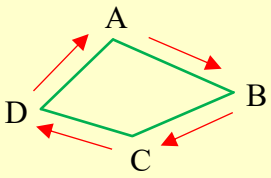
1. الزّرقاء. 2. الصّفراء. 3. الحمراء.

تسمية الشكل الرّباعيّ



يظهر على اليسار شكل رباعيّ رؤوسه A، B، C، وَ D. عندما نعطي اسمًا لشكل رباعيّ **هناك أهميّة للتّرتيب** الذي تظهر فيه الرّؤوس. نعرض طريقتين للتّسمية:

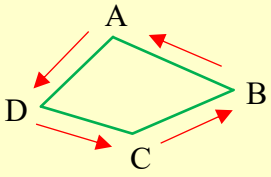
طريقة أ: كتابة الرّؤوس بترتيب يوافق إتّجاه عقارب السّاعة.



نختار أيّ رأس لنبدأ منه كتابة الأحرف، ونستمر في كتابة الأحرف التّالية وفقًا لترتيب ظهورها مع إتّجاه عقارب السّاعة. الحرف الذي يمثّل الرّأس الأوّل الّذي اخترناه سيظهر في جهة **اليسار**.

على سبيل المثال، إذا بدأنا من الرأس A، الحرف التّالي في الكتابة سيكون B، ثمّ C، وَD، فنحصل على ABCD. بشكل مشابه، يمكننا تسمية الشّكل الرّباعيّ الّذي يظهر على اليسار بـ BCDA، CDAB أو DABC.

طريقة ب: كتابة الرّؤوس بترتيب معاكس لإتّجاه عقارب السّاعة.



يمكننا تسمية الشّكل الرّباعيّ الذي يظهر على اليسار بـ ADCB ولكن أيضًا بـ: BADC، CBAD أو DCBA.

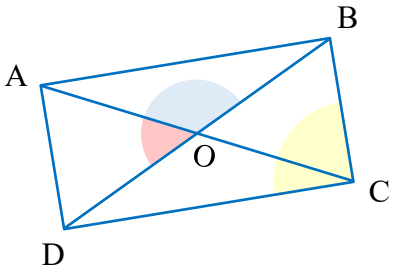
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

انتبهوا!

يجب التأكد من أنّ ترتيب الأحرف في تسمية الشّكل الرّباعي يطابق ترتيب الرّؤوس. على سبيل المثال، لا يمكننا تسمية الشّكل الرّباعي بـ ACBD لأن الرأس **B** **لا يقع** بين الرأسين **C** وَ **D** في الرّسم.

نشير إلى أنّه باستخدام هاتين الطّريقتين من المُتَّبع كتابة ترتيب الرّؤوس في المضلعات الأخرى أيضًا.

9. أقطار المستطيل على اليسار تتقاطع في النّقطة O.



أ. اقترحوا **طريقتين** لتسمية المستطيل.

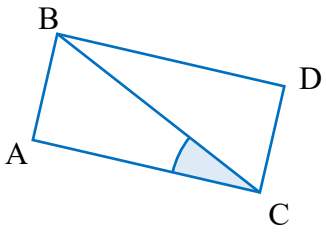
ب. اقترحوا **تسمية ممكنة** للزّاوية الزّرقاء وللزّاوية الحمراء.

ج. اقترحوا **طريقتين** لتسمية الزّاوية الصفراء.

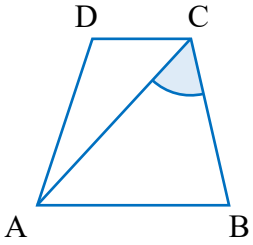
10. أ. في كلّ رسم يمكن تحديد شكل رباعيّ. اقترحوا **إمكانيّتين** لتسميته.

ب. في كلّ بند، اقترحوا **تسميتين ممكنتين** للزّاوية الزّرقاء.

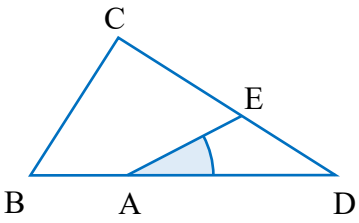
I.



II.



III.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

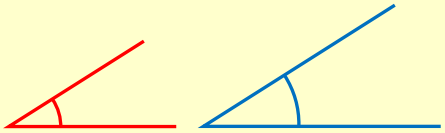
مقارنة مقادير زوايا

زوايا متساوية في المقدار

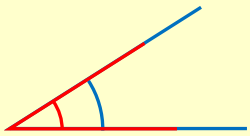
تمعّنوا في الزّاويتين اللّتين تظهران على اليسار.

سنحاول وضع الزّاوية الحمراء على الزّاوية الزّرقاء بحيث:

1. يتّحد رأسا الزّاويتين.
2. تتّحد ساقا الزّاويتين.



إذا تحقّق الشرطان، نستنتج أنّ الزّاويتين متساويتان.

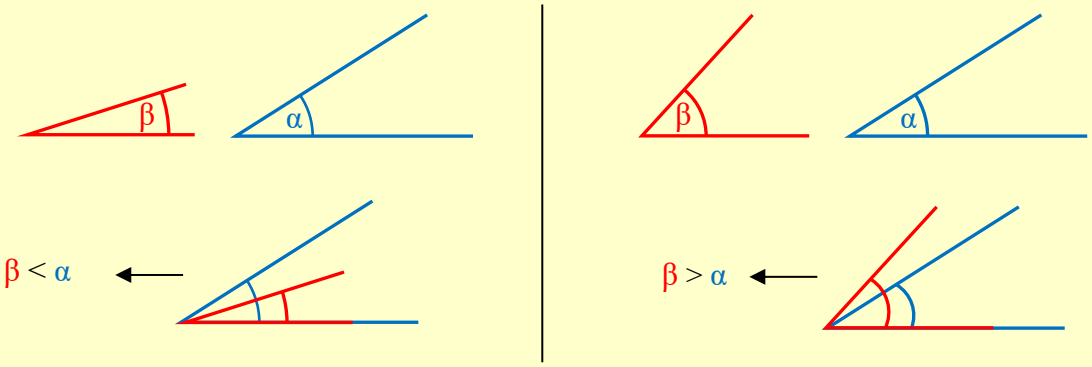


انتبهوا! الزّاويتان متساويتان في المقدار رغم أن ساقي الزاوية الزّرقاء أطول من ساقي الزّاوية الحمراء. أي أنّ، **مقدار الزّاوية لا يتعلّق بطول الساقين.**

زوايا مختلفة في المقدار

نتمعّن في الزّاوية الزّرقاء الّتي مقدارها α وفي الحمراء الّتي مقدارها β. نضع الزّاوية الحمراء على الزّاوية الزّرقاء بحيث يتّحد الرأسان، وإحدى ساقي الزّاوية الحمراء تتّحد مع إحدى ساقي الزّاوية الزّرقاء. وإذا لم تتّحد السّاقان الأخريان، نستنتج أنّ الزّاويتين **مختلفتان**.

في المثال الأيمن الزّاوية الحمراء أكبرمن الزّاوية الزّرقاء. في المثال الأيسر الزّاوية الزّرقاء هي الأكبر.



ادخلوا الفعالية الرقميّة (الديجيتالية) التي تظهر في الأعلى على اليسار، وقارنوا بين مقادير زوايا.

11. في كلّ بند، تظهر زاوية حمراء وزاوية زرقاء وُضِعت إحداهما على الأخرى، بحيث أنّ لهما رأسًا مشتركًا وساقًا مشتركة. حدّدوا أيّ الزّاويتين - الحمراء أم الزّرقاء - هي الأكبر:

أ. ب. ج. د.

