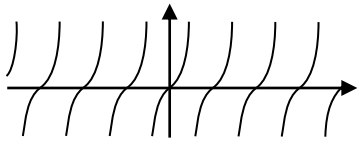


חקירת פונקציה טריגונומטרית - קדם אנליזה

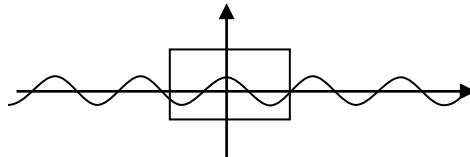
*** עמודים אלו הם החלק הגרפי של פרק הקדם אנליזה לפונקציות טריגונומטריות בספר ארכימדס 571.**

פונקציות טריגונומטריות הן מחזוריות. כלומר, ערכי ה- y של הפונקציה חוזרים על עצמם כאשר מוסיפים גודל קבוע לערכי ה- x . לפיכך, גם הגרפים של הפונקציות חוזרים על עצמם באופן מחזורי:

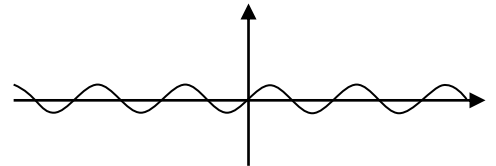
$h(x) = \tan x$



$g(x) = \cos x$



$f(x) = \sin x$

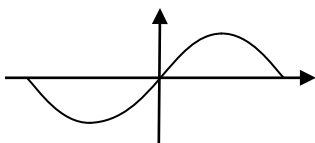


המחזוריות של הפונקציות הטריגונומטריות הבסיסיות היא:

$\tan \alpha = \tan(\alpha + 180^\circ k)$, $\cos \alpha = \cos(\alpha + 360^\circ k)$, $\sin \alpha = \sin(\alpha + 360^\circ k)$

בשאלות הבאות, חקירת הפונקציה מתבצעת בעזרת המחזוריות, שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים ותחומי החיוביות והשליליות. בתשובות נשתמש ב- π , במידת הצורך.

1. נתון גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$ בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.



א. האם הפונקציה $f(x)$ זוגית או אי זוגית? הסבירו.

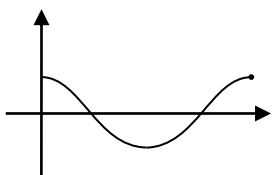
ב. מהם הערכים המקסימלי והמינימלי שהפונקציה יכולה לקבל? הסבירו.

ג. שרטטו סקיצות לגרפים של הפונקציות הבאות בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$:

iv. $t(x) = 1 + |\sin x|$

i. $g(x) = 1 + \sin x$ ii. $h(x) = 3 \sin x$ iii. $k(x) = \sin(-x)$

2. נתון גרף הפונקציה $g(x) = \cos x$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.



שרטטו סקיצות לגרפים של הפונקציות הבאות בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$:

א. $f(x) = -\cos x$ ב. $h(x) = |-\cos x|$ ג. $t(x) = \frac{1}{|-\cos x|}$

3. בכל סעיף נתונות שתי פונקציות וגרף של אחת מהן. מצאו לאיזו מהפונקציות מתאים הגרף הנתון:

א. $f(x) = 1 + \sin x$

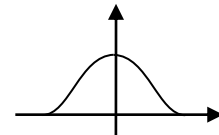
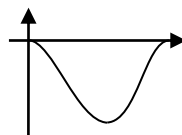
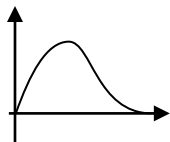
ב. $f(x) = \cos 2x - 1$

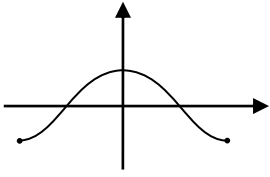
ג. $f(x) = \cos x \cdot (1 - \sin x)$

א. $g(x) = 1 + \cos x$

ב. $g(x) = \sin 2x - 1$

ג. $g(x) = \sin x \cdot (1 - \sin x)$





4. לפניכם סקיצה של גרף הפונקציה: $f(x) = \cos x$ בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

לפונקציה נקודת מקסימום אחת בתחום ושתי נקודות מינימום בקצה התחום.

