

היכרות עם הספר "בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472" כרך א'

הספר נכתב עבור תוכנית הלימודים החדשה במתמטיקה לכיתה י"ב ברמת 4 יח' לימוד (שאלון 472). בכרכי הספר מופיעים הסברים מפורטים, דוגמאות ומגוון רחב ועשיר של שאלות. הספר נכתב לאחר ביצוע שיח מעמיק עם צוותי הוראה בתיכונים.

המטרה שלנו הייתה לכתוב ספר שונה וייחודי בשני מובנים בהשוואה לספרים הקודמים שנלמדו בכיתה י"ב:

ראשית, הספר אינו מוגבל לתרגול טכני שנועד להכנה לבחינת הבגרות. **מטרתו ללמד מתמטיקה ולא רק ללמד לבחינת הבגרות במתמטיקה.** אנו שואפים לאפשר לתלמידים ללמוד ולהבין את המתמטיקה באופן מעמיק, כך שלא רק יכינו את עצמם לבחינה, אלא גם ירכשו כלים להבנת תהליכים מתמטיים וליישומם בתחומים שונים. אנו מאמינים שחשוב להראות כיצד מתמטיקה נבנית מתוך חקירה ושאלות ולא רק כחומר "יבש" שיש ללמוד בעל פה לצורכי בחינה.

שנית, חשוב לנו להציג את **המתמטיקה כבעלת שורשים עמוקים בתרבות ובהיסטוריה האנושית ולהציגה כמקושרת לכל תחומי החיים.** לפיכך, שילבנו בספר מגוון רחב של הקשרים בין המתמטיקה לבין תחומי חיים שונים על מנת להדגיש את הרלוונטיות של המתמטיקה בעידן המודרני, ולצידם הוספנו אזכורים היסטוריים על הדרך שבה התפתחה המתמטיקה ועל האופן שבו מושגים מתמטיים רבים שנלמדו בספר, הם חלק מההיסטוריה האנושית.

אילו עקרונות הנחו אותנו בכתיבת הספר?

- **מקצועיות:** הסברים "בגובה העיניים" המשלבים דוגמאות פתורות, פתרונות מלאים לכל השאלות שבהם התלמידים נדרשים להסביר, שפע שאלות חקר ושרטוטים צבעוניים המאפשרים למידה מעמיקה ונוחה בכיתה. סגנון הכתיבה של ההסברים מאפשר לתלמידים שנעדרו מהשיעור להשלים את החסר בכוחות עצמם.
- **הדרגתיות:** כל פרק נפתח בשאלות ברמת הבסיס המאפשרות לכיתה "נחיתה רכה". עם התקדמות הפרק רמות המורכבות והקושי עולות בהדרגה.
- **עקרון הספירליות:** התלמידים נחשפים לאותו נושא או רעיון מתמטי אשר חוזר ומהדהד שוב ושוב בפרקים מתקדמים יותר כדי לאפשר חזרה והעמקה. בכל חשיפה מתווסף רובד נוסף של העמקה לצורך פיתוח הדרגתי של פרספקטיבה מתמטית רחבה על הנושא.
- **אוריינות מתמטית ורלוונטיות לחיי היום־יום:** בספר מופיעות שאלות אוריינות רבות המציגות סוגיות מן המציאות. מטרתן לפתח את היכולת של התלמידים להבין בעיה מורכבת מעולם המציאות, לזהות כיצד המתמטיקה יכולה לסייע בפתרונה ולבנות תוכנית מסודרת לפתרון.
- **נגישות לתלמידים ולמורים:** הספר צבעוני, מרווח, מזמין ונעים לעין.



כיצד הותאם הספר לדגשי ההוראה העדכניים ולתוכנית הלימודים החדשה?

הספר נכתב מתוך כוונה להיענות לשלוש מגמות מרכזיות בהוראת המתמטיקה בישראל בעשור האחרון:

- **"הצמחה ולא הצנחה":** מגמה של הבניית ידע והוראה מתוך **שאלות חקר, המחשבות צורך והתנסויות** אשר מובילות את התלמידים להגיע לתובנות בעזרת שאלה מדורגת ומכוונת, **לפני** שהנושא מוצג באופן פורמלי בספר. בתוך כך מרבית פרקי הספר נפתחים עם שאלות חקר והמחשבת צורך, ובפרקים עצמם מופיעות שאלות חקר המובילות את ההתקדמות בתוך כל נושא ומעניקות הזדמנויות רבות לממש את **מודל "התלמיד החוקר"** במהלך השנה. שאלות אלו מגבירות את המעורבות של התלמיד, מטפחות הבנה מעמיקה יותר והטמעה של הנושא. השאלות מסומנות באיור .

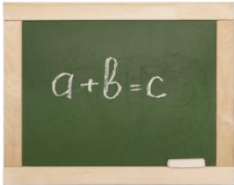
- **שאלות מדורגות:** מגמה של כתיבת שאלות שבנויות **כרצף מתוכנן ומדורג של סעיפים, שכל אחד מהם חיוני להמשך ותורם את חלקו בהתקדמות של התלמידים לקראת שיא** או תובנה בסוף השאלה, בין שמדובר בחישוב, בשרטוט סקיצה של גרף או בניסוח חוק מתמטי במילים משלהם. שאלות מסוג זה מאפשרות לתלמידים ברמת מיומנות נמוכה למצות יכולות רבות יותר, להיעזר בדירוג כדי ליישם את הידע המתמטי שלהם ולהציגו, וכן לחזק את הביטחון העצמי שלהם.

- **"יותר מחשבה ופחות מחשבון":** מגמה של צמצום התרגול האלגברי הטכני ה"יבש" לטובת שאלות הבנה ואסטרטגיות חשיבה מסדר גבוה, גם כשהשאלות אינן ברמת קושי גבוהה, אך דורשות חשיבה מעבר לתרגול טכני, יבש ורפטיבי. בתוך כך שולבו בפרקי הספר שאלות רבות מהסוגים הבאים:

1. **שאלות חקר** המכוונות את התלמידים להגיע בעצמם לתובנה לפני הופעת ההסבר המפורט בספר.
2. **שאלות פתוחות** הן שאלות שאינן מובילות לפתרון יחיד, ובהן התלמידים יכולים להציע תשובות שונות על סמך החשיבה והפרשנות האישית שלהם. בחלק משאלות אלו התלמידים מתבקשים **לכתוב שאלות** משל עצמם. שאלות מסוג זה מעודדות יצירתיות והעמקה ("הציעו פונקציה משלכם ש..."), "הציעו שיעורים משלכם לנקודה A כך ש...". "כתבו שתי שאלות שהייצוג האלגברי של הפונקציה עונה עליהן."
3. **שאלות שיח מתמטי** המציגות טענות מנומקות שונות, כאשר התלמידים נדרשים לבחון את הטענות, לקבוע אם הן נכונות על בסיס הידע המתמטי שלהם, ובתוך כך לפתח חשיבה ביקורתית.
4. שאלות העוסקות ב**שגיאות נפוצות** המאפשרות לתלמידים לזהות שגיאות שנעשו בידי אחרים ולהבין אותן, וכך ללמוד להימנע מהן בעתיד.
5. שאלות שבהן התלמידים מתבקשים להציע **שתי דרכים לפתרון** מעודדות יצירתיות וגמישות מחשבתית, מחזקות את הקישוריות בין שיטות שונות ומפתחות מיומנויות לפתרון בעיות.

אילו עקרונות הנחו אותנו בכתיבת המדריך למורה?

- **תכליתיות:** ציפייה מרכזית שעלתה בשיח עם צוותי ההוראה היא הצורך במדריך תכליתי, ממוקד ונוח לשימוש, כדי לא להכביד ולהעמיס על צוותי ההוראה במהלך ההכנה לשנת הלימודים ולשיעורים עצמם. לפיכך בחרנו לעסוק במדריך בנושאים ובשאלות שלהבנתנו נכון להתעמק בהם.



- **ההמלצה שלנו - ההחלטה בידי המורה:** במדריך מתווה מומלץ לסדר הלימוד והמלצות שלנו לאופן שבו כדאי להציג את הנושא ולתרגל אותו לאורך הפרק. צוותי ההוראה יוכלו לבחור אילו המלצות ברצונם לאמץ, לאור ניסיונם ומתוך היכרותם עם הכיתות.

כיצד בנויים פרקי הספר?

כל פרק נפתח במסגרות צהובות, הסברים, מונחים, דוגמאות פתורות, שרטוטים והתנסויות מוחשיות. אנו ממליצים להציג בפני הכיתה את כל הדגשים והמונחים המופיעים במסגרות הצהובות, לפי הסדר שבו הם מופיעים, מכיוון שהתלמידים יידרשו להשתמש בהם בהמשך הפרק.

בפתיחת הפרק יופיעו שאלות חקר או המחשת צורך, ואחריהן שאלות ברמת הבסיס המאפשרות לכיתה "נחיתה רכה" בנושא החדש. עם התקדמות הפרק רמות המורכבות והקושי עולות בהדרגה. במהלך הפרק שזורות שאלות מגוונות, לרבות שאלות חקר, שאלות פתוחות, שאלות שיח מתמטי ושאלות העוסקות בשגיאות נפוצות.

בהמשך הפרק יופיעו מסגרות צהובות נוספות, עם הסברים, חידודים, הבהרות ודוגמאות. כל המידע המופיע בהן כלול בתוכנית הלימודים.

בפרקים מופיעות מסגרות כחולות להעשרה בנושאים שונים הקשורים בהיסטוריה של המתמטיקה ובתפקיד שהיא ממלאת בעולם לצד מבזקי "הידעת?". המסגרות הכחולות נועדו לעורר בתלמידים סקרנות ועניין. המידע המופיע בהן **אינו כלול בתוכנית הלימודים**, וההחלטה אם להתייחס אליהן בכיתה היא לפי שיקול הדעת של המורה.

אילו סימונים בספר כדאי להכיר?

מרבית השאלות בספר מיועדות לרמת הכיתה. כדי להקל על המורה בסיווג השאלות בחרנו בסימונים אלו: שאלות המסומנות באיור  הן שאלות העמקה שיש בהן הזדמנות לתובנה מעניינת או להיבט ייחודי. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מיועדות לתלמידים מיומנים ולכיתות מתקדמות.

מה כדאי לדעת לגבי סדר הלימוד המומלץ?

כרך א' כתוב לפי הסדר שבו אנו ממליצים ללמד אותו.

אילו שאלות כדאי לבחור לעבודת כיתה / בית?

בכל פרק אנו ממליצים אילו שאלות כדאי לתת כעבודת כיתה וכעבודת בית. הבחירה בפועל אילו שאלות ייכללו בעבודת הכיתה, היא כמובן בידי המורה בכיתה מתוך שיקולי זמן ועל פי רמת המיומנות של התלמידים.

אילו חומרי לימוד מלווים את הלמידה בספר?

באתר 'הוצאת ארכימדס', בעמוד של הספר "בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472", יש גישה ל"מרחב ההוראה", ובו יהיו זמינות לצוותי ההוראה חוברות לתרגול נוסף בנושאי הספר.

הגישה בקישור <https://bit.ly/44aUAzi> או בסריקת הברקוד משמאל.

ברצוני להודות ...

לד"ר ענת שילה על הייעוץ הפדגוגי. לד"ר עדי בן-צבי על הייעוץ המקצועי.
לאורית מסינגר על העריכה הלשונית. לקארין קופרמן על הייעוץ הגרפי.
לאדר חבה וליוחאי לוי על ההגהה המקצועית ועל עריכת הספר.
לצוות המקצועי - עופר מנדל, ניר קסטוריאנו, שי סלטו, שלום אדורס, עדן עמבר, מיטב שילר, יונתן שקוף, דניאל פופול, עומר קדרון, נטע אלון, איתי רון, איתן גרוסמן וטל קלינגר - על תרומתם בהגהה המקצועית ובבדיקת ההסברים והשאלות.
לנועם פרץ ולליטל דבש-אשכנזי על תרומתם היצירתית בהכנת הכריכה של הספר.
ליואב בלוח על סיועו בהבאת הספר לדפוס.

בהצלחה!

אסף לוי
חולון, יוני 2025

תוכן עניינים - בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472 - כרך א'

6	פרק 1 - חזקות
8	פרק 2 - הפונקציה המעריכית - קדם אנליזה
8	היכרות עם הפונקציה המעריכית
11	טרנספורמציות בפונקציה המעריכית
13	משוואות מעריכיות ואישוויונות מעריכיים
15	פרק 3 - הפונקציה הלוגריתמית - קדם אנליזה
15	הגדרת הלוגריתם
17	היכרות עם הפונקציה הלוגריתמית
19	טרנספורמציות בפונקציה הלוגריתמית
21	משוואות ואישוויונות לוגריתמיים
23	משוואות מעריכיות מהסוג $a^x = b$ שנפתרות בעזרת לוגריתמים
24	פרק 4 - שאלות גדילה ודעיכה
27	פרק 5 - הפונקציה המעריכית - אנליזה
27	נושאים נוספים בקדם אנליזה של פונקציות מעריכיות ללא מנה
29	אנליזה של פונקציות מעריכיות ללא מנה
31	חקירה מלאה של פונקציה מעריכית ללא מנה
33	נושאים נוספים בקדם אנליזה של פונקציות מעריכיות עם מנה
35	אנליזה של פונקציות מעריכיות עם מנה
37	חקירה מלאה של פונקציה מעריכית עם מנה
39	פרק 6 - פונקציה מעריכית - אינטגרל
41	פרק 7 - פונקציה לוגריתמית - אנליזה
41	נושאים נוספים בקדם אנליזה של פונקציות לוגריתמיות
43	אנליזה של פונקציות לוגריתמיות
45	חקירה מלאה של פונקציה לוגריתמית
47	פרק 8 - פונקציה לוגריתמית - אינטגרל

פרק 1 - חזקות

מה נלמד בפרק זה?