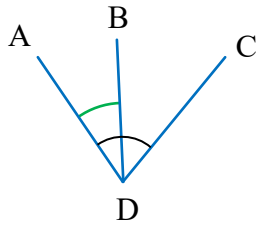
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

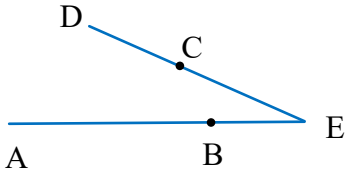
12. استعينوا بالرّسم، وأكملوا في الدّفتر بإحدى الإشارات > ، = ، < :

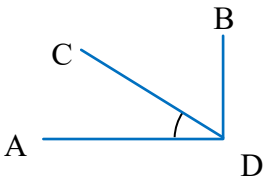
أ. ∢ADB ▢ ∢ADC

ب. ∢CEB ▢ ∢AED

ج. ∢CDA ▢ ∢ADB





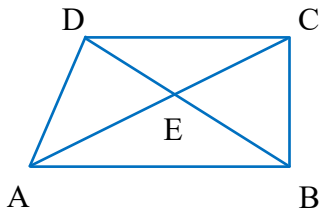


13. القطعتان AC وَ BD تتقاطعان في النّقطة E كما هو موصوف في الرّسم. أكملوا بإحدى الإشارات > ، = ، <:

أ. ∢ADB ▢ ∢ADC

ب. ∢ABC ▢ ∢ABD

ج. ∢ACB ▢ ∢BCE



الزّاوية القائمة

في دراستنا لموضوع الرّياضيّات تناولنا الزّاوية القائمة.

من المعتاد الإشارة للزّاوية القائمة بشكل مربّع، كما هو موصوف على اليسار،

وليس بواسطة قوس.

سنوضّح ما هي الزّاوية القائمة بالاستعانة بالصّورة التي على اليسار،

والتي وضع فيها قلم على الطّاولة. القلم يقف ثابتاً ولا يميل جانبًا.

الزاوية التي يُشكِّلها مع الطاولة هي زاوية قائمة، كما هو موصوف في الصورة.

الزاوية القائمة منتشرة جدًا في المحيط القريب منّا،

كما نلاحظ في الصّورة التي على اليسار، ولها أيضًا

أهمية كبيرة في علوم مختلفة - في الهندسة، والچرافيك،

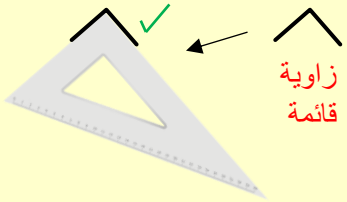
والفيزياء، وعلوم الحاسوب، والهندسة المعماريّة، وغيرها.

انظروا حولكم جيدًا. أين يمكن أن تجدوا زوايا قائمة؟

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

كيف يمكننا رسم زاوية قائمة أو التّحديد بشكل دقيق ما إذا كانت زاوية معطاة هي زاوية قائمة؟

من أجل التّحقق من أنّ زاوية معطاة هي قائمة، نستعين بزاوية أخرى نعلم أنها قائمة، ونفحص هل الزّاويتان متساويتان. يمكننا الاستعانة بالمسطرة المثلثة (مثلّث الرّسم). نحاول أن نضع الزّاوية القائمة في المسطرة المثلّثة على الزّاوية الّتي نريد فحصها بحيث:

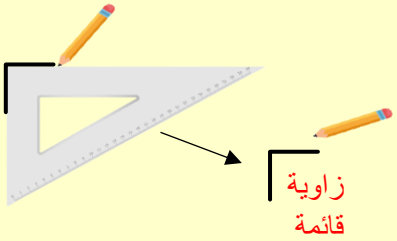


1. يتطابق رأسا الزّاويتين.
2. تتطابق ساقا الزّاويتين.

إذا تحقّق كلا الشّرطين معًا، نستنتج أنّ الزّاويتين متساويتان،
وأنّ الزّاوية التي فحصناها هي بالفعل زاوية قائمة.

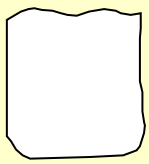
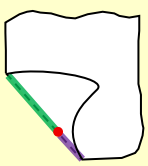
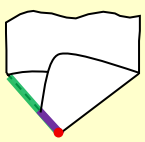
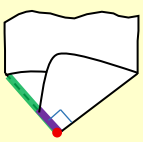
انتبهوا! الزّاويتان متساويتان في المقدار، على الرغم من أن ساقي المسطرة أطول من ساقي الزّاوية التي فحصناها. أي أنّ **طول السّاقين ليس له علاقة بمقدار الزّاوية**.

باستخدام نفس المبدأ، يمكننا أيضًا رسم زاوية قائمة.
نضع المسطرة على الورقة، ونرسم ساقي الزّاوية ورأسها وفقًا لرأس وساقي المسطرة كما هو موضّح في الرسم على اليسار.
بهذه الطريقة، نكون قد رسمنا زاوية مساوية لزاوية المسطرة، وبالتّالي هي أيضًا قائمة.



يمكننا رسم زاوية قائمة أو التّحقق ممّا إذا كانت زاوية معطاة أنها زاوية قائمة أيضًا بمساعدة أي جسم صلب فيه زاوية قائمة.
على سبيل المثال، يمكننا استخدام مسطرة مستطيلة عاديّة أو دفتر مستطيل الشكل.

يمكننا أيضًا إنشاء زاوية قائمة باستخدام أيّ ورقة، حتى لو لم تكن مستطيلة الشكل.

خذوا ورقة.	اطووا **أينما شِئتم**. لا أهمية لمكان الطّيّ.	اختاروا نقطة ما على خطّ الطّيّ.	اطووا **أحد أجزاء** خطّ الطّيّ على **جزئِه الآخر** بحيث يتطابق الجزءان.	حصلنا على زاوية **قائمة!**
				

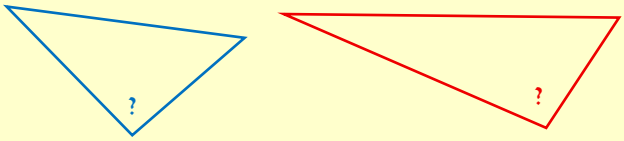
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

مثال:

أُشيرَ في كلّ مثلّث إلى إحدى الزّوايا.

استعينوا بإحدى الطّرق التي عرضناها،

وافحصوا هل الزّوايا المشار إليها هي زوايا قائمة.



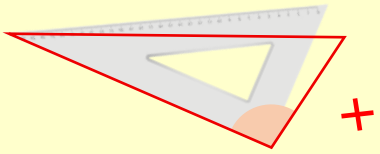
مثلّث I مثلّث II

الحلّ:

نفحص المثلّث I بمساعدة الزّاوية القائمة في المسطرة المثلّثة.

يمكن رؤية أنّ أضلاع المسطرة المثلّثة لا تنطبق على ساقي

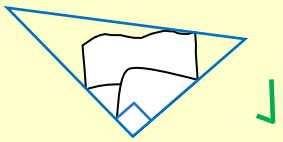
الزّاوية، ومن ذلك نستنتج أن **الزاوية ليست قائمة**.



نفحص المثلّث II بواسطة طيّ الورقة.

يمكن رؤية أن أضلاع الورقة المطويّة تنطبق على ساقي الزّاوية،

ومن ذلك نستنتج أنّ **الزّاوية قائمة**.