א. האם הפונקציה $f(x)$ זוגית או אי זוגית? הסבירו.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

2. שיעורי נקודות הקיצון וסוגן. היעזרו בסעיף א'.

3. תחומי החיוביות והשליליות.

ג. היעזרו בשרטוט הנתון ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x) = 1 + \cos x$ בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

ד. היעזרו בשרטוט הנתון ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x) = \cos(x - \pi)$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

ה. נתונה הפונקציה: $k(x) = f(x) \cdot (5 - \sin x)$ בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$. האם תחומי החיוביות והשליליות

של הפונקציה $k(x)$ שונים מאלו של הפונקציה $f(x)$? הסבירו את תשובתכם.

5. היעזרו בגרפים של הפונקציות $f(x) = \sin x$ ו- $g(x) = \cos x$ המופיעים בשאלות 1 ו-2.

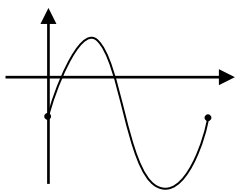
אחת מהטענות שלפניכם נכונה. היעזרו בגרפים וקבעו איזו מהטענות היא הטענה הנכונה:

i. גרף הפונקציה $\sin x$ מתקבל בהזזת גרף הפונקציה $\cos x$ ימינה למרחק של π יח'.

ii. גרף הפונקציה $\sin x$ מתקבל בהזזת גרף הפונקציה $\cos x$ שמאלה למרחק של π יח'.

iii. גרף הפונקציה $\sin x$ מתקבל בהזזת גרף הפונקציה $\cos x$ ימינה למרחק של $\frac{\pi}{2}$ יח'.

iv. גרף הפונקציה $\sin x$ מתקבל בהזזת גרף הפונקציה $\cos x$ שמאלה למרחק של $\frac{\pi}{2}$ יח'.



6. (*) נתונה סקיצה של גרף הפונקציה: $f(x) = 2\sin x - 1$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

2. תחומי החיוביות והשליליות.

3. שיעורי נקודות הקיצון של גרף הפונקציה **בקצה התחום** וסוגן.

ב. היעזרו בשרטוט הנתון ושרטטו סקיצה של:

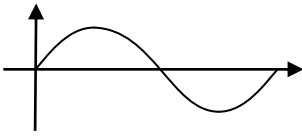
1. גרף הפונקציה $g(x) = -3f(x)$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

2. גרף הפונקציה $h(x) = 2\sin(-x) - 1$ בתחום: $-2\pi < x < 0$.

ג. גרף הפונקציה $k(x) = c + f(x)$ אינו חותך את ציר ה- x בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

מצאו את תחום הערכים האפשריים של c .

7. (*) לפניכם סקיצה של גרף הפונקציה: $f(x) = \sin x$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.



א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x , המופיעות בסקיצה.
2. תחומי החיוביות והשליליות.

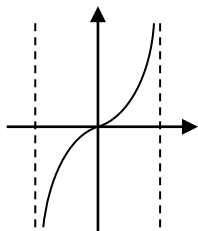
ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = \sin 2x$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

1. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .
2. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.
3. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

ג. מהי מחזוריות הפונקציה $f(x)$?

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים ומצאו את מחזוריות הפונקציה $g(x)$.

ה. קבעו מהי המחזוריות של הפונקציות $h(x) = \sin 4x$ ו: $k(x) = \sin(0.5x)$. הסבירו את תשובתכם.



8. (*) נתון גרף הפונקציה $f(x) = \tan x$ בתחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

שרטטו סקיצות לגרפים של הפונקציות הבאות בתחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

א. $g(x) = \tan(-x)$ ב. $h(x) = (\tan x)^2$ ג. $k(x) = \frac{1}{\tan x}$ (*)

9. (*) נתונה הפונקציה $f(x) = (x^2 - \pi^2) \cdot \sin x$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. תחומי החיוביות והשליליות.