- נחזור להגדרת החזקה עבור חזקה עם מעריך טבעי.
- נעסוק בחוקי החזקות.
- נעסוק בחזקות שהמעריך שלהן הוא 0.
- נעסוק בחזקות שהמעריך שלהן שלילי.
- נעסוק בחזקות שהמעריך שלהן הוא מספר רציונלי.

שעות לימוד מומלצות לפרק זה : שעתיים.

מהי המטרה המרכזית בפרק? חזרה והעמקה על חוקי החזקות והגדרת חזקה עם מעריך רציונלי.

על אילו נושאים קודמים נחזור בפרק?

- הגדרת החזקה
- סדר פעולות החשבון
- חוקי החזקות
- ביטויים אלגבריים
- פונקציות שוות
- מספר רציונלי
- שורשים

מה חשוב לי לדעת?

- הפרק מציע חזרה מקיפה ומגוונת בנושא חוקי החזקות.
- אנו ממליצים שפרק זה, לפחות בחלקו, יינתן לתלמידים **בסוף כיתה י"א** במסגרת עבודת הקיץ לקראת תחילת כיתה י"ב או במסגרת עבודת בית לחגי תשרי (ככל שחופשות החגים קרובות לתאריך תחילת הלימודים), היות שהתלמידים מכירים את חוקי החזקות, וכך ניתן לחסוך זמן הוראה בכיתה.
- **שאלות מומלצות לעבודה בכיתה**: 3, 4, 7א'-ג', 8, 16, 20ג'-ד', 21, 25ג', 27, 30, 31ג'-ד', 32, 34, 39.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית**: 1, 2, 5, 6, 7ד'-ה', 9-15, 17-19, 20א'-ב', ה'-ו', 22-24, 25א'-ב', 26, 28, 29, 31א'-ב', ה'-ז', 33, 35-38.
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך הפרק?

- **הפרק פותח בעמוד 6** בהגדרת החזקה, במקרים המיוחדים, ובחוקי החזקות עבור מעריך טבעי. בין השאלות שבפרק מופיעות שאלות אשר משתייכות לסוגים הבאים:
 - שאלות העוסקות **בשגיאות נפוצות**. שאלות מסוג זה מאפשרות לתלמידים עיבוד שונה של הנושא.
 - **שאלות פתוחות**. אלו שאלות שאינן מובילות לפתרון יחיד, ובהן התלמידים יכולים להציע תשובות שונות על סמך החשיבה והפרשנות האישית שלהם. בתוך כך הן מעודדות יצירתיות והבנה מעמיקה.
- **שאלות 1-20** עוסקות בחוקי החזקות עבור חזקות עם מעריך טבעי. **בשאלות 4 ו-8** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאות נפוצות** הקשורים בחוקים אלו. **שאלה 5** היא **שאלה פתוחה**.
- **המסגרת הצהובה בעמוד 9** פותחת את הנושא של חזקות עם בסיס שלילי, ועוסקת בקושי המוכר של תלמידים להבחין בין ביטויים דומים כמו $(-3)^4$ ו- -3^4 .
- **שאלות 15-20** עוסקות בחזקות שהבסיס שלהן הוא מספר שלילי. מעבר לכך שמדובר בהמשך ההעמקה בתחום החזקות, מטרתו של תרגול זה היא לסייע לתלמידים בקושי המוכר בהעלאת מספרים שליליים בחזקה. הנושא בא לידי ביטוי בשאלון זה במסגרת החשבון הדיפרנציאלי כאשר התלמידים נדרשים להציב מספרים חיוביים ושליליים בביטויים אלגבריים אשר כוללים חזקות.
- **המסגרת הצהובה בעמוד 10** פותחת את הנושא של מעריך חזקה שאינו חיובי ומזכירה את החוקים לגבי חזקה עם מעריך שלילי וחזקה עם מעריך 0. **שאלות 21-30** עוסקות בחזקות מסוג זה בהקשר של חוקי החזקות שלמדנו בתחילת הפרק. **שאלה 28** היא **שאלה פתוחה**. **בשאלה 30** התלמידים נדרשים למצוא **שתי דרכים** לפתרון. שאלות מסוג זה מסייעות לתלמידים בפיתוח הבנה מעמיקה יותר של החומר, בפיתוח הגמישות המחשבתית ובכך גם בחיזוק הביטחון העצמי בחומר הלימודי.
- **במסגרת הצהובה בעמוד 12** מופיע הסבר על חזקות שהמעריך שלהן הוא מספר רציונלי. **שאלה 31** עוסקת בחזקות מסוג זה.
- **בחלק האחרון של פרק זה בעמוד 13** נסכם ונתרגל את חוקי החזקות בעזרת פונקציות, כהכנה לפרקי קדם האנליזה בהמשך. במסגרת הצהובה התחתונה בעמוד 12 מופיע הסבר על פונקציות שוות, וניעזר במידע זה בתרגילים הבאים. **שאלות 32-39** עוסקות בחוקי חזקות בהקשר של פונקציות. **בשאלה 38** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאה נפוצה**.

”שליחותו של המורה. אין מקצוע מיוחס יותר. לעורר באדם אחר כוחות וחלומות מעבר לאלה של האדם; לגרום לאחר לאהוב את שאתה אוהב; להפוך את ההווה הפנימי של אדם לעתידו; זוהי הרפתקה משולשת שאין כמוה.”

פרופסור ג'ורג' שטיינר, מבקר ספרות

פרק 2 - הפונקציה המעריכית - קדם אנליזה

היכרות עם הפונקציה המעריכית - עמודים 15-31

מה נלמד בתת־פרק זה?

- נעסוק בפונקציות מעריכיות מהסוג $f(x) = a^x$ כאשר $1 < a$.
- נעסוק בפונקציות מעריכיות מהסוג $f(x) = a^x$ כאשר $0 < a < 1$.
- נעסוק במונחים: גדילה ליניארית, גדילה מעריכית ודעיכה מעריכית.
- פונקציה מעריכית שבסיסה e .

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק: 3 שעות.

מהי המטרה המרכזית בתת־הפרק? היכרות עם הפונקציה המעריכית $f(x) = a^x$ עבור a חיובי ושונה מ־1 ועם המונחים: גדילה ליניארית, גדילה מעריכית ודעיכה מעריכית.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת־הפרק?

- חזקות
- אסימפטוטה אופקית
- תחומי עלייה וירידה
- תחומי חיוביות ושליליות

מה חשוב לי לדעת?

- תת־הפרק מהווה בסיס להיכרות עם הפונקציות המעריכיות כמודל מתמטי שבעזרתו ניתן לתאר תופעות של גידול ודעיכה בטבע ובמדע. העיסוק בפונקציות אלו הוא הקדמה לקראת פתרון שאלות גדילה ודעיכה וחקירת פונקציה מעריכית בהמשך השנה.
- בתת־פרק זה נעסוק בפונקציות מהסוג $f(x) = a^x$, ובהמשך הפרק נעסוק בטרנספורמציות המתבצעות על הגרפים של פונקציות מסוג זה.
- לאחר ההיכרות עם תכונות הפונקציות מהסוג $f(x) = a^x$, יוצג המספר e , ונעסוק בפונקציות $f(x) = e^x$ ו־ $f(x) = e^{-x}$. שילוב הפונקציות האלו נועד להמחיש לתלמידים שהפונקציה המעריכית שבסיסה e שייכת למשפחת הפונקציות $f(x) = a^x$, ויש לה אותן תכונות. למעשה, זהו השלב הראשון בקדם אנליזה של הפונקציות המעריכיות שבסיסן e .
- שאלות מומלצות לעבודת כיתה: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 24, 25 + השאלה במסגרת הכחולה
- שאלות מומלצות לעבודת בית: 4, 7-9, 13, 14, 16-23, 26, 27.
- שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך הפרק?

החלק הראשון של תת-הפרק עוסק בפונקציות המתאפיינות בגדילה מעריכית.

- הפרק נפתח בשאלת המחשה העוסקת בייצוג האלגברי של פונקציה מעריכית בהקשר של ניסוי מעבדה שבו חיידקים מתחלקים לשניים בכל דקה. בעזרת שאלה זו התלמידים מקבלים מושג ראשוני למשמעות של הפונקציה המעריכית.
- **שאלות 3-5** הן **שאלות חקר** שבעזרתן אנו חוזרים להגדרה של אסימפטוטה אופקית ומגלים את התכונות המאפיינות פונקציות מעריכיות מהסוג $f(x) = a^x$ כאשר $1 < a$. **שאלה 6** עוסקת בכך.
- **המסגרת הצהובה התחתונה בעמוד 18** עוסקת בהשוואה בין קצב ההשתנות של פונקציה לינארית לבין קצב ההשתנות של פונקציה מעריכית, והתלמידים נחשפים לראשונה למונחים גדילה לינארית וגדילה מעריכית. **שאלות 7-9** עוסקות בכך. **שאלה 8** היא **שאלה פתוחה**. **שאלה 9** עוסקת בנושא בהקשר של **סוגיה מציאותית**.
- **המסגרת הצהובה התחתונה בעמוד 19** עוסקת לראשונה בקצב גדילה שונה בין פונקציות מעריכיות. **שאלות 10 ו-11** עוסקות בכך. **שאלה 10** היא **שאלה פתוחה**.

החלק השני של תת-הפרק עוסק בפונקציות המתאפיינות בדעיכה מעריכית.

- **שאלה 12** היא שאלת המחשה העוסקת בייצוג האלגברי של פונקציה מעריכית בהקשר של התפרקות חומרים רדיואקטיביים. בעזרת שאלה זו אנו מקבלים מושג ראשוני למשמעות של פונקציה מעריכית מהסוג $f(x) = a^x$ כאשר $0 < a < 1$.
- **שאלות 13-15** הן **שאלות חקר** שבעזרתן התלמידים מגלים את התכונות המאפיינות פונקציות מהסוג $f(x) = a^x$ כאשר $0 < a < 1$. **שאלות 16-20** עוסקות בכך. **שאלה 19** היא **שאלה פתוחה**.
- **המסגרת הצהובה בעמוד 24** עוסקת בקצב דעיכה שונה בין פונקציות מעריכיות שונות. **שאלות 21-22** עוסקות בכך.
- **שאלה 23** היא **שאלת חקר מקוצרת** שמטרתה להעביר לתלמידים מדוע לא נעסוק כלל בפונקציות מעריכיות שבסיסן 1.

החלק השלישי של תת-הפרק עוסק בפונקציות מעריכיות שבסיסן e .

בעמודים 25-27, נעסוק בפונקציה מעריכית שבסיסה e . המסגרת הצהובה בתחתית עמוד 25 מציגה בפני התלמידים את המספר e , והמסגרת הצהובה העליונה בעמוד 26 מציגה את התכונות של הפונקציה $f(x) = e^x$ כאותן תכונות של משפחת הפונקציות $f(x) = a^x$ כאשר $1 < a$. במסגרת הצהובה ישנה גם המחשה דיגיטלית שניתן להיכנס אליה בלחיצה או בסריקה. שאלות 24-27 עוסקות בכך בהקשרים השונים שבהם עסקנו לאורך הפרק כולו.

”ברוב המדעים כל דור הורס את מה שבנה קודמו, ומה שביסס האחד מערער האחר.
רק במתמטיקה מוסיף כל דור נדבך חדש למבנה הקיים.”
הרמן הנקל, מתמטיקאי

פרק 2 - הפונקציה המעריכית - קדם אנליזה

טרנספורמציות בפונקציה המעריכית - עמודים 32-39

מה נלמד בתת-פרק זה?

- נעסוק בטרנספורמציות של פונקציות מעריכיות: הזזה אנכית, הזזה אופקית, כיווץ ומתיחה אנכיים, שיקוף ביחס לציר ה־x, שיקוף ביחס לציר ה־y, וערך מוחלט.

שעות לימוד מומלצות לתת-הפרק: שעה.

מהי המטרה המרכזית של תת-הפרק? ביצוע טרנספורמציות על גרפים של פונקציות מעריכיות מהסוג

$$f(x) = a^x \text{ ו- } f(x) = a^{-x} \text{ כאשר } 1 < a$$

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת-הפרק?

- פונקציה מעריכית
- הזזה אנכית
- הזזה אופקית
- שיקוף ביחס לציר ה־x
- שיקוף ביחס לציר ה־y
- טרנספורמציה של ערך מוחלט
- אסימפטוטה אופקית

מה חשוב לי לדעת?

- בחלק זה נחזור לטרנספורמציות שעסקנו בהן בשנים הקודמות אך בהקשר של פונקציות מעריכיות, כחלק משמעותי של שלב קדם האנליזה.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית: 1, 4.**
- לאחר שתי שאלות אלו, מומלץ להקρίן על המסך בכיתה את הפעילות הדיגיטלית הכיתתית בעמוד 37 למעלה. צוות ההוראה מקריין בכיתה את הפעילות וכולם משתתפים. המטרה היא שהכדור המשוחרר יאסוף איתו בנפילתו את כל הכוכבים ולשם כך הכיתה תציע אילו טרנספורמציות עלינו לבצע על הפונקציה הנתונה הבסיסית כדי לאפשר זאת. רמת הקושי עולה מפונקציה לפונקציה.
- שאלות נוספות: 6, 9, 10, 11א.**
- **שאלות מומלצות לעבודת בית: 2, 3, 5, 7, 8, 11ב-ג'.**
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת-הפרק?