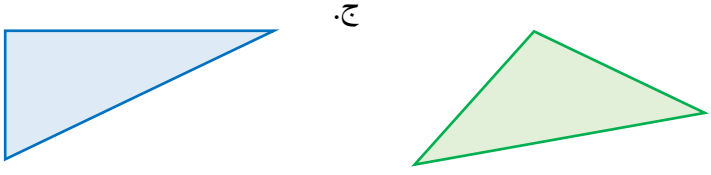


14. استعينوا بإحدى الطّرق التي عرضناها، وحددوا ما إذا كانت زاوية فتح المقص قائمة:

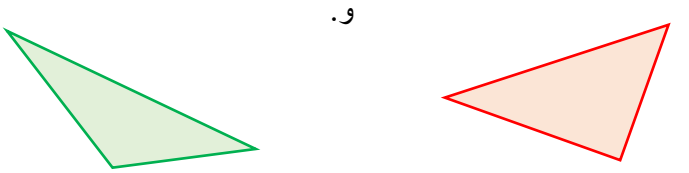
أ. ب. ج. د. ه.

15. استعينوا بطريقة أو بأكثر من الطّرق الّتي عرضنا، وحدّدوا في كلّ بند هل توجد في المثلّث زاوية قائمة:

أ. ب. ج.



د. ه. و.



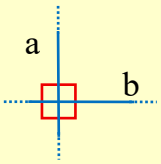
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

مستقيمات متعامدة

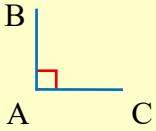
نُذكِّر أنّه عندما تتشكّل زاوية قائمة بين مستقيمات أو قطع، نقول إنّها **متعامدة**.

يُشار للمستقيمات أو القطع المتعامدة بالرّمز $\perp$.

يظهر في الرّسم المستقيمان المتعامدان a وَ b. نكتب بكتابة رياضيّة: $a \perp b$.

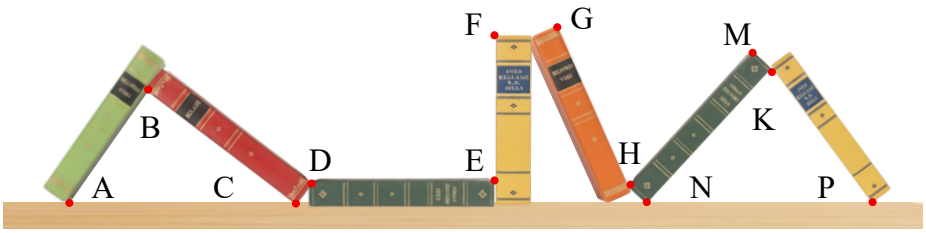


في هذا الرّسم تظهر القطعتان المتعامدتان AB وَ AC. نكتب بكتابة رياضيّة: $AB \perp AC$.



انتبهوا! عندما يتقاطع مستقيمان ويتعامدان، ينتج أربع زوايا قائمة.

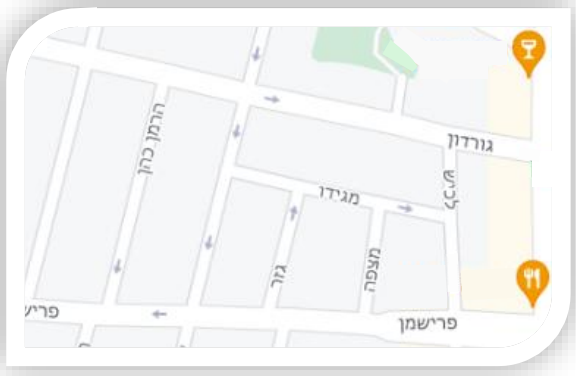
16. أمامكم كتب موضوعة على رفّ. استعينوا بإحدى الطّرق التي تعلّمناها، وحدّدوا أيّ الادّعاءات صحيحة:



i. $AB \perp BC$ ii. $DE \perp EF$ iii. $GH \perp MH$ iv. $NK \perp KP$

17. أمامكم أجزاء من خرائط لمدينتي تلّ أبيب ونيو يورك أُخِذت من موقع Google Maps:

تلّ أبيب



نيو يورك

أ. جدوا في خارطة تلّ أبيب شارعين: 1. متعامدين. 2. غير متعامدين.

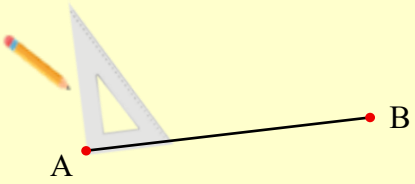
ب. جدوا في خارطة نيويورك شارعين: 1. متعامدين. 2. غير متعامدين.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

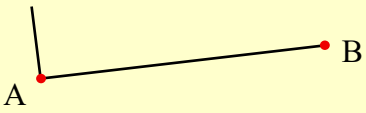
بناء زاوية قائمة على قطعة معطاة

تظهر على اليسار القطعة AB.

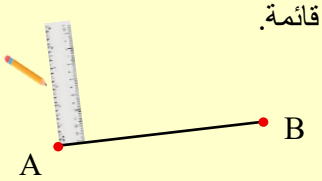
سنعرض طريقة بناء زاوية قائمة رأسها في النقطة A،
وإحدى ساقيها موضوعة على القطعة AB.
نضع رأس الزّاوية القائمة للمسطرة المثلّثة على النّقطة A،
بحيث تتّحد إحدى ساقي الزاوية القائمة في المسطرة مع القطعة AB.

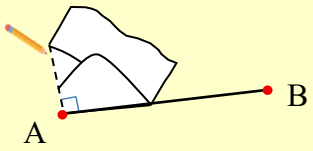


الآن نرسم بقلم رصاص خطًّا على طول السّاق الثانية للزّاوية
حتّى نصل إلى النّقطة A. بهذه الطّريقة نحصل على زاوية قائمة.



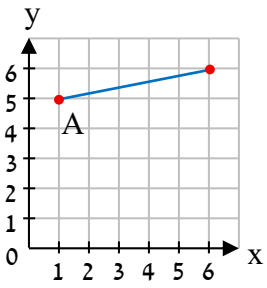
يمكننا رسم زاوية قائمة بالاستعانة بجميع الأدوات التي استعنّا بها
حتى الآن لكي نفحص ما إذا كانت زاوية ما هي زاوية قائمة.
يظهر على اليسار مثال يوضّح طريقة الرّسم بواسطة
مسطرة عاديّة أو بواسطة طيّ ورقة.



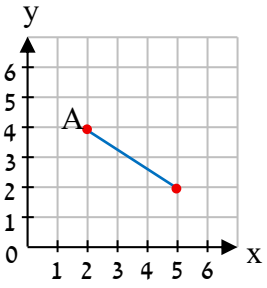


18. في كلّ بند، انسخوا الرسم، وأكملوه لتحصلوا على زاوية قائمة بحيث تكون النّقطة A رأسًا للزّاوية:

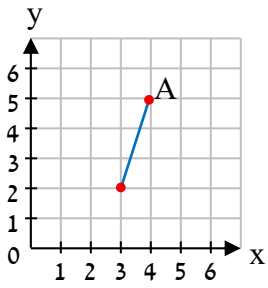
أ.



ب.



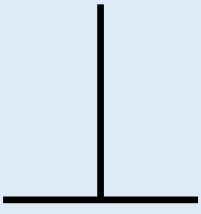
ج.



د.

أيّ قطعة هي الأطول؟

أمامكم قِطعتان متعامدتان. تمعّنوا فيهما، وحاولوا التّحديد
بدون قياس أيّ القطعتين أطول. بعد ذلك، افحصوا بمساعدة مسطرة.