ב. נתון שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון **פנימיות**. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

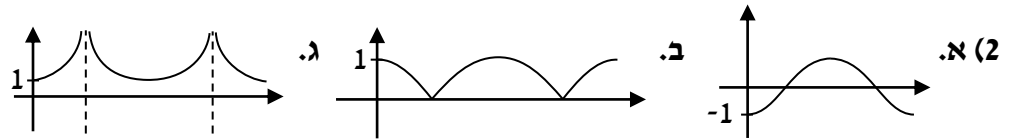
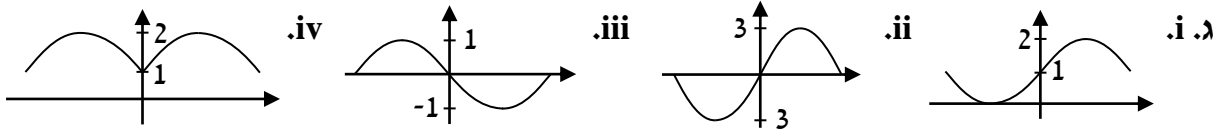
ג. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x)|$.

1. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
 2. קבעו כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $g(x)$, ומצאו את סוגן.
 3. למשוואה $g(x) = p$ יש ארבעה פתרונות והם: x_1, x_2, x_3, x_4 .
- עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה. הסבירו את תשובתכם.

i. $0 < x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ ii. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

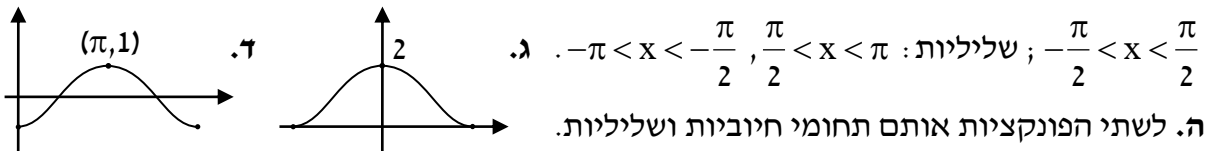
תשובות:

1) א. אי זוגית. ב. הערך המקסימלי הוא 1 והערך המינימלי הוא -1.



3) א. $g(x)$. ב. $f(x)$. ג. $g(x)$.

4) א. זוגית. ב. $(0,1)$, $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$. ג. $\max(0,1)$, $\min(-\pi,-1)$, $\min(\pi,-1)$. ד. חיוביות:

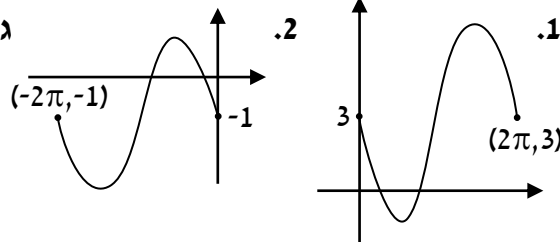


ערכו של $\sin x$ הוא בין -1 לבין 1 ולכן הביטוי $(5 - \sin x)$ בהכרח חיובי.

5) iii

6) א. 1. $(0, -1)$, $(\frac{\pi}{6}, 0)$, $(\frac{5\pi}{6}, 0)$. 2. חיוביות: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$; שליליות: $0 < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$.

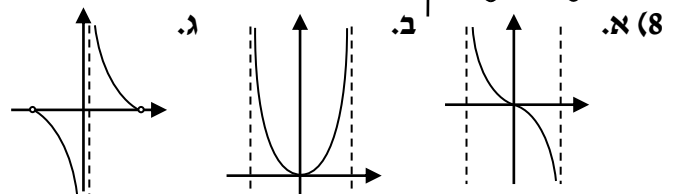
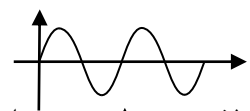
3. $\max(2\pi, -1)$, $\min(0, -1)$. ב. 1. 2.



7) א. 1. $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$. 2. חיוביות: $0 < x < \pi$; שליליות: $\pi < x < 2\pi$. ב. 1. $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0,0)$.

2. חיוביות: $\pi < x < 1.5\pi$; שליליות: $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $1.5\pi < x < 2\pi$. 3. $(2\pi, 0)$, $(1.5\pi, 0)$, $(\pi, 0)$.

ג. 2π . ד. π . ה. המחזוריות של $h(x)$ היא 0.5π , המחזוריות של $k(x)$ הוא 4π .



9) א. 1. $-\pi \leq x \leq \pi$. 2. $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, 0)$. 3. חיוביות: $-\pi < x < 0$; שליליות: $0 < x < \pi$.

2. 5 נקודות קיצון, 2 מסוג מקסימום ו-3 מסוג מינימום.

3. i. הטענה נכונה. ii. הטענה נכונה.