- **המסגרת הצהובה התחתונה בעמוד 32** מציגה את הגרף הבסיסי של הפונקציה המעריכית, ומבהירה שמעתה, נסתמך על גרף זה כדי לבצע טרנספורמציות על פונקציות מעריכיות שונות. בהתאם, הגרף לא יופיע מחדש בכל שאלה, ועל התלמידים לזכור אותו.
- **המסגרות הצהובות בעמודים 33-35** מציגות את כל הטרנספורמציות שלמדנו בעבר מלבד טרנספורמציית ערך מוחלט (הזזה אנכית, הזזה אופקית, כיווץ ומתיחה אנכיים, שיקוף ביחס לציר ה- x ושיקוף ביחס לציר ה- y) בהקשר של הפונקציה המעריכית. **שאלות 1-8** עוסקות בטרנספורמציות אלה. **שאלות 1-5** עוסקות בביצוע טרנספורמציה אחת על כל פונקציה, ו**שאלות 6-8** עוסקות בשילוב של מספר טרנספורמציות.

- **בעמוד 37 משמאל למעלה מופיעה פעילות דיגיטלית** שניתן להיכנס אליה בסריקה או בלחיצה. הפעילות עוסקת בטרנספורמציות על הפונקציה המעריכית באופן מדורג ואינטרקטיבי. מומלץ לבצע אותה בכיתה תוך הקרנה על הלוח.

תשובות אפשריות לפעילויות על פונקציות מעריכיות:

- | | |
|--------------|-----------------|
| 1. $e^x + 3$ | 2. e^{x-5} |
| 3. e^{-x} | 4. e^{x+1} |
| 5. $-e^x$ | 6. $e^x - 3$ |
| 7. $-3e^x$ | 8. $0.1e^{x+3}$ |
| 9. $6e^{-x}$ | 10. $-3e^x + 5$ |

- **המסגרת הצהובה בעמוד 37** למטה היא תזכורת לטרנספורמציית ערך מוחלט, והיא מרחיבה את היישום שלה לפונקציות מעריכיות. **שאלות 9-11** עוסקות בטרנספורמציה של הערך המוחלט באופן אינטגרטיבי עם שאר הטרנספורמציות שלמדנו. **שאלה 9** היא **שאלת חקר** שבעזרתה התלמידים נזכרים בהשפעה האפשרית של טרנספורמציית הערך המוחלט על האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

- **בשאלה 11** התלמידים מבצעים 3 טרנספורמציות על גרף של פונקציה נתונה. תרשים החיצים המופיע בכל סעיף מציג בפני התלמידים מהי הטרנספורמציה המתבצעת בכל שלב כך שיכולו לתרגל שרטוט גרף של פונקציה בשלבים.

"מטרת החינוך היא להחליף מוח ריק בראש פתוח."

- מלקולם פורבס, עיתונאי ומוציא לאור

פרק 2 - הפונקציה המעריכית - קדם אנליזה

משוואות מעריכיות ואי־שוויונות מעריכיים - עמודים 40-49

מה נלמד בתת־פרק זה?

- נלמד מהי משוואה מעריכית, ונפתור משוואות מעריכיות מסוגים שונים.
- נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרפים של פונקציות מעריכיות עם הצירים.
- נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין הגרפים של שתי פונקציות מעריכיות.
- נפתור אי־שוויונות מעריכיים באופן גרפי ובאופן אלגברי.
- נסכם את החומר בעזרת חקירת פונקציה מעריכית, ונשרטט את הגרף שלה.

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק: 3 שעות.

מהי המטרה המרכזית של תת־הפרק? פתרון משוואות מעריכיות ופתרון אי־שוויונות מעריכיים באופן גרפי ובאופן אלגברי, ככלי שבעזרתו נוכל לחקור פונקציות מעריכיות.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת־הפרק?

- פונקציה מעריכית
- חוקי החזקות
- טרנספורמציות
- נקודות חיתוך עם הצירים
- נקודות חיתוך בין גרפים
- המספר e

מה חשוב לי לדעת?

- תת־הפרק מציע שפע של תרגול בסוגים שונים של משוואות ואי־שוויונות, זאת לקראת שימוש במשוואות ובאי־שוויונות אלו בפרקים העוסקים בשאלות גדילה ודעיכה ובחקירת פונקציה מעריכית שבסיסה e. יש מגוון של שאלות שאינן "משוואות יבשות" אלא יישום שלהן בהקשר של פונקציות.
- בחלק הראשון של תת־הפרק נעסוק בפתרון משוואות מעריכיות.
- בחלק השני של תת־הפרק נעסוק בפתרון אי־שוויונות באופן אלגברי וגרפי.
- בכל אחד מהחלקים נעסוק גם בתרגילים שבהם בסיס החזקה הוא e, וזאת כהכנה לפרק האנליזה של פונקציות מעריכיות שבסיסן e.
- **שאלות מומלצות לעבודת כיתה:** 1, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית:** 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת־הפרק?

בחלק הראשון של תת־הפרק נעסוק בפתרון משוואות מעריכיות באופן אלגברי.

- **שאלה 1** היא **שאלת חקר מדורגת** שתחילה גורמת לתלמידים להתנסות במשוואות מעריכיות פשוטות באופן אינטואיטיבי, ובהמשך מכוונת את התלמידים לפתרון משוואה מעריכית על ידי השוואת מעריכים. **שאלות 2-21** עוסקות בסוגים שונים של משוואות מעריכיות. כאשר מופיעות משוואות מסוג חדש, התלמידים נחשפים אליהן בשאלת חקר או בדוגמה במסגרת צהובה.
- מצאנו חשיבות רבה לעסוק **בשגיאות נפוצות** לאורך הפרק. **שאלות 4, 9, 15, 18** עוסקות בכך.

בחלק השני של תת־הפרק נעסוק בפתרון אישוויונות מעריכיים באופן אלגברי וגרפי.

- **שאלה 22** היא **שאלת חקר מדורגת** שבה התלמידים נחשפים לסדר הפעולות שבעזרתו ניתן לפתור אישוויון מעריכי הן באופן גרפי והן באופן אלגברי. הבחירה לעסוק תחילה בפתרון גרפי של אישוויון מעריכי לפני פתרון אלגברי נועדה לאפשר לתלמידים **הבנה אינטואיטיבית** של משמעות אישוויון כתחום שבו ערכי פונקציה אחת גדולים מערכיה של השנייה, זאת לפני שילמדו כיצד לפתור אישוויון בכלים אלגבריים טכניים יותר. **שאלות 23-24** עוסקות בכך, ומציעות לתלמידים לפתור אותן באיזו דרך שירצו, אלגברית או גרפית.
- **במסגרת הצהובה התחתונה בעמוד 47** מופיעה דוגמה לאישויון מעריכי שניתן לפתור באופן אלגברי בלבד. **שאלות 25-26** עוסקות בכך.
- **שאלה 27** מסכמת את שלב קדם האנליזה של פונקציות מעריכיות. התלמידים נדרשים לחקור פונקציה מעריכית על בסיס הידע שלהם בטרנספורמציות ובפתרון משוואות ואישויונות מעריכיים, ולשרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

”אדם מביט לאחור בהערכה אל המורים המבריקים,
אך עם הכרת תודה לאלה אשר נגעו ברגש האנושי שלו.”

קארל גוסטב יונג, מאבות הפסיכולוגיה המודרנית

פרק 3 - הפונקציה הלוגריתמית - קדם אנליזה

הגדרת הלוגריתם - עמודים 50-57

מה נלמד בתת-פרק זה?

- נלמד מהו לוגריתם.
- נכיר את חוקי הלוגריתמים.

שעות לימוד מומלצות לתת-הפרק: 3 שעות.

מהי המטרה המרכזית של תת-הפרק? היכרות עם הלוגריתם ועם חוקי הלוגריתמים.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת-הפרק?

- חזקות
- המספר e

מה חשוב לי לדעת?

- בחלק זה התלמידים פוגשים לראשונה את הלוגריתם, את תחום ההגדרה שלו ואת חוקי הלוגריתמים.
- יש שפע של תרגול בנושא. **היקף התרגול הוא לשיקול הדעת של צוות ההוראה** בהתאם לרמת המיומנות של הכיתה ולשיקולי זמן.
- בפרק זה התלמידים נחשפים לראשונה לכתיבה מתמטית של לוגריתם מבסיס e כ־ $\ln$.
- בפרק מגוון של שאלות חקר שבעזרתן התלמידים מגלים את חוקי הלוגריתמים.
- **שאלות מומלצות לעבודת כיתה: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20**
- **שאלות מומלצות לעבודת בית: 3, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21.**
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך הפרק?

החלק הראשון של תת-הפרק עוסק בהגדרת הלוגריתם וביישום של הגדרה זו בהקשרים שונים.

- הפרק נפתח **בשאלת חקר מדורגת** שבה התלמידים נתקלים לראשונה במשוואה מעריכית בסיסית מהסוג $a^x = b$ שלא ניתן לפתור על ידי הצגת האגפים כחזקות בעלות בסיס זהה. שאלה זו היא **המחשת צורך** לנושא. בפרקים מאוחרים יותר ניעזר בלוגריתמים במסגרת שאלות גדילה ודעיכה וחקירת פונקציות מעריכיות שבסיסן e .
- **במסגרת הצהובה בעמוד 50** אנו מציגים את הגדרת הלוגריתם ואת משמעותו. **שאלות 2-4** עוסקות בכך.
- **המסגרת הצהובה התחתונה בעמוד 51** מדגימה **שתי דרכים** שבהן ניתן לחשב ערך של לוגריתם. **שאלה 5** עוסקת בכך.
- **שאלות 6-7** הן **שתי שאלות חקר קצרות** שבהן התלמידים מגלים תכונות נוספות של לוגריתמים. **שאלה 8** עוסקת בתחום ההגדרה של הלוגריתם.
- **שאלה 9** נוגעת לראשונה במשוואה שיש בה לוגריתם, באופן שמצריך הבנה של הגדרת הלוגריתם בלבד.
- **המסגרת הצהובה העליונה בעמוד 53** מסבירה את ההבדל בין הביטויים $\log(b^n)$ ו- $(\log b)^n$. **שאלה 10** עוסקת בכך.
- **שאלה 11** עוסקת בכתיבה הייחודית של לוגריתמים מבסיס 10 ובכתיבה הייחודית של לוגריתמים מבסיס e בתור $\ln$.

החלק השני של תת-הפרק עוסק בחוקי הלוגריתמים.

- **שאלה 12** היא **שאלת חקר מדורגת** שבעזרתה התלמידים פוגשים את חוק הלוגריתם של מכפלה. **שאלות 13-14** עוסקות בו.
- **שאלה 15** היא **שאלת חקר מדורגת** שבעזרתה התלמידים פוגשים את חוק הלוגריתם של מנה. **שאלות 16-17** עוסקות בו. **בשאלה 17** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאה נפוצה** הקשורה בחוק זה.
- **שאלה 18** היא **שאלת חקר מדורגת** שבעזרתה התלמידים פוגשים את חוק הלוגריתם של חזקה. **שאלות 19-21** עוסקות בו. **בשאלה 21** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאה נפוצה** הקשורה בחוק זה.

"השכלה אינה מילוי של דלי, אלא הצתה של אש."

ויליאם בטלר ייטס, משורר ומחזאי אירי

פרק 3 - הפונקציה הלוגריתמית - קדם אנליזה

היכרות עם הפונקציה הלוגריתמית - 58-65

מה נלמד בתת-פרק זה?

- נעסוק בפונקציות לוגריתמיות מהסוג $f(x) = \log_a x$ כאשר $1 < a$ וכאשר $0 < a < 1$.
- נעסוק במונחים גדילה לוגריתמית ודעיכה לוגריתמית.

שעות לימוד מומלצות לתת-הפרק: שתיים.

מהי המטרה המרכזית של תת-הפרק? היכרות עם הפונקציה הלוגריתמית $f(x) = \log_a x$ עבור a חיובי ושווה מ-1, ועם המונחים: גדילה לוגריתמית ודעיכה לוגריתמית.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת-הפרק?

- לוגריתם
- אסימפטוטה אנכית
- גדילה לינארית
- גדילה מעריכית
- שיקוף ביחס לציר ה-x
- המספר e

מה חשוב לי לדעת?

- חלק זה הוא בסיס להיכרות עם הפונקציות הלוגריתמיות. העיסוק בפונקציות אלו מהווה הטרמה לקראת עיסוק בחקירה של פונקציה לוגריתמית שבסיסה e ($\ln$).
- נעסוק בפונקציות מהסוג $f(x) = \log_a x$ עבור a חיובי ושווה מ-1, ובפרקים הבאים נעסוק בטרנספורמציות המתבצעות על הגרפים של פונקציות מסוג זה.
- לאחר ההיכרות עם תכונות הפונקציות מהסוג $f(x) = \log_a x$ יוזכר המספר e , ונעסוק בפונקציה $f(x) = \ln x$. שילוב הפונקציות האלו בפרק נועד להמחיש לתלמידים שהפונקציה הלוגריתמית שבסיסה e שייכת למשפחת הפונקציות $f(x) = \log_a x$ עבור a גדול מ-1, ויש לה תכונות זהות. למעשה, זהו השלב הראשון בקדם אנליזה של הפונקציות הלוגריתמיות.
- **שאלות מומלצות לעבודת כיתה:** 1, 2, 4, 6, 8, 9, 14, 15, 16 ג-ד'.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית:** 3, 5, 7, 10-13, 16 א-ב'.
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת-הפרק?

החלק הראשון עוסק בפונקציות המתאפיינות בגדילה לוגריתמית.

- נחלק נפתח בהצגת הפונקציה הלוגריתמית ותחום הגדרתה. **שאלה 1** עוסקת בכך.
- **שאלה 2** היא **שאלת חקר מדורגת** שבעזרתה התלמידים מגלים את התכונות של הפונקציה הלוגריתמית מהסוג $f(x) = \log_a x$ כאשר $1 < a$. **שאלות 3 ו-4** עוסקות בכך.
- **המסגרת הצהובה העליונה בעמוד 60** עוסקת בהשוואה בין קצב ההשתנות של פונקציה לינארית לבין קצב ההשתנות של פונקציה לוגריתמית, והתלמידים נחשפים לראשונה למונח **גדילה לוגריתמית**.
- **המסגרת הצהובה התחתונה בעמוד 60** מציגה קצב גדילה שונה בין פונקציות לוגריתמיות. **שאלות 5-7** עוסקות בכך. **שאלות 5 ו-7** הן **שאלות פתוחות**. **בשאלה 6** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאה** בטענה המוצגת בפניהם.

החלק השני עוסק בפונקציות המתאפיינות בדעיכה לוגריתמית.

- **שאלה 8** היא **שאלת חקר מדורגת** שבעזרתה התלמידים מגלים את התכונות המאפיינות פונקציות מהסוג $f(x) = \log_a x$ כאשר $0 < a < 1$. **שאלות 9-12** עוסקות בכך. **שאלה 10** היא **שאלה פתוחה**.
- **המסגרת הצהובה התחתונה בעמוד 62** מציגה שתי פונקציות לוגריתמיות יורדות שבסיסיהן שונים ועוסקת בקצב הירידה השונה ביניהן. **שאלות 13-14** עוסקות בכך.

החלק השלישי עוסק בפונקציות לוגריתמיות שבסיסן e ($\ln$).

- **המסגרת הצהובה בעמוד 63** מציגה את הפונקציה $f(x) = \ln x$ בפני התלמידים כמשתייכת למשפחת הפונקציות $f(x) = \log_a x$ כאשר $1 < a$, ואת תכונותיה.
- **שאלות 15-16** עוסקות בכך בהקשרים השונים שעסקנו בהם לאורך הפרק.

"ילד אחד, מורה אחד, ספר אחד, עט אחד - יכולים לשנות את העולם."
מלאכה יוספזאי, פעילת זכויות בפקיסטן

פרק 3 - הפונקציה הלוגריתמית - קדם אנליזה

טרנספורמציות בפונקציה הלוגריתמית - עמודים 66-68

מה נלמד בתת־פרק זה?

- נעסוק בטרנספורמציות של פונקציות לוגריתמיות: הזזה אנכית, הזזה אופקית, כיווץ ומתיחה אנכיים, שיקוף ביחס לציר ה־x, שיקוף ביחס לציר ה־y וטרנספורמציה של ערך מוחלט.

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק: שעה.

מהי המטרה המרכזית בתת־הפרק? ביצוע טרנספורמציות על גרפים של פונקציות לוגריתמיות מהסוג $f(x) = \log_a x$ כאשר a חיובי ושונה מ־1.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת־הפרק?

- הפונקציה הלוגריתמית
- הזזה אופקית
- הזזה אנכית
- שיקוף ביחס לציר ה־x
- שיקוף ביחס לציר ה־y
- כיווץ ומתיחה אנכיים
- טרנספורמציה של ערך מוחלט

מה חשוב לי לדעת?

- תת־הפרק חוזר לטרנספורמציות שעסקנו בהן בהרחבה בפרק 2 אך בהקשר של פונקציות לוגריתמיות, כחלק משמעותי של שלב הקדם אנליזה.
- יש שפע של שאלות מגוונות בתחום הטרנספורמציות. בהתאם לרמת המיומנות של הכיתה ולשיקולי זמן יבחר צוות ההוראה באיזו מידה להעמיק בו.
- **שאלות מומלצות לעבודת כיתה:** מומלץ לפתוח את הנושא בהקרנת הפעילות הדיגיטלית הכיתתית בעמוד 66 למעלה על המסך בכיתה. צוות ההוראה מקרין בכיתה את הפעילות וכולם משתתפים. המטרה היא שהכדור המשוחרר יאסוף איתו בנפילתו את כל הכוכבים ולשם כך הכיתה תציע אילו טרנספורמציות עלינו לבצע על הפונקציה הנתונה הבסיסית כדי לאפשר זאת. רמת הקושי עולה מפונקציה לפונקציה. **שאלות נוספות:** 3, 6, 8, 10 ב'.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית:** 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10 א', ג'.
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת־הפרק?

- **שאלות 1-3** עוסקות בביצוע טרנספורמציה אחת על כל פונקציה. והן מציעות תרגול אינטגרטיבי בסוגי הטרנספורמציות שעסקנו בהן לפני.
- **בעמוד 66 למעלה מופיעה פעילות דיגיטלית** שניתן להיכנס אליה בסריקה או בלחיצה. הפעילות עוסקת בטרנספורמציות על הפונקציה הלוגריתמית באופן מדורג ואינטרקטיבי. מומלץ לבצע אותה בכיתה תוך הקרנה על הלוח.

תשובות אפשריות לפעילויות על פונקציות לוגריתמיות:

1. $\ln x + 2$

2. $\ln(-x)$

3. $8 \ln x$

4. $-\ln x$

5. $\ln(x - 4)$

6. $5 \ln(-x)$

7. $-5 \ln x$

8. $0.5 \ln(x + 3)$

9. $7 \ln(-x)$

10. $-3 \ln(x - 5)$

11. $-4 \ln x + 7$

- **שאלות 4-10** משלבות בין טרנספורמציות שונות עבור כל פונקציה ומציעות תרגול אינטגרטיבי בנושא. **בשאלה 10** התלמידים מבצעים 3 טרנספורמציות על גרף של פונקציה נתונה. תרשים החיצים המופיע בכל סעיף מציג בפני התלמידים מהי הטרנספורמציה המתבצעת בכל שלב כך שיוכלו לתרגל שרטוט גרף של פונקציה בשלבים.

"הפעילות הגבוהה ביותר שבן אנוש יכול לעסוק בה היא למידה לצורך הבנה,

כי להבין פירושו להיות חופשי."

ברוך שפינוזה, פילוסוף

פרק 3 - הפונקציה הלוגריתמית - קדם אנליזה

משוואות ואי־שוויונות לוגריתמיים - עמודים 69-76

מה נלמד בתת־פרק זה?

- נלמד מהי משוואה לוגריתמית, ונפתור משוואות לוגריתמיות מסוגים שונים.
- נמצא את שיעורי נקודות חיתוך של גרפים של פונקציות לוגריתמיות עם הצירים.
- נמצא את שיעורי נקודות החיתוך בין הגרפים של פונקציות לוגריתמיות.
- נפתור אי־שוויונות לוגריתמיים באופן גרפי ובאופן אלגברי.
- נחקור פונקציות לוגריתמיות באמצעות טרנספורמציות, ונשרטט את הגרף שלהן.

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק: 3 שעות.

מהי המטרה המרכזית של תת־הפרק? פתרון משוואות לוגריתמיות באופן גרפי ופתרון אי־שוויונות לוגריתמיים באופן גרפי ובאופן אלגברי, ככלי שבעזרתו נוכל לחקור פונקציות לוגריתמיות.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת־הפרק?

- לוגריתמים
- הפונקציה הלוגריתמית
- המספר e
- פתרון גרפי של משוואה
- פתרון גרפי של אי־שוויון
- טרנספורמציות

מה חשוב לי לדעת?

- יש שפע של תרגול מסוגים שונים של משוואות ואי־שוויונות עם לוגריתמים, זאת לקראת שימוש במשוואות ובאי־שוויונות אלו בפרקים העוסקים בחקירת פונקציה לוגריתמית שבסיסה e. **היקף התרגול בפרק הוא לשיקול הדעת של צוות ההוראה** בהתאם לרמת המיומנות של הכיתה ולשיקולי זמן. יש מגוון של שאלות שאינן "משוואות יבשות" אלא יישום שלהן בהקשר של פונקציות.
- בחלק הראשון של הפרק נעסוק בפתרון משוואות באופן אלגברי.
- בחלק השני של הפרק נעסוק בפתרון אי־שוויונות באופן אלגברי וגרפי.
- **שאלות מומלצות לעבודת כיתה:** 1, 2ג', 3ב', 4ב', 5ג', 6ג', 7ב', 8ד', 9ד', 10, 11, 12ג', 13ד', 14, 15ג', 17ב'.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית:** 2א'-ב', ד'-ו', ח'-י"א, 3, 4א', ג'-ז', ט', 6א'-ב', ד'-ו', ח'-ט', 7א', ג'-ט', 8א'-ג', ה'-ח', 9א'-ג', ה'-ו', 12א'-ב', ד'-ה', 13א'-ג', 15א'-ב', ד'-ו', ח', 16, 17א', ג', 18-20.
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת־הפרק?

בחלק הראשון נעסוק בפתרון משוואות לוגריתמיות באופן אלגברי.

- **שאלה 1** היא **שאלת חקר מדורגת** שמכוונת את התלמידים לאופן שבו פותרים משוואה לוגריתמית על ידי הגדרת הלוגריתם תוך התייחסות לתחום ההגדרה של הלוגריתם ובדיקה על ידי הצבה. **שאלות 2-10** עוסקות בסוגים שונים של משוואות לוגריתמיות. כאשר מופיעות משוואות מסוג חדש, התלמידים נחשפים אליהן בשאלת חקר או בדוגמה במסגרת צהובה. **בשאלה 10** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאה נפוצה** ביישום חוק הלוגריתם של מכפלה בעת פתירת משוואה לוגריתמית.

בחלק השני נעסוק בפתרון אי־שוויונות לוגריתמיים באופן אלגברי וגרפי.

- **שאלה 11** היא **שאלת חקר מדורגת** שבה התלמידים נחשפים לסדר הפעולות שבעזרתו ניתן לפתור אי־שוויון לוגריתמי הן באופן גרפי והן באופן אלגברי. הבחירה לעסוק תחילה בפתרון גרפי של אי־שוויון מעריכי לפני פתרון אלגברי נועדה לאפשר לתלמידים **הבנה אינטואיטיבית** של משמעות אי־שוויון כתחום שבו ערכי פונקציה אחת גדולים מערכיה של השנייה, זאת לפני שילמדו כיצד לפתור אי־שוויון בכלים אלגבריים טכניים יותר. **שאלות 11-18** עוסקות בכך, **שאלה 12** מציעה לתלמידים פתרון באיזו דרך שבה יבחרו, אלגברית או גרפית.
- **שאלות 19-20** מסכמות את שלב קדם האנליזה של פונקציות לוגריתמיות. התלמידים נדרשים לחקור פונקציה לוגריתמית על בסיס הידע שלהם בטרנספורמציות ובפתרון משוואות ואי־שוויונות לוגריתמיים, ולשרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

"היקום עשוי גיאומטריה טהורה.

בבסיסו - צורות יפהפיות סובבות ומרקדות מעבר לזמן ולמרחב."

אנתוני גארט ליסי, פיזיקאי

פרק 3 - הפונקציה הלוגריתמית - קדם אנליזה

משוואות מעריכיות מהסוג $a^x = b$ שנפתרות בעזרת לוגריתמים - עמודים 77-78

מה נלמד בתת־פרק זה?

נפתור משוואות מעריכיות מהסוג $a^x = b$ בעזרת לוגריתמים.

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק: שעה.

מהי המטרה המרכזית של תת־הפרק? פתירת משוואות מעריכיות בעזרת לוגריתמים.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת־הפרק?

- משוואות מעריכיות - הגדרת הלוגריתם

מה חשוב לי לדעת?

- תת־פרק זה עוסק במשוואות מעריכיות מהסוג שלא ניתן היה לפתור לפני העיסוק בלוגריתמים, והוא מטרים לפרק הבא העוסק בשאלות גדילה ודעיכה.
- בעזרת משוואות מעריכיות אלו נוכל לפתור שאלות גדילה ודעיכה, למצוא שיעורי נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה־x ולפתור שאלות בסדרה הנדסית בהמשך השנה.
- שאלות מומלצות לעבודת כיתה: 1, 2ב', 3ג', 4ג', ז'.
- שאלות מומלצות לעבודת בית: 2א', ג'-ה', ז'-י', 3א'-ב', ד'-ה', 4א'-ב', ד'-ו', ח'.
- שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת־הפרק?

- הפרק נפתח **בשאלת חקר של המחשת הצורך** בפתרון משוואה מעריכית מהסוג $a^x = b$ שאותה לא ניתן לפתור על ידי הצגת שני האגפים כחזקות בעלות בסיס זהה. השאלה מציעה שתי דרכי פתרון בעזרת לוגריתם. שאלות 2-4 עוסקות בכך.

”זה לא שאני כה חכם, אני פשוט נשאר עם השאלות הרבה יותר זמן.”

אלברט איינשטיין, פיזיקאי ומתמטיקאי

פרק 4 - שאלות גדילה ודעיכה

מה נלמד בפרק זה?

- נעסוק בשאלות מציאותיות מתחומים שונים העוסקות בתהליכי גדילה מעריכית ודעיכה מעריכית.
- נעסוק בפונקציה המתארת תהליכי גדילה מעריכית או דעיכה מעריכית.

שעות לימוד מומלצות לפרק זה : 10 שעות.

מהי המטרה המרכזית בפרק? שימוש בתכונות הפונקציה המעריכית ובמשוואות מעריכיות כדי לפתור שאלות מציאותיות אשר עוסקות בתהליכי גדילה מעריכית ודעיכה מעריכית.

על אילו נושאים קודמים נחזור בפרק?

- הפונקציה המעריכית
- משוואות מעריכיות
- פתרון בעיות מציאותיות
- אחוזים
- גדילה מעריכית
- דעיכה מעריכית
- פתרון גרפי של משוואות מעריכיות ואישויונות מעריכיים.

מה חשוב לי לדעת?

- בפרק זה ניישם רבים מהנושאים שלמדנו עד כה בספר בהקשרים של פונקציה מעריכית ותהליכי גדילה מעריכית ודעיכה מעריכית.
- השאלות בפרק עוסקות בתחומים שונים - גיאוגרפיה, כימיה, ביולוגיה, כלכלה ואחרים. למעשה הן מאפשרות לתלמידים לחקור תופעות אמיתיות מהעולם בכלים המתמטיים שלמדו בפרקים הקודמים.
- הפרק הוא הזדמנות לקדם את האוריינות המתמטית של התלמידים - כלומר את היכולת להבין, ליישם ולנתח תופעות מהעולם שסביבנו בכלים מתמטיים.
- **שאלות מומלצות לעבודה בכיתה :** עמודים 79-96 : 1, 2, 5, 7, 8, 9, 12, 14, 17, 18, 24, 25, 28, 30, 33, 34, 37, 41, 45.
- עמודים 100-107 : 1, 2, 4, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 20, 24.
- עמודים 109-116 : 1, 2, 5, 10, 15, 19.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית :** עמודים 79-96 : 3, 4, 6, 10, 11, 13, 15, 16, 19-23, 26, 27, 29, 31, 32, 35, 36, 38-40, 42-44, 46, 47.
- עמודים 100-107 : 1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 14, 16-19, 21-23.
- עמודים 109-116 : 2, 3, 4, 6-9, 11-14, 16-18, 20, 21.

השאלות בעמודים 118-124 מיועדות לתרגול עצמאי לקראת המבחן או בחינות המתכונות והבגרות.

שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך הפרק?

בחלק הראשון נעסוק בפונקציית הגדילה המעריכית.

- הפרק נפתח **בשאלת חקר מדורגת מתחום הטבע** שבה נעסוק בתהליך גדילה מעריכית של מספר הקרנפים באפריקה. באמצעות שאלה זו התלמידים יזהו לראשונה את המבנה של הפונקציה המעריכית הבסיסית שבו נעסוק במהלך הפרק. המסגרות הצהובות **בעמודים 80-81** מציגות את פונקציית הגדילה המעריכית $f(t) = f(0) \cdot q^t$ ואת ארבעת הגורמים המופיעים בה יחד עם הדגמות. **שאלות 2-7** עוסקות בכך.

בחלק השני של הפרק נעסוק בחישוב כמויות בתהליכים מעריכיים.

- **שאלות 8-13** עוסקות בחישוב כמויות בתהליכי גדילה מעריכית. באשכול שאלות זה רמת הקושי עולה באופן מתון כאשר בשאלות הראשונות נעסוק יותר בהצבת ערכים ובהיכרות עם הנוסחה. עם התקדמות הפרק מופיע ייצוג גרפי של פונקציה אחת ובהמשך גם של שתיים ומעלה. **בשאלה 13** יש סעיף **פתוח**.
- **שאלות 14-29** עוסקות בחישוב כמויות בתהליכי דעיכה מעריכית. גם באשכול זה רמת הקושי עולה באופן מתון כאשר בשאלות הראשונות נעסוק יותר בהצבת ערכים ובהיכרות עם הנוסחה. עם התקדמות הפרק מופיע ייצוג גרפי של פונקציה אחת ובהמשך גם של שתיים ומעלה. **שאלה 14** היא **שאלת חקר מדורגת** שבעזרתה התלמידים מגיעים לתובנה שכאשר הפונקציה $f(t) = f(0) \cdot q^t$ מתארת תהליך דעיכה מעריכי, הרי שבסיס החזקה q הוא חיובי וקטן מ-1. **בשאלות 20, 24 ו-28** יש סעיפים **פתוחים**.
- **בשאלות 18, 19 ו-21** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאה נפוצה** בהקשר של תהליך מעריכי. **בשאלה 25** התלמידים נדרשים לבדוק טענה באמצעות **שתי דרכים**.
- **בשאלות 30-32** נעסוק בחישוב הכמות ההתחלתית כאשר נתונה הכמות הסופית. **בשאלה 32** נעסוק לראשונה בפרק זה **בפתרון גרפי של אישוויון**. בהמשך הפרק נעסוק באישוויונות נוספים.

בחלק השלישי של הפרק נחשב את קצב הגדילה המעריכית או קצב הדעיכה המעריכית.

- **שאלות 33-47** עוסקות בכך.
- **בשאלות 33-36** הכמויות ההתחלתית והסופית ידועות לנו, ובעזרתן נמצא את בסיס החזקה q . **בשאלה 36** נעסוק **בפתרון גרפי של אישוויון**.
- **בשאלות 37-47** הכמויות ההתחלתית והסופית אינן ידועות לנו, אך היחס ביניהן ידוע. בעזרתו ובעזרת משתני עזר נמצא את בסיס החזקה q . **בשאלות 40-42** נעסוק במקרים בהם יחידת הזמן היא שונה (בכל מספר חודשים או שנים ולא בכל שנה, חודש וכו').
- **בשאלה 42** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאה נפוצה** בנושא.

בחלק הרביעי של הפרק נחשב את הזמן במסגרת תהליך מעריכי.

- **המסגרת הצהובה בעמוד 100** מזכירה כיצד לפתור משוואה מעריכית מהסוג $a^x = b$ שבה לא ניתן להציג את שני האגפים כחזקות, ויש להיעזר בלוגריתמים. פתרון משוואה מסוג זה נדרש כדי למצוא את הזמן t במסגרת תהליך מעריכי. **שאלות 1-12** עוסקות בכך. **בשאלה 1** מופיעות משוואות מהסוג שתואר קודם כאשר בסיס החזקה מתאים לערכים מהמציאות שנפגוש בפרק זה (לדוגמה: $q = 1.06$, $q = 0.96$). **בשאלות 5, 10 ו-11** נעסוק בפתרון של **אישוויון**.
- **בעמוד 104** התלמידים פוגשים את המונח **זמן מחצית החיים**. **שאלות 13-24** עוסקות בכך. **בשאלות 13 ו-14** נעסוק בזמן מחצית החיים ללא שימוש בפונקציה $f(t) = f(0) \cdot q^t$. **בשאלות 15-17** זמן מחצית החיים נתון, והתלמידים נדרשים לחשב את קצב הדעיכה המעריכית הקבוע. **בשאלות 18 ו-19** נתון קצב הדעיכה המעריכית, והתלמידים נדרשים לחשב את זמן מחצית החיים. **שאלות 21-24** מספקות תרגול אינטגרטיבי של זמן מחצית החיים יחד עם החומר שנלמד עד כה. **בשאלה 21** נעסוק בפתרון של **אישוויון**. **בשאלה 23** מופיע סעיף שבו התלמידים נדרשים לכתוב שתי שאלות לפי פונקציית הדעיכה שהוצגה להם בשאלה.

בחלק החמישי נעסוק בשאלות גדילה ודעיכה מסוגים שונים.

- **שאלה 1 בעמוד 109** היא **שאלת חקר מדורגת** שבה התלמידים נדרשים לראשונה לפתור משוואה שמשווה בין שתי פונקציות גדילה בעלות q שונה. השאלה מציגה בפניהם את דרך הפתרון האלגברית, ובעזרת דרך זו הם יוכלו לפתור את **שאלות 2-9**. **בשאלה 9** מופיע סעיף שבו התלמידים נדרשים לכתוב שתי שאלות לפי פונקציית הגדילה שהוצגה להם בשאלה. **שאלה 10** היא **שאלת חקר מדורגת** שבה לראשונה נחבר כמויות משני תהליכי גדילה מעריכית מקבילים, ונפתור משוואה מתאימה. השאלה מציגה בפניהם את דרך הפתרון האלגברית. בעזרת דרך זו הם יוכלו לפתור את **שאלות 11-12**, שבהן יתבצע חיבור או חיסור כמויות משני תהליכים מקבילים.
- **בשאלות 13-18** נעסוק במצבים שבהם חל שינוי בתהליך המעריכי כך שקצב השינוי או כיוונו השתנו. **שאלות 19-21** עוסקות גם הן במצבים מסוג זה, אך בהקשר של מדד המחירים לצרכן. זאת כדי להמחיש לתלמידים את הרלוונטיות של החומר הנלמד בהקשר של מונח כלכלי מרכזי שמוזכר רבות בתקשורת.
- **שאלות 1-17 החל מעמוד 118** הן שאלות חזרה מסוגים שונים, ומרביתן בסגנון בחינות הבגרות האחרונות. **שאלות 11 ו-12** עוסקות במתיחה אנכית ובכיווץ אנכי של פונקציית גדילה מעריכית.

"כשאתה רוצה ללמד ילדים לחשוב, אתה מתחיל עם להתייחס אליהם ברצינות כשהם קטנים, לתת להם אחריות, לדבר איתם בכנות, לספק להם פרטיות ואפשרות לשהות בגפם, ולהפוך אותם לקוראים וכותבים של מחשבות משמעותיות מההתחלה."

ברטראנד ראסל, פילוסוף ומתמטיקאי בריטי

פרק 5 - הפונקציה המעריכית - אנליזה

נושאים נוספים בקדם אנליזה של פונקציות מעריכיות ללא מנה - עמודים 127-129

מה נלמד בתת־פרק זה?

- נעסוק בהצבת ערכי $\ln$ בפונקציות מעריכיות עם בסיס e .
- נעסוק בשוויונות ואי־שוויונות עם e .
- נעסוק בפונקציות זוגיות ואי־זוגיות.

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק: שעה.

מהי המטרה המרכזית של תת־הפרק?

השלמת נושאים בתחום קדם־האנליזה בפונקציה מעריכית שבסיסה e לקראת שלב האנליזה.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת־הפרק?

- הפונקציה המעריכית
- משוואות ואי־שוויונות מעריכיים.
- זוגיות ואי־זוגיות

מה חשוב לי לדעת?

- נחזור לנושאים שעסקנו בהם בעבר במסגרת קדם אנליזה של פונקציות מנה ושורש ריבועי, וכעת נעסוק בהן בהקשר של פונקציה מעריכית.
- כדי להקל על הלימוד של הפונקציה המעריכית, בחרנו לחלק אותה לתת־פרקים העוסקים בפונקציות מעריכיות ללא מנה בלבד, ולאחר מכן תת־פרקים העוסקים בפונקציות מעריכיות עם מנה בלבד.
- עד עתה עסקנו בפונקציות מעריכיות מהצורה $f(x) = a^x$ עבור a חיובי ושונה מ־1 ובפונקציות המתקבלות מטרנספורמציות שלהן. החל מפרק זה והלאה נעסוק אך ורק בפונקציות מעריכיות שבהן בסיס החזקה הוא e , ונרחיב את ההתעסקות בהן לפונקציות מורכבות יותר, כמו פונקציות מהסוגים $e^{f(x)}$ ו־ $e^x \cdot f(x)$ כאשר $f(x)$ הוא פולינום.
- שאלות מומלצות לעבודה בכיתה: 1, 2, 4, ג', ז', י"א, 5, 6.
- שאלות מומלצות לעבודת בית: 3, 4, א'-ב', ד'-ו', ח'-י, י"ב, 5, א'-ה', 7.
- שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת־הפרק?

- תחילה נעסוק בהצבת ערכי $\ln$ בחזקות שבסיסן e . נושא זה מוכר כמוקד קושי בקרב תלמידים, ולכן בחרנו להתמקד בו לקראת שלב האנליזה של פונקציות מעריכיות.
- **שאלה 1** היא **שאלת חקר מדורגת** שבה התלמידים נחשפים לכך ש- $e^{\ln a} = a$ (חיובי). **שאלות 2-3** עוסקות בכך.
- **בשאלות 4-5** נעסוק במשוואות ואי־שוויונות עם e כהכנה לשימוש במשוואות כאלו מיד כשנתחיל בחקירת פונקציות מעריכיות.
- **המסגרת הצהובה התחתונה בעמוד 128** מזכירה את הנושא זוגיות ואי־זוגיות של פונקציה שהתלמידים כבר עסקו בו בעבר כחזרה לקראת העיסוק בו בפונקציות מעריכיות. **שאלות 6-7** עוסקות בכך.

"תגיד לי ואני אשכח, תלמד אותי ואני אזכור. תערב אותי ואלמד."

בנג'מין פרנקלין, מדען, מדינאי וממציא

פרק 5 - הפונקציה המעריכית - אנליזה

אנליזה של פונקציות מעריכיות ללא מנה - 130-140

מה נלמד בתת־פרק זה?

- נגזור פונקציות מעריכיות שבהן בסיס החזקה הוא e.
- נמצא משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה.
- נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.
- נעסוק בנקודות קיצון מוחלט.

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק: שעותיים.

מהי המטרה המרכזית של תת־הפרק? היכרות עם הנגזרת של פונקציה מעריכית שבסיסה e ושימוש בה למציאת משוואת משיק, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת־הפרק?

- הפונקציה המעריכית
- נגזרת
- משוואת משיק
- נקודות קיצון
- תחומי עלייה וירידה
- קיצון מוחלט
- קיצון בקצה תחום

מה חשוב לי לדעת?

- זהו תת־הפרק הראשון העוסק באנליזה של פונקציה מעריכית שבסיסה e.
- העיסוק בגזירה של פונקציות מעריכיות מסוגים שונים משולב עם מציאת משוואת המשיק. באופן אינטגרטיבי זה, התרגול בנושא גזירה אינו רק טכני ומנותק מהקשר, כי אם משתייך לצורך מרכזי של גזירת הפונקציה - מציאת משוואת משיק.
- לאחר שנלמד את סוגי הנגזרות השונים, ניעזר בנגזרת למציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה.
- בחלק זה לא נעסוק באנליזה של פונקציות מנה עם רכיבים מעריכיים. נלמד לבצע גזירה כזו בהמשך כשנעסוק בגזירת פונקציות מעריכיות עם מנה.
- **שאלות מומלצות לעבודה בכיתה:** 1, 3, 5ד', ז', ח', 7, 9, 11ג', 12, 13, 15ג', 17, 18ג', 19ד', ו', י"ב, 20ב', י"א, 21, 24, 25, 27ד'.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית:** 2, 4, 5א'-ג', ה'-ו', 6, 8, 10, 11א'-ב', ד', 14, 15א'-ב', ד', 16, 18א'-ב', ד', 19א'-ג', ה', ז'-י"א, 20א'-ג', י', י"ב, 22, 23, 26, 27א'-ג', 28-30.
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת-הפרק?

- **המסגרת הצהובה העליונה בעמוד 130** מציגה את הנגזרת של הפונקציה המעריכית $f(x) = e^x$ ומזכירה את חוקי הגזירה שהתלמידים מכירים מהשנים הקודמות. **שאלה 1** עוסקת בתרגול בסיסי של גזירת פונקציה מעריכית.
- **המסגרת הצהובה התחתונה בעמוד 130** מדגימה מציאת משוואת משיק בפונקציה מעריכית בעזרת חוק הגזירה החדש שלמדנו. **שאלות 2-4** מספקות תרגול של חוק הגזירה בשילוב עם מציאת משוואת המשיק. החל מחלק זה והלאה נתרגל את חוקי הגזירה החדשים שנלמד בעזרת משוואת המשיק. **בשאלה 4** התלמידים נדרשים למצוא **שתי דרכים** לפתרון.
- **בעמודים 131-133** נדגים ונתרגל באמצעות משוואת המשיק נגזרות של פונקציה מהסוג $y = e^{f(x)}$, של מכפלת פונקציות, ושל פונקציה מורכבת. **שאלות 5-18** עוסקות בנגזרות מסוגים אלו. **בשאלה 12** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאות נפוצות**.
- שאלה 17** עוסקת בקשר בין שיפוע הישר לזווית שהוא יוצר עם הצד החיובי של ציר ה־x. זו השאלה היחידה בפרק שעוסקת בנושא.
- בשאלה 18** נעסוק בנגזרות שלמדנו יחד עם פרמטרים.
- **המסגרת הצהובה העליונה בעמוד 134** מציגה דרך פתרון למשוואות מהסוג שנדרש לפתור כשנמצא נקודות קיצון. **שאלה 19** עוסקת במשוואות אלו. **המסגרות הצהובות בעמודים 134-135** מציגות תזכורת בנושא נקודות קיצון מקומיות ותחומי עלייה וירידה של פונקציה. **שאלות 20-24** עוסקות בכך. **בשאלה 21** התלמידים נחשפים בעזרת זיהוי **שגיאה נפוצה** לכך שנקודה אינה בהכרח נקודת קיצון כששיעור ה־x שלה מאפס את הנגזרת.
- **בשאלות 25-30** נעסוק בנקודות קיצון בקצה תחום סגור ובנקודות קיצון מוחלט.

פרק 5 - הפונקציה המעריכית - אנליזה

חקירה מלאה של פונקציה מעריכית ללא מנה - עמודים 141-154

מה נלמד בתת־פרק זה?

- נבצע חקירה מלאה של פונקציות מעריכיות ללא מנה.
- נפתור שאלות העוסקות בקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף פונקציית הנגזרת.

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק : 3 שעות.

מהי המטרה המרכזית של תת־הפרק? חקירה מלאה של פונקציות מעריכיות שונות שבסיסן e ללא מנה.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת־הפרק?

- הפונקציה המעריכית - נגזרת
- משוואת משיק
- נקודות קיצון
- תחומי עלייה וירידה
- טרנספורמציות
- הקשר בין גרף הפונקציה לגרף פונקציית הנגזרת

מה חשוב לי לדעת?

- בפרק זה נחקור פונקציות מעריכיות ללא מנה לפי רמת קושי עולה החל מרמת הבסיס ועד לרמה הנדרשת בבחינת הבגרות.
- שאלות מומלצות לעבודה בכיתה: 1 (מומלץ להציג בכיתה את הפעילות הדיגיטלית המופיעה לצד השאלה בעמוד 142), 6, 8, 10, 15, 18, 23, 26, 28.
- שאלות מומלצות לעבודת בית: 2-5, 7, 9, 11-14, 16, 17, 19-22, 24, 25, 27, 29.
- שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת־הפרק?

- בתחילת הפרק נעסוק בחקירת פונקציה מעריכית כאשר גרף הפונקציה נתון. כך התלמידים יוכלו להבין באופן ויזואלי תוך כדי התרגול כיצד התחומים ושיעורי הנקודות שהם מצאו משתלבים יחד. **שאלות 1-2** עוסקות בכך.
- **החל מעמוד 143** נבצע חקירת פונקציה מעריכית כאשר גרף הפונקציה אינו נתון. בשאלות אלו הוספנו באופן הדרגתי סעיפי חשיבה מסוגים שונים: טרנספורמציות, סעיפים פתוחים, טענות נכונות או שגויות, השוואה, קיצון מוחלט ואחרים.
- **שאלות 3-12** עוסקות בחקירת פונקציה מעריכית ללא פרמטר, **ושאלות 13-16** עוסקות בחקירת פונקציה מעריכית **עם פרמטר**.
- **המסגרת הצהובה בעמוד 148** מזכירה את הקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף פונקציית הנגזרת שהתלמידים עסקו בו בשנים הקודמות. **שאלות 17-29** עוסקות בכך באופן מדורג.

"אם אתם חושבים שהחינוך יקר, נסו בורות."

- דרק בוק, נשיא הרווארד לשעבר

פרק 5 - הפונקציה המעריכית - אנליזה

נושאים נוספים בקדם אנליזה של פונקציות מעריכיות עם מנה - עמודים 155-159

מה נלמד בתת־פרק זה?

- נעסוק בתחום ההגדרה של פונקציות מעריכיות עם מנה.
- נעסוק באסימפטוטה אנכית.

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק : שעה.

מהי המטרה המרכזית של תת־הפרק? השלמת נושאים בתחום קדם־האנליזה בפונקציית מנה עם רכיבים מעריכיים שבסיסם e לקראת שלב האנליזה.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת־הפרק?

- הפונקציה המעריכית
- תחום הגדרה.
- אסימפטוטות מקבילות לצירים.

מה חשוב לי לדעת?

- עד עתה עסקנו בפונקציות מעריכיות ללא מנה, כעת נרחיב את העיסוק לפונקציות עם מנה. בתוך כך נשלים בתת־פרק זה מידע חיוני על תחום ההגדרה שלהן ועל אסימפטוטות אנכיות, לקראת חקירה מלאה.
- שאלות מומלצות לעבודה בכיתה: 1, 2ד', ו', י"ב, 5, 6ד', ח', 7, 8, 10ג', 12.
- שאלות מומלצות לעבודת בית: 2א'-ג', ה', ז'-י"א, 3, 4, 6א'-ג', ה'-ז', 9, 10א'-ב', ד', 11.

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת־הפרק?

- **שאלה 1** פותחת את נושא תחום ההגדרה של פונקציה מעריכית עם מנה, באמצעות התנסות אינטואיטיבית שמבוססת על ידע קודם של התלמידים. המטרה היא להראות לתלמידים שהנושא דומה מאוד למה שהכירו בפונקציית המנה בשנה שעברה. **שאלות 2-4** עוסקות בכך. **שאלה 4** היא **שאלה פתוחה**.
- **שאלה 5** היא **שאלת חקר מדורגת** שמובילה את התלמידים למציאת האסימפטוטה האנכית בפונקציית מנה שיש בה הגורם e^x . **המסגרות הצהובות בעמודים 156 ו־157** מזכירות מהי אסימפטוטה אנכית ומדגימות את הנושא לקראת התרגול. **שאלות 6-12** עוסקות בכך. **שאלה 7** היא **שאלה פתוחה**.
- **שאלה 8** היא **שאלת חקר** שבה התלמידים עוסקים בהשפעת טרנספורמציות על האסימפטוטה האנכית.
- **שאלות 11-12** מסכמות את הנושא ועוסקות בהתאמת פונקציה מעריכית לגרף שלה בעזרת תכונותיה כהכנה לקראת אנליזה של פונקציות מעריכיות.

פרק 5 - הפונקציה המעריכית - אנליזה

אנליזה של פונקציות מעריכיות עם מנה - 160-163

מה נלמד בתת־פרק זה?

- נגזור פונקציות מעריכיות עם מנה שבהן בסיס החזקה הוא e.
- נמצא משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה.
- נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק: שעה.

מהי המטרה המרכזית בתת־הפרק? היכרות עם הנגזרת של פונקציה מעריכית עם מנה ושימוש בה למציאת משוואת משיק, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה.

על אילו נושאים קודמים נחזור בפרק?

- נגזרת של פונקציה מעריכית
- נקודות קיצון
- קיצון בקצה תחום
- נגזרת של פונקציית מנה
- תחומי עלייה וירידה
- תחום הגדרה
- משוואת משיק
- קיצון מוחלט

מה חשוב לי לדעת?

- בתת־פרק זה נלמד לגזור פונקציות מנה שיש בהן רכיבים מעריכיים שבסיסם e. התרגול של הגזירה משולב עם מציאת משוואת המשיק. לאחר שנלמד לגזור את פונקציית המנה, ניעזר בנגזרת למציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית:** 1ב', ד', ח', 2, 3, 4ב', 5ב', 7ב', 8ג', ז', 9.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית:** 1א', ג', ה'-ז', 4א', ג', 5א', 6, 7א', 8א'-ב', ד'-ו', ח', 10, 11.
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת־הפרק?

- **המסגרת הצהובה העליונה בעמוד 160** מציגה את הנגזרת של פונקציית מנה ומדגימה גזירה של פונקציה מעריכית עם מנה. **שאלות 1-7** עוסקות בתרגול בסיסי של גזירה זו. **בשאלה 2** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאות נפוצות**.
- שאלה 3** היא **שאלת חקר מדורגת** שחושפת את התלמידים לאופציה של גזירת פונקציה מעריכית עם מנה באמצעות שימוש בחוקי הגזירה של מכפלה.
- שאלות 4-7** מציעות תרגול של כללי הגזירה תוך מציאת משוואת המשיק.
- **המסגרת הצהובה בעמוד 162** מדגימה מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה בפונקציה מעריכית עם מנה, **ושאלות 8-11** עוסקות בכך. **שאלה 11** עוסקת בנקודות קיצון בקצה התחום ובנקודות קיצון מוחלט.

פרק 5 - הפונקציה המעריכית - אנליזה

חקירה מלאה של פונקציה מעריכית עם מנה - עמודים 164-174

מה נלמד בתת־פרק זה?

- נבצע חקירה מלאה של פונקציות מעריכיות עם מנה.
- נפתור שאלות העוסקות בקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף פונקציית הנגזרת.

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק: 3 שעות.

מהי המטרה המרכזית בתת־הפרק? חקירה מלאה של פונקציות מעריכיות שונות שבסיסן e עם מנה.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת־הפרק?

- הפונקציה המעריכית - נגזרת
- נקודות קיצון - תחומי עלייה וירידה
- הקשר בין גרף הפונקציה לגרף פונקציית הנגזרת - אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- משוואת משיק
- טרנספורמציות

מה חשוב לי לדעת?

- נחקור פונקציות מעריכיות עם מנה לפי רמת קושי עולה החל מרמת הבסיס ועד לרמה הנדרשת בבחינת הבגרות.
- קיימות פעילויות דיגיטליות שעוסקות בפונקציות שזה עתה נחקרו. לחוויה המלאה יש קודם לחקור את הפונקציה המדוברת במלואה, ורק לאחר מכן להיכנס לפעילות הדיגיטלית.
- בחלק זה יש מגוון רחב של שאלות. **אין ציפייה** לענות על כולן. זהו פרק מסכם של החומר שלמדנו עד כה בפונקציה המעריכית, ולכן חלק מהשאלות נועדו לחזרה לקראת מבחנים או לקראת הבגרות.
- **שאלות מומלצות לעבודת כיתה:** 1, 4, 7, 9, 10, 11, 13 (מומלץ להציג את הפעילות הדיגיטלית המצורפת לשאלה בתרגיל 13).
- **שאלות מומלצות לעבודת בית:** 2, 3, 5, 6, 8, 12, 14-16.
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת־הפרק?

- בתחילת הפרק נעסוק בחקירת פונקציה מעריכית עם מנה כאשר גרף הפונקציה נתון. כך התלמידים יוכלו להבין באופן ויזואלי תוך כדי התרגול כיצד התחומים ושיעורי הנקודות שהם מצאו משתלבים יחד. **שאלות 1-2** עוסקות בכך.
- **החל מעמוד 165** נבצע חקירת פונקציה מעריכית כאשר גרף הפונקציה אינו נתון. בשאלות אלו הוספנו באופן הדרגתי סעיפי חשיבה מסוגים שונים: טרנספורמציות, סעיפים פתוחים, טענות נכונות או שגויות, השוואה, קיצון מוחלט ואחרים.
- **שאלות 3-7** עוסקות בחקירת פונקציה מעריכית ללא פרמטר, **ושאלות 8-11** עוסקות בחקירת פונקציה מעריכית **עם פרמטר**. **שאלות 12-15** עוסקות בקשר שבין גרף הפונקציה לגרף פונקציית הנגזרת באופן מדורג.
- בסיום הפרק מופיעה **שאלה 16** שהיא שאלה מסכמת שמציעה שפע סעיפי חשיבה לסיכום הנושא, וביניהם סעיפי טענות נכונות ושגויות, טרנספורמציות, פרמטרים והקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף פונקציית הנגזרת.

"מתמטיקה אינה עוסקת במספרים, משוואות, חישובים או אלגוריתמים - היא עוסקת בהבנה."

- ויליאם פול ת'רסטון, מתמטיקאי

פרק 6 - פונקציה מעריכית - אינטגרל

מה נלמד בפרק זה?

- נעסוק באינטגרל לא מסוים ובאינטגרל מסוים.
- נמצא פונקציה קדומה בעזרת אינטגרל.
- נחשב שטחים בעזרת אינטגרל.

שעות לימוד מומלצות לפרק זה : 5 שעות.

מהי המטרה המרכזית בפרק? שימוש באינטגרל של פונקציה מעריכית למציאת פונקציה קדומה ולחישוב שטח.

על אילו נושאים קודמים נחזור בפרק?

- הנגזרת של הפונקציה המעריכית שבסיסה e
- אינטגרל
- פונקציה קדומה

מה חשוב לי לדעת?

- בפרק זה נעסוק בכל הנוגע לחישוב אינטגרלים בפונקציה מעריכית שבסיסה e.
- תחילה נעסוק באינטגרל לא מסוים ובאינטגרל מסוים, ולאחר מכן נעבור למציאת הפונקציה הקדומה ולחישוב שטחים שונים בעזרת אינטגרל.
- למעשה, פרק זה מסכם את נושא הפונקציה המעריכית, ולכן הוספנו בחלק ניכר מהשאלות סעיפים אינטגרטיביים בנושא טרנספורמציות, הקשר בין גרף הפונקציה לגרף פונקציית הנגזרת, קיצון מוחלט, פרמטרים, שאלות פתוחות, שגיאות נפוצות וטענות נכונות ושגויות.
- בסוף הפרק מופיעות מגוון שאלות מסכמות. **אין ציפייה** לפתור את כל השאלות האלו, מרבית השאלות מיועדות לחזרה לקראת מבחנים ולקראת הבגרות.

- **שאלות מומלצות לעבודה בכיתה:** החל מעמוד 175 : 1, 2, 3-ג'ד', 4, 5-ד', ז', י"א, 6.

החל מעמוד 178 : 1, 2, 5, 8, 9 ב', ד', ח', 10.

החל מעמוד 182 : 1, 3, 5, 7, 9, 12, 13, 15, 19, 21, 23.

החל מעמוד 193 : 1, 3, 6, 7, 9, 15, 19, 21.

שאלות מומלצות לעבודת בית: החל מעמוד 175 : 3א-ב', 5א-ג', ה'-ו', ח'-י'.

החל מעמוד 178 : 3, 4, 6, 7, 9א', ג', ה'-ז'.

החל מעמוד 182 : 2, 4, 6, 8, 10, 11, 14, 16-18, 20, 22, 24, 25.

החל מעמוד 193 : 2, 4, 5, 7א', ג', 8, 10-14, 16-18, 20, 22-26.

- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך הפרק?

- הפרק נפתח בתזכורת לגבי המונחים 'אינטגרציה' ו'פונקציה קדומה' שהתלמידים מכירים מהשנה שעברה, אך כעת נעסוק בהן בהקשר של פונקציה מעריכית. **שאלה 1** היא **שאלת חקר** בנושא. **שאלה 2** עוסקת בכך.
- **המסגרת הצהובה התחתונה בעמוד 175** מזכירה לתלמידים את המונחים 'אינטגרל לא מסוים' ו'קבוע האינטגרציה', שהם מכירים מהשנה שעברה, אך כעת נעסוק בהם בהקשר של פונקציה מעריכית.
- **המסגרת הצהובה העליונה בעמוד 176** מציגה את האינטגרל הלא מסוים $\int e^x dx$. **שאלה 3** עוסקת בכך.
- **שאלה 4** היא **שאלת חקר מדורגת** אשר מכוונת את התלמידים להגיע בעצמם למציאת האינטגרל הלא מסוים $\int e^{mx+b} dx$. **שאלות 5 ו-6** עוסקות בכך. **בשאלה 6** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאות נפוצות**.
- **בעמודים 178-181** נעסוק במציאת הפונקציה הקדומה. **שאלה 1** היא **שאלת חקר מדורגת** המזכירה לתלמידים את המשמעות ואת החשיבות של קבוע האינטגרציה. **שאלות 2-8** עוסקות במציאת פונקציה קדומה בעזרת סוגים שונים של נתונים. בנוסף לכך נעסוק באופן אינטגרטיבי גם במשיקים, בנקודות קיצון ובפרמטרים. **בשאלה 4** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאות נפוצות**.
- **שאלות 9-10** עוסקות באינטגרל המסוים של פונקציות מעריכיות שונות. **בשאלה 10** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאה נפוצה**.
- **בעמודים 182-191** נחשב סוגים שונים של שטחים בעזרת אינטגרל של פונקציה מעריכית. חלק זה בנוי באופן מדורג כך שכאשר אנו עוסקים בסוג מסוים של שטח תופיע תחילה מסגרת צהובה, ובה תזכורת ודוגמה, ואחריה יופיעו שאלות שבהן נחשב שטחים מסוג זה. **בשאלות 12, 19 ו-23** התלמידים נדרשים להציע **שתי דרכים** לפתרון כל שאלה.
- **שאלה 13** היא **שאלת חקר מדורגת חשובה** שבה התלמידים עוסקים בהשפעת טרנספורמציות על שטח. שאלות מסוג זה מופיעות גם במקומות נוספים בפרק.
- **המסגרת הצהובה בעמוד 192** מזכירה לתלמידים כיצד לחשב שטח שמוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת בעזרת אינטגרל. התלמידים עסקו בשאלות מסוג זה גם בשנה שעברה, וכעת יעסקו בהן בהקשר של פונקציה מעריכית. **שאלות 1-6** עוסקות בכך.
- **בעמוד 195** מופיעות שאלות שונות בנושא אינטגרל שבהן התלמידים מתבקשים למצוא פרמטר.
- **בשאלות 8-11** התלמידים גם נדרשים להסביר את ההשפעה של טרנספורמציות על גודל שטח מוגבל.
- **החל משאלה 12** ועד סוף הפרק נעסוק בשאלות המשלבות אינטגרל עם חקירה מלאה של פונקציה מעריכית בסגנון השאלות בבחינת הבגרות. בתוך כך נעסוק באופן אינטגרטיבי גם בסעיפים העוסקים בטרנספורמציות, בקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף פונקציית הנגזרת, בנק' קיצון מוחלט ובפרמטרים.

"הצלחה היא לעבור מכישלון לכישלון מבלי לאבד התלהבות."

וינסטון צ'רצ'יל, ראש ממשלת בריטניה לשעבר

פרק 7 - פונקציה לוגריתמית - אנליזה

נושאים נוספים בקדם אנליזה של פונקציות לוגריתמיות - עמודים 204-208

מה נלמד בתת־פרק זה?

- נעסוק בתחום ההגדרה של פונקציות לוגריתמיות.
- נעסוק בפונקציות זוגיות ואי־זוגיות.
- נעסוק באסימפטוטות מקבילות לצירים.

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק: שעה.

מהי המטרה המרכזית של תת־הפרק?

השלמת נושאים בתחום קדם־האנליזה בפונקציה לוגריתמית שבסיסה e לקראת שלב האנליזה.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת־הפרק?

- הפונקציה הלוגריתמית
- תחום הגדרה
- זוגיות ואי־זוגיות
- אסימפטוטות מקבילות לצירים

מה חשוב לי לדעת?

- נחזור לנושאים שעסקנו בהם בעבר במסגרת קדם אנליזה של פונקציות מעריכיות, וכעת נעסוק בהן בהקשר של פונקציה לוגריתמית.
- עד עתה עסקנו בפונקציות לוגריתמיות מהצורה $f(x) = \log_a x$ עבור a חיובי ושונה מ־1 ובפונקציות המתקבלות מטרנספורמציות שלהן. החל מפרק זה והלאה נעסוק אך ורק בפונקציות לוגריתמיות שבהן בסיס הלוגריתם הוא e , ונרחיב את העיסוק לפונקציות מורכבות יותר, כמו פונקציות מהסוגים $\ln f(x)$ ו־ $f(x) \cdot \ln x$ כאשר $f(x)$ הוא פולינום.
- **שאלות מומלצות לעבודה בכיתה:** 1, 2ג', ו', י"א, 3, 4, 6ג', 8, 9ב', ו', ח', 10, 12ג'.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית:** 2א'-ב', ד'-ה', ז'-י, י"ב-ט"ז, 5, 6א'-ב', ד', 7, 9א'-ג', ה', ז', ט', 11, 12א'-ב', ד'.
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת־הפרק?

- הנושא הראשון הוא תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית. **שאלה 1** פותחת את נושא תחום ההגדרה באמצעות התנסות אינטואיטיבית שמבוססת על ידע קודם של התלמידים. **המסגרת הצהובה בעמוד 204 למטה** מסבירה באופן פורמאלי כיצד נמצא תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית, **ושאלות 2-5** עוסקות בכך. **בשאלה 3** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאה נפוצה**.
- שאלה 4** היא **שאלת חקר מדורגת** שמציגה בפני התלמידים סוגיה שבה שני ביטויים אלגבריים שנראים שווים מייצגים פונקציות שונות.
- **המסגרת הצהובה בעמוד 206** מזכירה את הנושא זוגיות ואיזוגיות של פונקציה באמצעות דוגמה. התלמידים עסקו בנושא בעבר בפונקציות מעריכיות, וכעת נעסוק בו בפונקציות לוגריתמיות. **שאלות 6-8** עוסקות בכך. **בשאלה 8** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאה נפוצה**.
- **המסגרת הצהובה בעמוד 207** מסבירה כיצד נמצא אסימפטוטה אנכית בפונקציה לוגריתמית, ובתוך כך מדגימה פתרון של אישוויון ריבועי מהסוג שניעזר בו בפרק זה ובשלב האנליזה של הפונקציה הלוגריתמית. **שאלות 9-12** עוסקות בכך. **בשאלה 10** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאה נפוצה**.
- שאלה 11** היא **שאלת חקר** שבה התלמידים עוסקים בהשפעת טרנספורמציות על האסימפטוטה האנכית.

”מורה משפיע לנַפֵּחַ; הוא אף פעם לא יכול לדעת היכן נגמרת השפעתו.”

פרופסור הנרי אדמס, היסטוריון

פרק 7 - פונקציה לוגריתמית - אנליזה

אנליזה של פונקציות לוגריתמיות - 209-220

מה נלמד בתת-פרק זה?

- נגזור פונקציות לוגריתמיות שבהן בסיס הלוגריתם הוא e.
- נמצא משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה.
- נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.
- נעסוק בנקודות קיצון מוחלט.

שעות לימוד מומלצות לתת-הפרק: שיעורים.

מהי המטרה המרכזית של תת-הפרק? היכרות עם הנגזרת של פונקציה לוגריתמית שבסיסה e ושימוש בה למציאת משוואת משיק, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה.

על אילו נושאים קודמים נחזור בתת-הפרק?

- הפונקציה הלוגריתמית
- נגזרת
- משוואת משיק
- נקודות קיצון
- תחומי עלייה וירידה
- קיצון מוחלט
- קיצון בקצה תחום

מה חשוב לי לדעת?