هل تفاجأتم؟ تُسمى هذه الخدعة 'الخدعة العمودية-الأفقية'، وقد تمّ عرضها
في سنة 1855 على يد الرّياضيّ الفيزيائيّ الألماني يوهان جوزيف أوبل.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

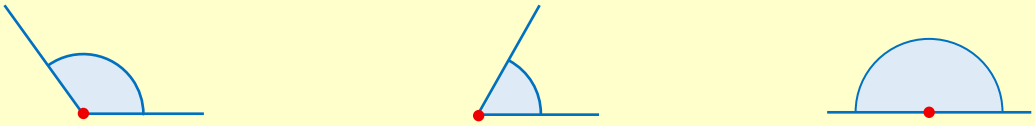
أنواع زوايا أخرى

في دراسة الرّياضيات، تناولنا أنواعًا أخرى من الزّوايا:

زاوية مستقيمة هي زاوية ساقاها يشكّلان خطًّا مستقيمًا.

زاوية حادّة هي زاوية **أصغر** من زاوية قائمة.

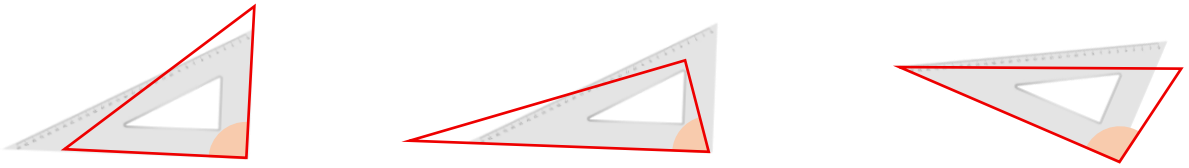
زاوية منفرجة هي زاوية أكبر من زاوية قائمة، **وأصغر** من زاوية مستقيمة.



يمكننا مقارنة زوايا مختلفة بزاوية قائمة، وبذلك نستنتج ما إذا كانت الزّاوية أكبر من زاوية قائمة (منفرجة أو مستقيمة) أو أصغر منها (زاوية حادة).

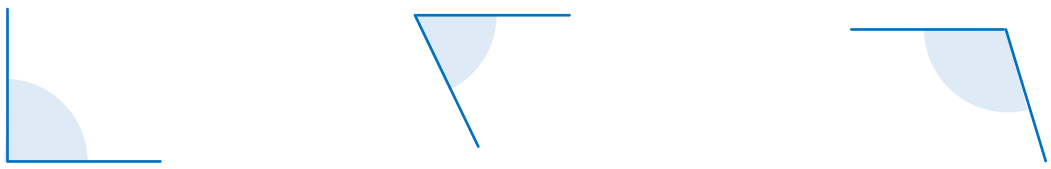
19. في كلّ بند، تم وضع مسطرة مثلّث على زاوية حمراء. حدّدوا ما إذا كانت الزّاوية الحمراء حادّة، قائمة أم منفرجة.

أ. ب. ج.



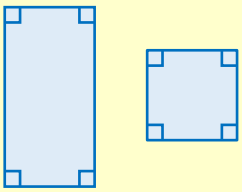
20. في كلّ بند، استعينوا بالمسطرة، وافحصوا ما إذا كانت الزّاوية الزّرقاء حادّة، قائمة أم منفرجة.

أ. ب. ج.

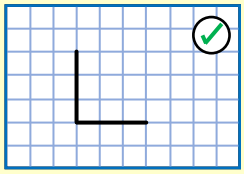


© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

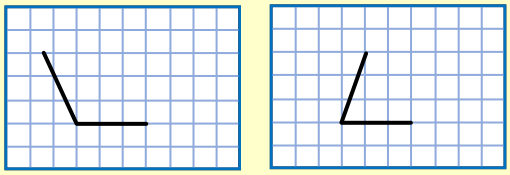
يمكننا تمييز (تحديد) أو رسم زوايا مختلفة أيضًا بالاستعانة بتربيعات الدّفتر



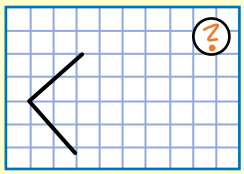
التّربيعات في الدّفتر هي مربّعات. نُذَكّر أنّه في المربّع والمستطيل **الزّوايا الأربع هي زوايا قائمة**. من هذا نستنتج أنّ الزّوايا بين الخطوط الأفقيّة والعموديّة في ورقة التّربيعات هي زوايا قائمة. يمكننا الاستعانة بها كي نرسم زاوية قائمة، أو كي نفحص ما إذا كانت زاوية معطاة هي قائمة.



في الرّسم الذي على اليسار تظهر زاوية رأسها يقع في رأس تربيعة، **وساقاها** متّحدة مع خطوط التّربيعة.
في مثل هذه الحالة، يمكننا التّحديد بأنّ الزّاوية **قائمة**.



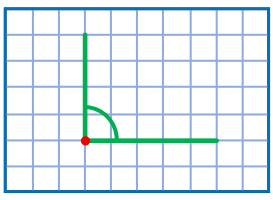
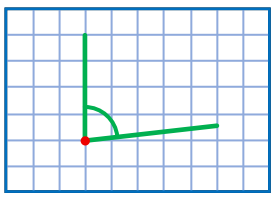
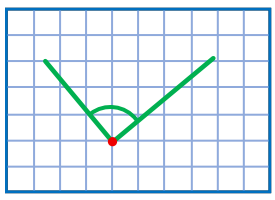
في الرّسوم التي على اليسار تظهر زوايا رأسها يقع على رأس تربيعة، لكن **ساقًا واحدة فقط** من ساقي الزّاوية متّحدة مع خطوط التربيعات.
في مثل هذه الحالات يمكننا التّحديد بإنّ الزّاوية **ليست قائمة**.
يمكننا التّمييز بأنّ الزّاوية اليمنى **حادّة**، والزاوية اليسرى **منفرجة**.



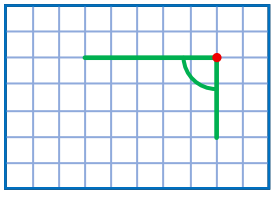
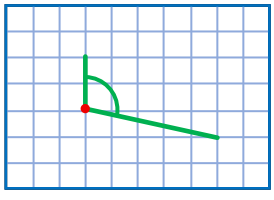
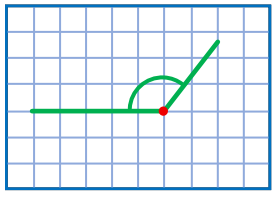
في الرّسم الّذي على اليسار، شُعاعا (ساقا) الزّاوية لا ينطبقان على خطوط التّربيعات، لذلك في هذه الحالة **لا يمكننا تحديد نوع الزّاوية اعتمادًا على التّربيعات فقط**.
يمكننا استعمال إحدى **الطّرق الأخرى** الّتي تعلمناها من أجل ذلك.

21. استعينوا بالتّربيعات **فقط**، وحدّدوا ما إذا كانت الزّاوية حادّة، قائمة أو منفرجة. إذا لم يكن ذلك ممكنًا، اذكروا ذلك:

أ. ب. ج.

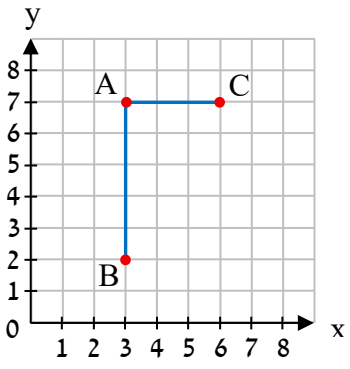




د. ه. و.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

22. في هيئة المحاور ضلعان متجاوران لشكل رباعيّ قد مُحِيَ منه ضلعان من أضلاعه.

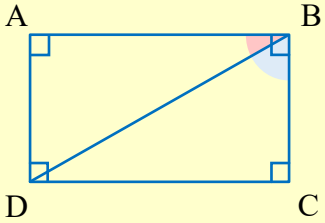


أ. اقترحوا إحداثيّات لنقطة D بها تحصلون على شكل رباعيّ بحيث يكون:

1. فيه زاوية قائمة **واحدة** فقط.
2. فيه **زاويتان** قائمتان فقط.
3. فيه الزّوايا **الأربع** قائمة.

ب. هل توجد نقطة D بها يتكوّن شكل رباعيّ له ثلاث زوايا قائمة **فقط؟** علّلوا.

مثال: في المستطيل ABCD يظهر القطر BD.



أ. في أيّ إجابة يظهر رمز (اسم) صحيح للزّاوية الزّرقاء؟

i. ∢CBD ii. ∢ABD iii. ∢ABC iv. ∢B

ب. في أيّ إجابة يظهر رمز (اسم) صحيح للزّاوية الحمراء؟

i. ∢AD ii. ∢ADB iii. ∢B iv. ∢ABD

ج. هل يمكن التّحديد بأنّ الزوايا التي تناولناها في البندين (أ) و(ب) هي زوايا حادّة؟ علّلوا.

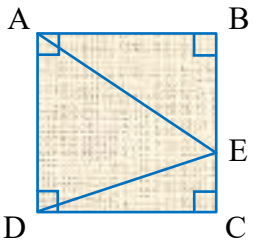
الحلّ:

أ. الإجابة الصّحيحة هي i. في الإجابة ii تظهر أحرف تمثّل أطراف ساقَي زاوية أخرى. الإجابة iii تمثّل زّاوية قائمة في المستطيل، من طريقة التّسمية في الإجابة iv لا يمكن تحديد أيّ زاوية من بين الزّوايا الثّلاث اللّاتي رؤوسهن هو الرأس B هي الزّاوية المقصودة.

ب. الإجابة الصّحيحة هي iv. الكتابة في i تعرض رأسين فقط بدلًا من ثلاثة أو واحد. في الإجابة ii عُرضت زاوية أخرى رأسها هو D. في الإجابة iii لا يمكن تحديد الزّاوية المقصودة من بين الزّوايا الثّلاث اللّاتي رؤوسهن هو الرأس B.

ج. نعم. لكلّ من الزّاويتين الزّرقاء والحمراء رأس مشترك وساق مشتركة مع الزّاوية القائمة ∢ABC . يمكن تمييز أن كلتيهما أصغر منها، ولذلك نستنتج أنّ كلتيهما زاويتان حادتان.

23. أمامكم السّجادة المربّعة ABCD.



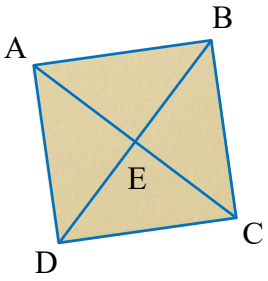
النّقطة E تقع على الضّلع BC.

حدّدوا ثلاث زوايا يمكن الجزم بأنها حادة بالتأكيد.

اشرحوا.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

24. أمامكم بلاطة مطبخ شكلها مستطيل ABCD أقطاره تتقاطع في النّقطة E.



لكلّ زاوية، حدّدوا ما إذا كانت حادّة أم قائمة. إذا **لم يكن التّحديد ممكنًا**، اذكروا ذلك:

أ. $\sphericalangle ADC$ ب. $\sphericalangle ACD$ ج. $\sphericalangle AEB$

د. $\sphericalangle ABE$ ه. $\sphericalangle BEC$ و. $\sphericalangle CBA$

25. ارسموا مستطيلًا، وارسموا أحد أقطاره.

أ. في كلّ بند، عيّنوا الزّاوية المطلوبة. إذا **لم يكن ذلك ممكنًا**، اذكروا ذلك:

1. زاوية قائمة. 2. زاوية حادّة. 3. زاوية منفرجة.

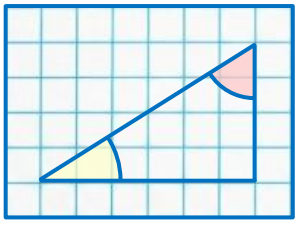
ب. عيّنت لينا زاوية ما، ساقاها هما القطر وأحد أضلاع المستطيل.

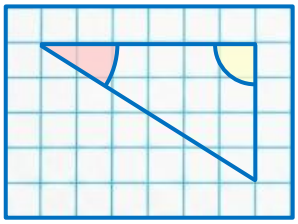
هل هذه الزّاوية حادّة، قائمة أم منفرجة؟ اشرحوا.

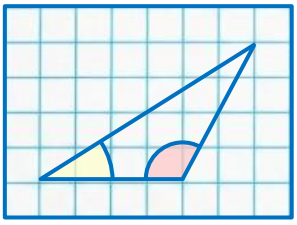
26. في المثلّثات المرسومة على ورقة مربّعات، تمّ تعيين زاوية صفراء وزاوية حمراء.

حدّدوا لكلّ زاوية ما إذا كانت حادّة، قائمة أم منفرجة.

أ. ب. ج.

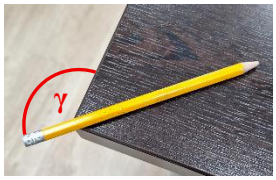






27. أمامكم قلم رصاص موضوع على زاوية طاولة مستطيلة.

أ. حدّدوا لكلّ زاوية مقدارها α، β، وَ γ، وحدّدوا ما هو نوعها:



ب. حدّدوا لكلّ ادعاء ما إذا كان صحيحًا، خطأ أو لا يمكن التّحديد:

i. $\gamma < \alpha$ ii. $\beta < \gamma$ iii. $\beta < \alpha$

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

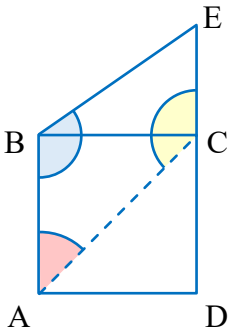
28. أمامكم شكل مركّب من مرّبع ABCD ومثلّث قائم الزّاوية ΔBCE

حيث الزّاوية ∢BCE قائمة. النّقاط E، C، وَ D تقع على مستقيم واحد.

أ. اقترحوا رمزًا للزّاوية الزرقاء الكاملة. هل هي حادّة، قائمة أم منفرجة؟

ب. اقترحوا رمزًا للزّاوية الحمراء. هل هي حادّة، قائمة أم منفرجة؟

ج. اقترحوا رمزًا للزّاوية الصّفراء الكاملة. هل هي حادة، قائمة أم منفرجة؟



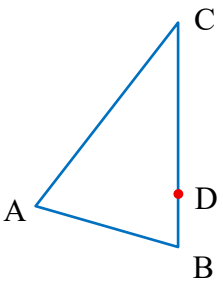
29. في المثلّث ΔABC النّقطة D تقع على الضّلع BC.

حدّدوا أيّ ادّعاء صحيح، واشرحوا:

i. كلّما قرّبنا النّقطة D إلى الرّأس C، فإنّ الزّاوية ∢ABD تكبر.

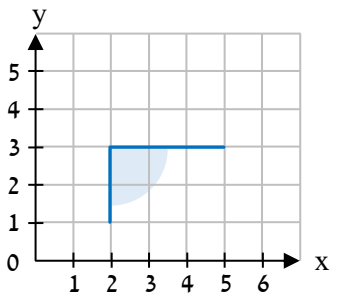
ii. كلّما قرّبنا النقطة D إلى الرّاس C، فإنّ الزّاوية ∢ABD تصغر.

iii. موقع النّقطة D على الضّلع BC لا يؤثّر على مقدار الزّاوية ∢ABD.