- זהו הפרק הראשון העוסק באנליזה של פונקציה לוגריתמית.
- התרגול של גזירת פונקציות לוגריתמיות מסוגים שונים משולב עם מציאת משוואת המשיק. באופן אינטגרטיבי זה, התרגול בנושא גזירה אינו רק טכני ומנותק מהקשר, כי אם משתייך לצורך מרכזי של גזירת הפונקציה - מציאת משוואת משיק.
- לאחר שנעסוק בגזירה של פונקציות לוגריתמיות מסוגים שונים, נשתמש בנגזרת למציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה.
- **שאלות מומלצות לעבודת כיתה:** 1ב', ד', 2, 5ג', ו', ח', 7, 8, 9ב', ו', 10, 13ב', ג', ו', 14, 15ב', 16א', ד', 17, 18, 19ג', 20ג', ז', ט', 21ב', ו', 22, 24, 26ב', ד', 28, 31ב'.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית:** 1א', ג', 3, 4, 5א'-ב', ד'-ה', ז', 6, 9א', ג'-ה', 11, 12, 13א', ד'-ה', ז'-ח', 15א', ג'-ד', 16ב'-ג', 19א'-ב', ד', 20א'-ב', ד'-ו', ח', י-י"א, 21א', ג'-ה', ז'-ט', 23, 25, 26א', ג', 27, 29, 30, 31א', ג'-ד', 32, 33.
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת-הפרק?

- **המסגרת הצהובה העליונה בעמוד 209** מציגה את הנגזרת של הפונקציה המעריכית $f(x) = \ln x$, ומזכירה את חוקי הגזירה שהתלמידים מכירים מהשנים הקודמות. **שאלה 1** עוסקת בכך. **המסגרת הצהובה שמופיעה לאחר מכן** מדגימה כיצד למצוא את משוואת המשיק לפונקציה. מחלק זה והלאה התרגול של הסוגים השונים של הגזירות ישולב במציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה. **שאלות 2-4** עוסקות בכך.
- **המסגרת הצהובה בעמוד 210** מציגה את הנגזרת של הפונקציה הלוגריתמית $y = \ln f(x)$ ומדגימה גזירה של פונקציות מסוג זה. **שאלות 5-8** עוסקות בכך. **בשאלה 7** התלמידים נדרשים להציע **שתי דרכים** לפתרון השאלה.
- **בעמודים 211-213** נדגים ונתרגל נגזרות של מכפלת פונקציות, של מנת פונקציות ושל פונקציה מורכבת. **שאלות 9-19** עוסקות בנגזרות מסוגים אלו תוך מציאת משוואת המשיק. **בשאלות 10 ו-17** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאות נפוצות**.
- **המסגרת הצהובה בעמוד 213** מדגימה פתרון משוואות שנידרש לפתור כשנמצא את נקודות הקיצון. **שאלה 20** עוסקת בכך.
- **המסגרת הצהובה התחתונה בעמוד 214** מדגימה מציאת נקודות קיצון מקומיות ותחומי עלייה וירידה של פונקציה לוגריתמית **ללא מנה**. **שאלות 21-25** עוסקות בכך. **בשאלה 22** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאה נפוצה**. **בשאלה 24** התלמידים נדרשים להציע **שתי דרכים** לפתור את השאלה.
- **המסגרת הצהובה בעמוד 216** מדגימה מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה בפונקציה לוגריתמית **שיש בה מנה**. **שאלות 26-28** עוסקות בכך.
- **שאלות 29-33** עוסקות בנקודות קיצון בקצה תחום סגור ובנקודות קיצון מוחלט.

"מתמטיקה טהורה היא, בדרכה, שירה של רעיונות לוגיים."

אלברט איינשטיין, פיזיקאי ומתמטיקאי

פרק 7 - פונקציה לוגריתמית - אנליזה

חקירה מלאה של פונקציה לוגריתמית - עמודים 221-239

מה נלמד בתת־פרק זה?

- נבצע חקירה מלאה של פונקציה לוגריתמית.
- נפתור שאלות העוסקות בקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף פונקציית הנגזרת.

שעות לימוד מומלצות לתת־הפרק: 3 שעות.

מהי המטרה המרכזית של תת־הפרק? חקירה מלאה של פונקציות לוגריתמיות שונות שבסיסן e.

על אילו נושאים קודמים נחזור?

- הפונקציה הלוגריתמית - נגזרת
- משוואת משיק
- נקודות קיצון
- תחומי עלייה וירידה
- טרנספורמציות
- הקשר בין גרף הפונקציה לגרף פונקציית הנגזרת

מה חשוב לי לדעת?

- נחקור פונקציות לוגריתמיות לפי רמת קושי עולה החל מרמת הבסיס ועד לרמה הנדרשת בבחינת הבגרות.
- יש לשים לב שהתלמידים אינם נדרשים להבחין בין אסימפטוטה אנכית לבין נקודת אירציפות סליקה. במקרים שבהם יש נקודת אירציפות סליקה ולא אסימפטוטה אופקית, **התלמידים לא יידרשו** למצוא את האסימפטוטות, למצוא את החור או לשרטט את הפונקציה.
- **שאלות מומלצות לעבודת כיתה: 1, 3, 8, 12, 13, 14, 17, 20, 23, 24, 26, 28** (מומלץ להציג בכיתה את הפעילות הדיגיטלית המצורפת לשאלה), 30, 31.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית: 2, 4-7, 9-11, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 25, 27, 29, 32.**
- **השאלות החל מעמוד 233** מיועדות לתרגול עצמאי לקראת המבחן או בחינות המתכונות והבגרות.
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך תת-הפרק?

- תחילה נעסוק בחקירת פונקציה לוגריתמית כאשר גרף הפונקציה נתון כך שהתלמידים יוכלו להבין באופן ויזואלי תוך כדי התרגול כיצד התחומים ושיעורי הנקודות שהם מצאו משתלבים יחד. **שאלות 1-4** עוסקות בכך. **במסגרת הצהובה בעמוד 223** מופיע הסבר קצרצר לגבי נקודת אירציפות סליקה והבהרה לתלמידים שנקודה מסוג זה עשויה להופיע בשרטוטים במסגרת שאלות, אבל הם **אינם נדרשים** למצוא את השיעורים של נקודה כזו או להבחין בינה לבין אסימפטוטה אנכית.
- **החל מעמוד 224** נבצע חקירת פונקציה לוגריתמית כאשר גרף הפונקציה אינו נתון. בשאלות אלו הוספנו באופן הדרגתי סעיפי חשיבה מסוגים שונים: טרנספורמציות, סעיפים פתוחים, טענות נכונות או שגויות, השוואה, קיצון מוחלט, קשר בין גרף הפונקציה לגרף פונקציית הנגזרת ואחרים. בחרנו לדרג את התרגול בנושא באופן הבא:
 - חקירת פונקציה לוגריתמית שאינה פונקציית מנה וללא פרמטר: **שאלות 5-20**.
 - חקירת פונקציה לוגריתמית שאינה פונקציית מנה **עם פרמטר**: **שאלות 21-24**.
 - חקירת פונקציה לוגריתמית שהיא פונקציית מנה ללא פרמטר: **שאלות 25-29**.
 - חקירת פונקציה לוגריתמית שהיא פונקציית מנה **עם פרמטר**: **שאלות 30-31**.
- בסיום הפרק **בעמודים 233-234** מופיעות שאלות לסיכום הנושא, בסגנון השאלות המופיעות בבחינות הבגרות. בתוך כך נעסוק באופן אינטגרטיבי גם בסעיפים העוסקים בטרנספורמציות, בקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף פונקציית הנגזרת, בנקודות קיצון מוחלט ובפרמטרים. **שאלה 36** היא שאלה מסכמת שמציעה שפע סעיפי חשיבה לסיכום הנושא, וביניהם סעיפים פתוחים, טרנספורמציות והקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף פונקציית הנגזרת.

"כל מטרת החינוך היא להפוך מראות לחלונות."

- סידני האריס, עיתונאי

פרק 8 - פונקציה לוגריתמית - אינטגרל

מה נלמד בפרק זה?

- נחשב שטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ועל ידי ציר ה־x.
- נחשב אינטגרל לא מסוים ואינטגרל מסוים בעזרת הנגזרת של פונקציה לוגריתמית.
- נמצא פונקציה קדומה, ונחשב שטחים בעזרת הנגזרת של פונקציה לוגריתמית.

שעות לימוד מומלצות לפרק זה : 3 שעות.

מהי המטרה המרכזית בפרק?

שימוש באינטגרל למציאת פונקציה קדומה ולחישוב שטח בעזרת פונקציות לוגריתמיות שבסיסן e.

על אילו נושאים קודמים נחזור בפרק?

- הנגזרות של הפונקציות : $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = \ln(mx + b)$
- אינטגרל
- פונקציה קדומה

מה חשוב לי לדעת?

- בפרק זה נעסוק בכל הנוגע לחישוב אינטגרלים בעזרת פונקציות לוגריתמיות שבסיסן e.
- בתחילת הפרק נעסוק בחישוב שטחים המוגבלים על ידי גרף פונקציית הנגזרת ועל ידי ציר ה־x, ללא צורך בנוסחאות אינטגרציה חדשות.
- בהמשך הפרק נעסוק באינטגרל לא מסוים, במציאת פונקציה קדומה, באינטגרל מסוים ובחישוב שטחים באמצעות אינטגרל.
- למעשה, פרק זה מסכם את נושא הפונקציה הלוגריתמית, ולכן הוספנו בחלק ניכר מהשאלות סעיפים אינטגרטיביים בנושא טרנספורמציות, הקשר בין גרף הפונקציה לגרף פונקציית הנגזרת, קיצון מוחלט, פרמטרים, שאלות פתוחות, שגיאות נפוצות וטענות נכונות ושגויות.
- **שאלות מומלצות לעבודה בכיתה :** 1, 3, 5, 6, 7א', ג', 8ג', 9ד', 10, 11א', 14, 15א', ג', ח', 16, 17ב', 18, 21, 22, 23, 24ב', 26, 30ב', 33, 37, 39, 41.
- **שאלות מומלצות לעבודת בית :** 2, 4, 7ב', ד'-ה', 8א'-ב', ד', 9א'-ג', 11ב', 12, 13, 15ב', ד'-ז', 17א', ג', 19, 20, 22, 24א', ג', 25, 27-29, 30א', ג', 31, 32, 34-36, 38, 40.
- **השאלות החל מעמוד 253** למטה מיועדות לתרגול עצמאי לקראת המבחן והבגרות.
- **שאלות נוספות לתרגול בנושא נמצאות במרחב ההוראה בעמוד של ספר 472 באתר הוצאת ארכימדס.**

לאילו נקודות כדאי לי לשים לב במהלך הפרק?

- לפני הצגת נוסחאות חדשות לאינטגרציה של פונקציות, נעסוק בחישוב שטחים המוגבלים על ידי גרף פונקציית הנגזרת ועל ידי ציר ה- x . ניתן לעשות זאת בדרך שהתלמידים כבר מכירים על ידי הבנת הקשר בין הפונקציה לבין פונקציית הנגזרת שלה. נזכיר שהתלמידים עסקו בכך כאשר עסקו באינטגרל של פונקציה מעריכית. **שאלות 1-5** עוסקות בכך.
- **שאלה 6** היא שאלת חקר מדורגת אשר מכוונת את התלמידים לתובנה לגבי האינטגרל $\int \frac{1}{x} dx$. **המסגרת הצהובה** המופיעה אחרי השאלה מציגה לתלמידים באופן פורמלי את הנוסחה לאינטגרל זה ומציינת גם את המקרה שבו נצטרך להציב בפונקציה ערכי x שליליים. במסגרת מוצגים גם חוקי האינטגרציה שהתלמידים מכירים מהעבר, ויהיה בהם שימוש במהלך הפרק. **שאלה 7** עוסקת בכך.
- **המסגרת הצהובה** המופיעה אחרי השאלה מציגה לתלמידים באופן פורמלי את הנוסחה לאינטגרל $\int \frac{1}{mx+b} dx$ ומציינת גם את המקרה שבו נצטרך להציב בפונקציה ערכי x שעבורם הביטוי במכנה הוא שלילי. **שאלות 8-9** עוסקות בכך.
- **שאלות 10-14** עוסקות במציאת הפונקציה הקדומה.
- **שאלות 15-17** עוסקות באינטגרל מסוים. **בשאלה 16** התלמידים נדרשים לזהות **שגיאות נפוצות**.
- **בעמודים 247-253** נעסוק בחישוב שטחים שונים בעזרת אינטגרל, לפי הסדר שבו עשינו זאת כאשר חישבנו שטחים בעזרת אינטגרל של פונקציה מעריכית. **בשאלות 22, 23, 26, 28, 35 ו-40** התלמידים נדרשים לזהות את ההשפעה של טרנספורמציות על השטח שחושב בסעיפים הקודמים. **בשאלה 22** יש **סעיף פתוח**. **בשאלות 37 ו-41** התלמידים נדרשים להציע **שתי דרכים** לפתרון השאלה.
- **שאלות 42-45** משלבות אינטגרל עם חקירה מלאה של פונקציה לוגריתמית בסגנון השאלות בבחינת הבגרות.
- **שאלות 46-52** הן שאלות סיכום אינטגרטיביות של הנושא.

"זה שאיננו יכולים למצוא פתרון, זה לא אומר שאין כזה."

אנדרו ויילס, מתמטיקאי