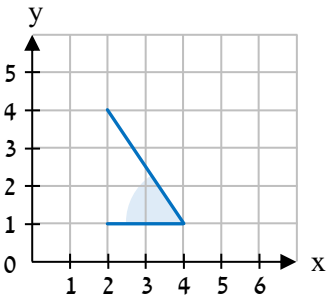


30. في كلّ بند تظهر زاوية في هيئة المحاور. استعينوا بالتّربيعات، وحدّدوا هل هي حادّة، قائمة أم منفرجة.

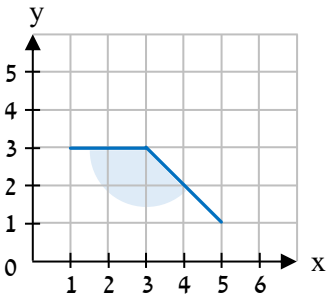
أ.



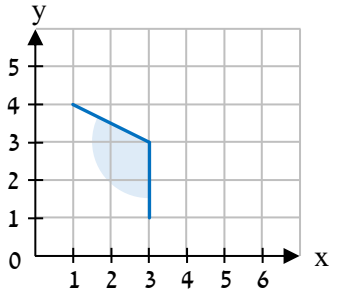
ب.



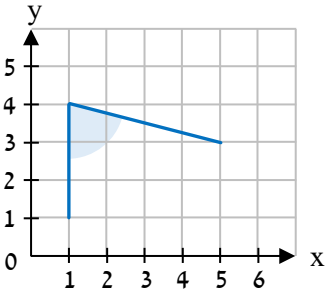
ج.



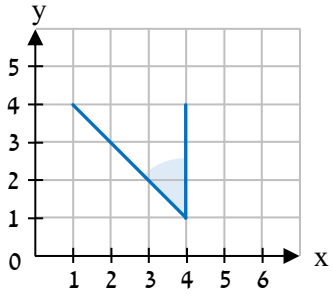
د.



ه.

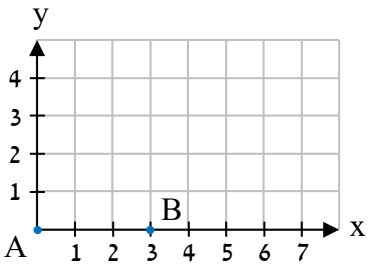


و.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

31. في هيئة المحاور التي أمامكم معطاة النّقاط A (0 , 0) وَ B (3 , 0).



أ. 1. اقترحوا إحداثيّات لنقطة C **من اختياركم** بحيث تكون ∢ABC زاوية قائمة.

2. هل توجد نقاط أخرى كهذه؟ اشرحوا.

ب. 1. اقترحوا إحداثيّات لنقطة D **من اختياركم** بحيث تكون ∢ABD زاوية حادّة.

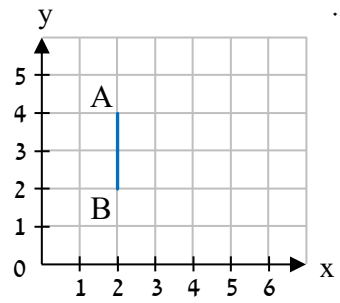
2. هل توجد نقاط أخرى كهذه؟ اشرحوا.

ج. 1. اقترحوا إحداثيّات لنقطة E **من اختياركم** بحيث تكون ∢ABE زاوية منفرجة.

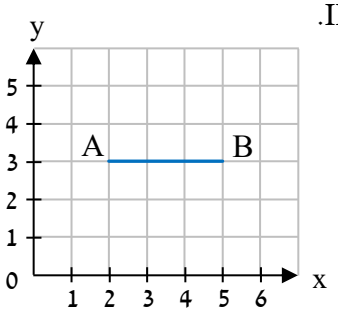
2. هل توجد نقاط أخرى كهذه؟ اشرحوا.

32. في الرّسمين I وَ II تظهر القطعة AB في هيئة محاور.

I.



II.



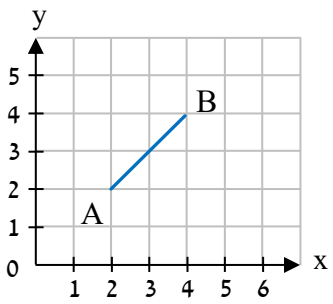
لكلّ رسم من الرّسوم، اقترحوا إحداثيّات نقطة وفقًا للمطلوب في البند، وارسموا الزّاوية النّاتجة:

أ. نقطة C **من اختياركم** بحيث تكون ∢ABC زاوية قائمة.

ب. نقطة D **من اختياركم** بحيث تكون ∢ABD زاوية حادة.

ج. نقطة E **من اختياركم** بحيث تكون ∢ABE زاوية منفرجة.

33. أمامكم القطعة AB في هيئة المحاور.



أ. 1. جدوا إحداثيّات نقطة C بحيث تكون ∢ABC زاوية حادّة.

2. هل توجد إمكانيّات أخرى للنّقطة C؟ اشرحوا.

ب. 1. جدوا إحداثيّات نقطة D بحيث تكون ∢ADB زاوية قائمة.

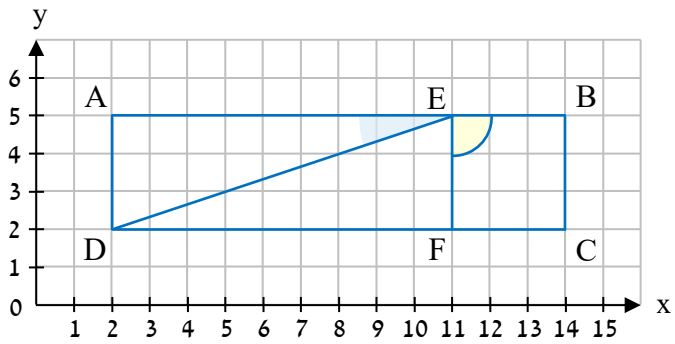
2. جدوا إمكانيّة أخرى لموقع النّقطة D.

ج. 1. جدوا إحداثيّات نقطة E بحيث تكون ∢ABE زاوية منفرجة.

2. هل توجد إمكانيات أخرى للنّقطة E؟ اشرحوا.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

34. في هيئة المحاور التي أمامكم الضّلع EF هو ضلع مشترك للمربّع BCFE وللمستطيل AEFD.



طُلب من التّلميذات تحديد أيّ زاوية من الزّوايا التّالية هي الأكبر:

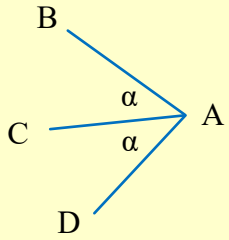
الزّاوية الزّرقاء $\sphericalangle AED$ أم الزّاوية الصّفراء $\sphericalangle BEF$.

ادّعت ليلى: "الزّاوية $\sphericalangle AED$ هي الأكبر لأنّ ساقيها AE وَ DE أطول من السّاقين BE وَ EF".

ادّعت راوية: "الزّاوية $\sphericalangle BEF$ هي الأكبر لأنّها قائمة، والزّاوية $\sphericalangle AED$ حادّة".

أيّ منهما على حق؟ اشرحوا.

انتبهوا!



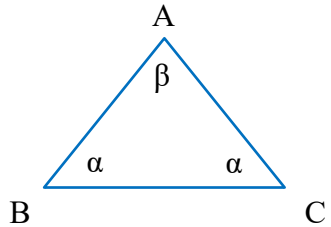
عندما تناولنا تسمية الزّوايا بواسطة الأحرف اليونانيّة، ذكرنا أنّ الحرف اليونانيّ، يمثّل **مقدار** الزّاوية. عندما تظهر في الرسم زوايا متساوية في المقدار، يمكن أن نرمز لها جميعًا بنفس الحرف اليونانيّ، كما هو موصوف في الرسم.

عندما يظهر في الرّسم عدّة زوايا رُمِز لها بنفس الحرف اليونانيّ، يمكننا الاستنتاج بأنّ هذه الزّوايا متساوية فيما بينها في المقدار.

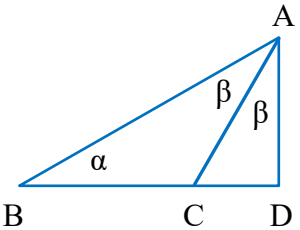
على سبيل المثال، في الرّسم على اليسار يمكن أن نستنتج أنّ $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAC$.

35. حدّدوا بمساعدة الأحرف اليونانيّة أيّ زوايا متساوية، واعرضوا التّساوي بواسطة الأحرف التي تمثّل الرؤوس:

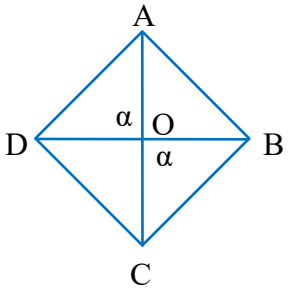
أ.



ب.

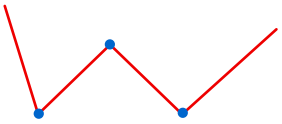


ج.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

الإجابات:



1) **أ.** في الرّسم على اليسار. **ب.** في الرّسم على اليسار.

2) i، ii، iv.

3) ∢DFE، ∢EFD.

4) إجابات ممكنة: **أ.** ∢EFG، ∢GFE، ∢F. **ب.** ∢KMP، ∢PMK، ∢M.

ج. ∢SDA، ∢ADS، ∢D.

5) **أ.** كلاهما اقترحا رموزًا (أسماءً) صحيحة. لكن جلال اقترح رمزًا أقصر وأبسط.

ب. الرّمز الّذي اقترحه جلال غير مناسب لأنّه لا يتيح التّمييز بين الزّوايا الثّلاث المختلفة في الرّسم.

(∢ABC, ∢CBD, ∢ABD) رؤوسها B. الرّمز الّذي اقترحته وداد ملائم.

6) **أ.** i، iv. **ب.** i، ii.

7) **أ.** i، iv؛ رأس الزّاويّة الّتي مقدارها α هو C، والتّعبيرين ii وَ iii غير ملائمين لأنّهما يمثّلان زاوية رأسها في النّقطة B. **ب.** ii، iv؛ التّعبير i يمثل رأس زاوية مشترك لـ 3 زوايا بحيث لا يمكن التّمييز بينها. في التّعبير iii النّقطة B هي رأس الزّاوية، بينما رأس الزّاوية هو D.

8) إجابات ممكنة: **أ.** ΔABC، ΔCBA، ΔBCA.

ب. 1. ∢BAC، ∢CAB، ∢A. **2.** ∢ABC، ∢CBA، ∢B. **3.** ∢ACB، ∢BCA، ∢C.

9) إجابات ممكنة: **أ.** ABCD، BCDA، CBAD، ADCB. **ب.** الزّرقاء: ∢AOB، ∢BOA؛ الحمراء: ∢AOD، ∢DOA. **ج.** ∢BCD، ∢DCB، ∢C.

10) إجابات ممكنة: **أ. I.** ABDC، CDBA. **II.** ABCD، CBAD. **III.** ABCE، BAEC.

ب. I. ∢ACB، ∢BCA. **II.** ∢ACB، ∢BCA. **III.** ∢DAE، ∢EAD.

11) **أ.** الحمراء. **ب.** الحمراء. **ج.** الزّرقاء. **د.** الحمراء.

12) **أ.** >. **ب.** =. **ج.** >.

13) **أ.** >. **ب.** <. **ج.** =.

14) **أ.** قائمة. **ب.** ليست قائمة. **ج.** ليست قائمة. **د.** قائمة. **ه.** ليست قائمة.

15) **أ.** توجد زاوية قائمة. **ب.** لا توجد زاوية قائمة. **ج.** توجد زاوية قائمة **د.** لا توجد زاوية قائمة.

ه. توجد زاوية قائمة. **و.** لا توجد زاوية قائمة.

16) i، ii.

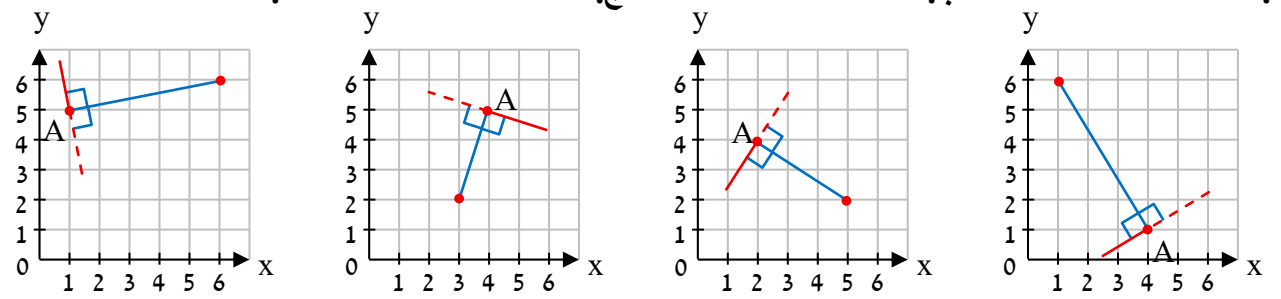
17) إجابات ممكنة: **أ. 1.** شارع چوردون وشارع هيرمان هَكوهين. **2.** شارع فريشمان وشارع هيرمان هكوهين.

ب. 1. شارع 6th Ave وشارع W 38th St. **2.** شارع Broadway وشارع W 37th St.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

18) إمكانيّات الإكمال تظهر في كلّ رسم – إحداها بخطّ أحمر متواصل والأخرى بخطّ أحمر متقطّع:

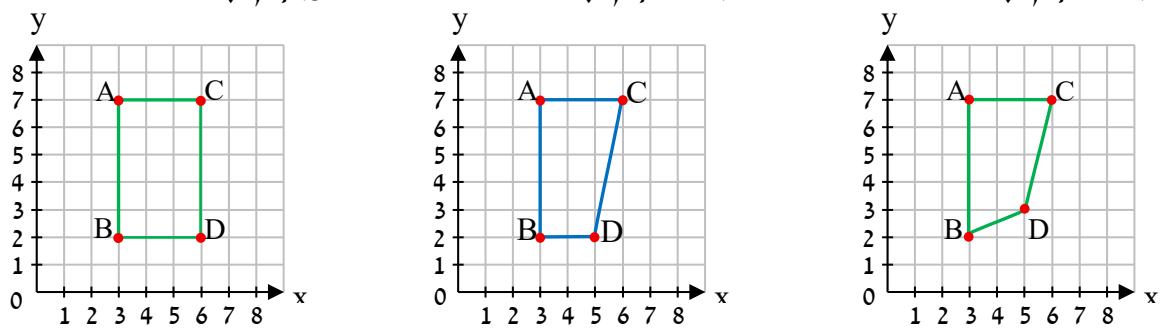
أ. **ب.** **ج.** **د.**



19) **أ.** منفرجة. **ب.** حادّة. **ج.** قائمة. **20)** **أ.** منفرجة. **ب.** حادّة. **ج.** قائمة.

21) **أ.** قائمة. **ب.** حادّة. **ج.** لا يمكن التحديد بدون وسائل مساعدة إضافية. **د.** قائمة. **ه.** منفرجة. **و.** منفرجة.

22) **أ. 1.** مثلًا: D (5 , 3). **2.** مثلًا: D (5 , 2). **3.** D (6 , 2)

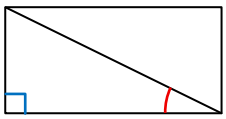


ب. لا توجد. كما تعلّمنا سابقًا، كلّ شكل رباعيّ فيه ثلاث زوايا قائمة هو مستطيل، ولذلك ستكون الزّاوية الرابعة قائمة أيضًا.

23) إجابات ممكنة: ∢BAE، ∢DAE، ∢ADE، ∢CDE. لكلّ الزّوايا المكتوبة توجد ساق مشتركة ورأس مشترك مع زاوية قائمة. يمكن المقارنة والتمييز بأن كلًّا منها أصغر من الزاوية القائمة، لذلك حادّة.

24) **أ.** قائمة. **ب.** حادّة. **ج.** لا يمكن التّحديد. **د.** حادّة. **ه.** لا يمكن التّحديد. **و.** قائمة.

25) **أ.** إجابات ممكنة في الرّسم على اليسار. **1.** الزّاوية الزّرقاء. **2.** الزّاوية الحمراء.



3. لا توجد زاوية منفرجة في الرّسم. **ب.** حادّة. لكلّ زاوية تختارها لينا يوجد رأس مشترك وساق مشاركة مع زاوية قائمة، ويمكن التّمييز بأنّها أصغر منها.

26) **أ.** الزّاويتان الصّفراء والحمراء حادّتان. **ب.** الزّاوية الصّفراء قائمة، والحمراء حادّة.

ج. الزّاوية الصّفراء حادّة، والزّاوية الحمراء منفرجة.

27) **أ.** الزّوايا الّتي مقدارها α وَβ حادّة؛ والزّاوية الّتي مقدارها γ منفرجة. **ب. i.** خطأ. **ii.** صحيح. **iii.** لا يمكن التّحديد.

28) إجابات ممكنة: **أ.** ∢ABE، منفرجة. **ب.** ∢BAC، حادّة. **ج.** ∢ACE، منفرجة.

29) iii.

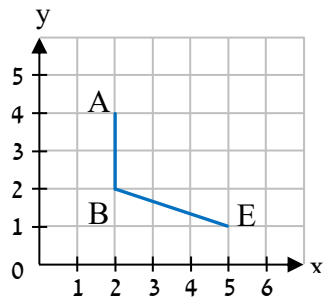
30) **أ.** قائمة. **ب.** حادّة. **ج.** منفرجة. **د.** منفرجة. **ه.** حادّة. **و.** حادّة.

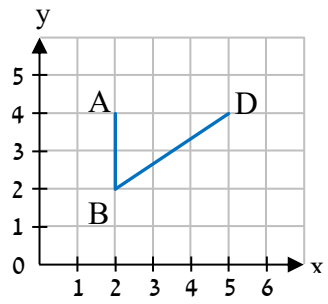
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

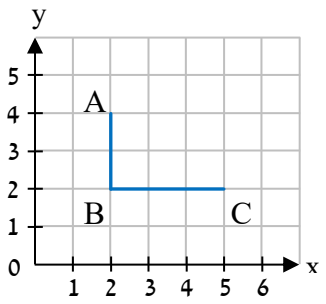
31) أ. 1. إجابة ممكنة: (3 , 2). **2.** نعم، يوجد عدد لا نهائي من النّقاط كهذه. مثلًا، كلّ النّقاط الّتي إحداثيها الـ x هو 3، وإحداثيها الـ y أكبر من 0. **ب. 1.** إجابة ممكنة: (1 , 2). **2.** نعم، يوجد عدد لا نهائي من النّقاط كهذه. مثلًا، كلّ النّقاط الّتي إحداثيها الـ x هو 2، وإحداثيها الـ y أكبر من 0.

ج. 1. إجابة ممكنة: (3 , 4). **2.** نعم، يوجد عدد لا نهائي من النّقاط كهذه. مثلًا، كل النّقاط الّتي إحداثيها الـ x هو 4، وإحداثيها الـ y أكبر من 0.

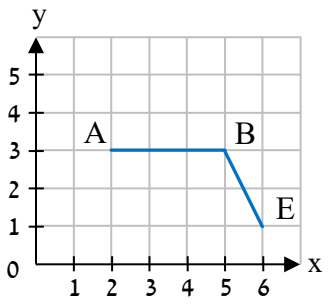
32) الرّسم **I**: أ. C (5 , 2) **ب.** D (5 , 4) **ج.** E (5 , 1)

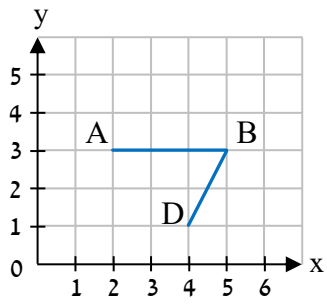


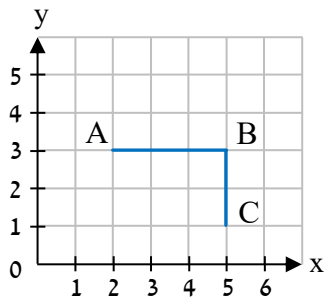




الرّسم **II**: أ. C (5 , 1) **ب.** DC (4 , 1) **ج.** E (6 , 1)

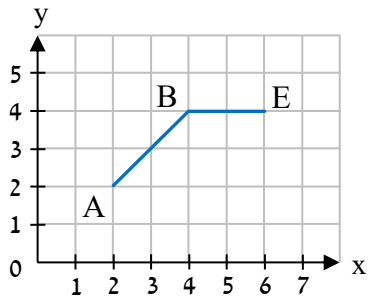


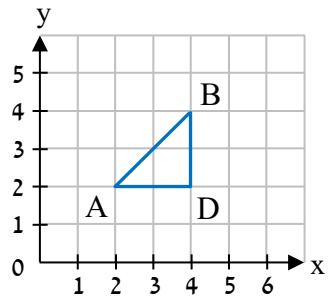


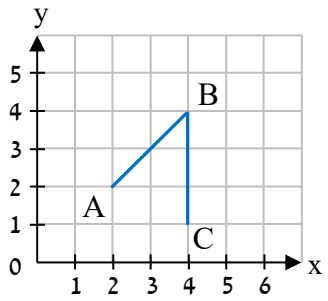


33) أ. 1. الرّسم الأيمن في الأسفل. C (4 , 1). **2.** نعم، يوجد عدد لا نهائي من النّقاط. مثلًا، كلّ النّقاط الّتي فيها الإحداثيx هو 4، والإحداثي y أصغر من 4. **ب. 1.** الرّسم الأوسط في الأسفل. D (4 , 2). **2.** D (2 , 4).

ج. 1. الرّسم الأيسر. E (6 , 4). **2.** نعم، يوجد عدد لا نهائي من النّقاط. مثلًا، كلّ النّقاط الّتي إحداثيها الـ y هو 4، وإحداثيها الـ x أكبر من4.







34) راوية على حقّ. مقدار الزّاوية لا يتعلّق بطول السّاق.

35) أ. $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$. **ب.** $\measuredangle BAC = \measuredangle CAD$. **ج.** $\measuredangle AOD = \measuredangle BOC$.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس** – تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون