

**שאלון 582 - מבחן אתגר 1**

פרק ראשון - גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ( $\frac{2}{3}$  נק') (66 נק')

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נק')

1. (\*\*) נתונים שני המעגלים: מעגל 1:  $(x-3)^2 + y^2 = 9$  ומעגל 2:  $(x+3)^2 + y^2 = 9$ .

מהנקודה P יוצאים שני ישרים: הראשון משיק למעגל 1 בנקודה A והשני משיק למעגל 2 בנקודה B.

- א. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות:  $AP + BP = 10$ .
- ב. במקום הגיאומטרי שמצאת כלוא מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. חשב את שטחו המקסימלי של המלבן.

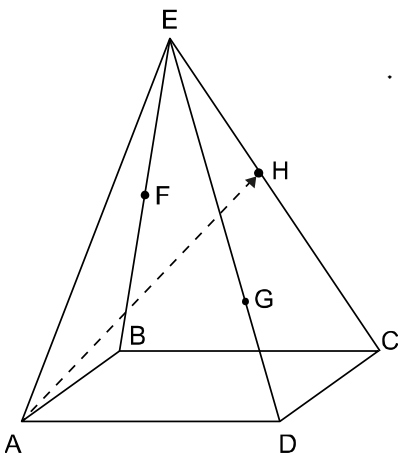
2. (\*\*) בפירמידה הישרה ABCDE שבסיסה המקבילית ABCD נתון:

$\vec{AB} = \vec{u}$ ,  $\vec{AD} = \vec{v}$ ,  $\vec{AE} = \vec{w}$ . הנקודה F היא אמצע BE,  $2DG = EG$ .  
נסמן:  $\vec{EH} = t \cdot \vec{EC}$ .

א. הבע באמצעות  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  ו-t, במידת הצורך, את הווקטורים:

$$\vec{AH} \text{ ו- } \vec{AG}, \vec{AF}$$

- ב. נתון שהוקטור  $\vec{AH}$  מוכל במישור העובר דרך הנקודות A, F ו-G. מצא באיזה יחס הנקודה H מחלקת את המקצוע CE.



3. (\*\*) למשוואה הריבועית המרוכבת:  $m \cdot Z^2 + 2(mi + a) \cdot Z + 3 + 4i = 0$  יש פתרון אחד בלבד ( $0 < m$ ).

א. מצא את a ו-m. (a ו-m ממשיים).

ב. פתרון המשוואה הוא Z. חשב את שטח המרובע שקדקודיו:  $Z, \bar{Z}, \frac{10}{Z}, \frac{10}{\bar{Z}}$ .

ג. קדקודי המרובע, הימני העליון והשמאלי התחתון, הם בהתאמה האיבר הראשון והשני בסדרה חשבונית שסכומה:  $-420 - 550i$ . מצא כמה איברים בסדרה זו.

פרק שני - גידול ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ( $33\frac{1}{3}$  נק')

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

4. (\*\* מספר העצים ביער גדל מדי שנה ב- $p\%$ . בספירה שערך שומר היערות היו ביער  $n$  עצים. כעבור  $x$  שנים מהספירה נכרתו  $3n$  עצים. כעבור  $x$  שנים נוספות היתה כמות העצים ביער  $4n$ .
- א. הבע את  $x$  באמצעות  $p$ .
- ב. כיום יש ביער  $m$  עצים. הבע באמצעות  $m$  את מספר העצים שיהיו ביער בעוד  $3x$  שנים.

5. (\*\* לפונקציה:  $f(x) = \log_b(x^2 + bx + c)$  יש אסימפטוטה אנכית אחת ( $0 < c, 2 < b$ ).

בתשובות לסעיפים הבאים ניתן להשתמש בפרמטר  $b$  במידת הצורך, אך לא בפרמטר  $c$ . מצא את:

- א. משוואת הפונקציה  $f(x)$  ואת האסימפטוטה שלה.
- ב. תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. נקודות החיתוך של גרף  $f(x)$  עם הצירים.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ה. נתונה הפונקציה:  $g(x) = |f(x)|$ . גרף  $f(x)$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה  $A$ . דרך הנקודה  $A$  עובר ישר המקביל לציר ה- $x$  וחותך את גרף  $g(x)$  בנקודות  $A, B, C$  ו- $D$  מימין לשמאל בהתאמה. אורך  $BC$  הוא 1 יח' אורך. שרטט את גרף הפונקציה  $g(x)$ , סמן עליו את הנקודות  $A, B, C$  ו- $D$  ומצא את  $b$ .

**בהצלחה!**

**תשובות:**

1 א.  $16x^2 + 25y^2 = 625$ . ב. 62.5 יח"ר.

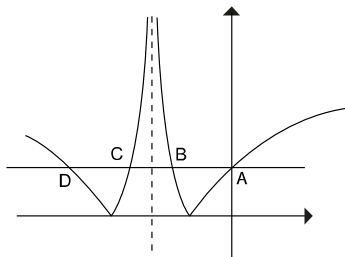
2 א.  $\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{u} + \frac{1}{2}\overline{w}$ ,  $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{v} + \frac{1}{3}\overline{w}$ ,  $\overline{AH} = t\overline{u} + t\overline{v} + (1-t)\overline{w}$ . ב. 3:2.

3 א.  $m = 1, a = 2$ . ב. 6 יח"ר. ג. 20. א.  $x = \frac{\ln 4}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$ . ב. 64m עצים.

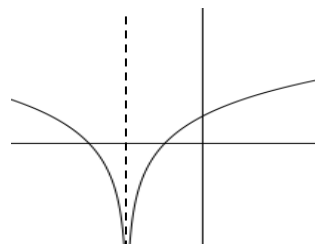
5 א.  $f(x) = \log_b\left(x^2 + bx + \frac{b^2}{4}\right)$  או  $f(x) = \log_b\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$  והאסימפטוטה:  $x = -\frac{b}{2}$ .

ב. עולה:  $-\frac{b}{2} < x$ , יורדת:  $x < -\frac{b}{2}$ . ג.  $\left(-1 - \frac{b}{2}, 0\right), \left(1 - \frac{b}{2}, 0\right), \left(0, \log_b\left(\frac{b^2}{4}\right)\right)$ .

ה.  $b = 4$  והשרטוט:



ד. השרטוט:

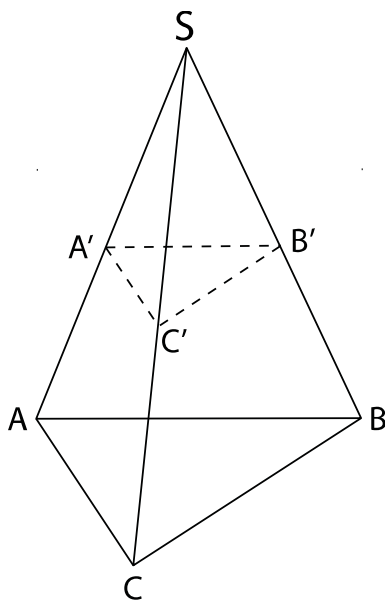


**שאלון 582 - מבחן אתגר 2**

פרק ראשון - גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ( $66\frac{2}{3}$  נק')  
 ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נק')

1. (\*\*) דרך מוקד הפרבולה  $y^2 = 2px$  ( $0 < p$ ) עובר מיתר החותך את הפרבולה בנקודות  $A(x_1, y_1)$  ו- $B(x_2, y_2)$  הנמצאות בהתאמה ברביע הראשון וברביע הרביעי.  
 א. הוכח:  $y_1 \cdot y_2 = -p^2$ .  
 ב. הבע באמצעות הפרמטר  $p$  את המקום הגיאומטרי של אמצעי המיתרים  $AB$  האפשריים.

2. (\*\*) נתונים שני המישורים:  $\pi_1: x + 2y + 2z + 1 = 0$  ו-  $\pi_2: 2x - 2y + z + 2 = 0$ .  
 א. דרך ישר החיתוך של שני המישורים עובר מישור  $\pi_3$  היוצר זווית שווה עם כל אחד משני המישורים  $\pi_1$  ו- $\pi_2$ . מצא את משוואת המישור  $\pi_3$  (מצא את שתי האפשרויות).  
 ב. נתון שהמישור אינו חותך את ציר ה- $y$ . מצא את הזווית החדה בינו לבין המישור  $\pi_2$ .  
 ג. הנקודות  $A, B, C$  נמצאות על המישורים  $\pi_1, \pi_2$  ו- $\pi_3$  בהתאמה, כך שהנקודה  $C$  היא אמצע הקטע  $AB$ . שיעור ה- $x$  של הנקודה  $A$  הוא 1. הנקודה  $C$  נמצאת על המישור  $x = -1$  ושיעור ה- $y$  שלה הוא 3. מצא את שיעורי הנקודה  $B$ .



3. (\*\*) בפירמידה ישרה שבסיסה משולש שווה צלעות, הזווית בין מקצוע הצד לבסיס היא  $\alpha$ . מישור המקביל לבסיס  $ABC$  חותך את מקצועות הצד  $AS, BS$  ו- $CS$  בנקודות  $A', B', C'$  בהתאמה. המישור  $A'B'C'$  מחלק את הפירמידה לשני נפחים כך שהנפח הכלוא בין המישור  $A'B'C'$  לבין הבסיס  $ABC$ , גדול פי שבעה מהנפח הכלוא בפירמידה בין המישור  $A'B'C'$  לבין הקדקוד  $S$ .  
 א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $A'$  את המקצוע  $AS$ .  
 ב. היקף המרובע  $BCC'B'$  שווה להיקף הבסיס  $ABC$ . מצא את  $\alpha$ .  
 ג. נפח הפירמידה 62 סמ"ק. מצא את אורך המקצוע  $BS$ .

פרק שני - גידול ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ( $\frac{1}{3}$  נק')  
 ענה על אחת מהשאלות 4-5.

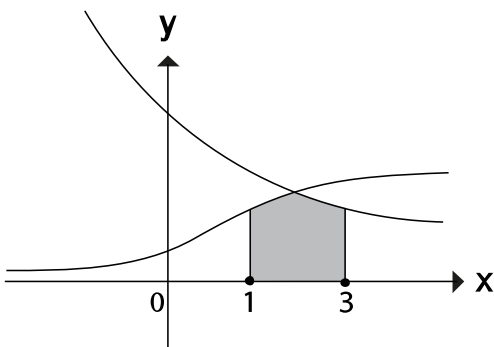
4. (\*\* נתונות שתי הפונקציות:  $f(x) = m \cdot \ln(a - x)$ ,  $g(x) = \ln(a + x)$  ,  $3 < a$  ,  $1 < m$ ).

- א. בסעיפים הבאים ניתן להשתמש במידת הצורך בפרמטרים  $a$  ו- $m$ . מצא את:
  - א. תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות של כל אחת מהפונקציות.
  - ב. נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות עם הצירים (במידה ויש כאלו).
  - ג. שרטט את הגרפים של שתי הפונקציות על אותה מערכת צירים.
  - ד. הגדירו פונקציה חדשה  $h(x) = f(x) + g(x)$ . בהסתמך על סעיף ג' ומבלי לבצע חקירה נוספת, שרטט את גרף  $h(x)$  על אותה מערכת צירים עם הגרפים ששרטטת בסעיף ג'.
  - ה. גרף  $h(x)$  חותך את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  בנקודות B ו-A בהתאמה. הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  חותכות את ציר ה-x בנקודות D ו-C בהתאמה, ואת ציר ה-y בנקודות F ו-E בהתאמה. קבעו האם קיים ערך  $m$  המתאים לנתוני השאלה שעבורו שטח הטרפז BFEC שווה לשטח הטרפז FEDA.

5. (\*\* נתונות שתי הפונקציות:  $f(x) = \sqrt{\frac{a \cdot e^x}{e^x + e^2}}$  ו-  $g(x) = \sqrt{\frac{e^x + e^2}{e^x}}$  ( $0 < a$ )).

לשתיהן אין נקודות קיצון.

- א. הבע באמצעות  $a$ , במידת הצורך, את תחום ההגדרה של שתי הפונקציות.
- ב. האסימפטוטה האופקית של גרף  $g(x)$  נמצאת במרחק שווה משתי האסימפטוטות האופקיות של גרף  $f(x)$ . מצא את  $a$  ואת האסימפטוטות לגרפים של שתי הפונקציות.



- ג. מצא את נקודות החיתוך של כל אחת הפונקציות עם הצירים (במידה ויש כאלו).
- ד. מצא את שיעורי הנקודה A, בה נחתכים שני הגרפים.
- ה. הישרים  $x = 1$  ו-  $x = 3$  חותכים את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ . השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות, לבין שני הישרים וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x. חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל.

בהצלחה!

תשובות:

1 ב.  $2y^2 = 2px - p^2$

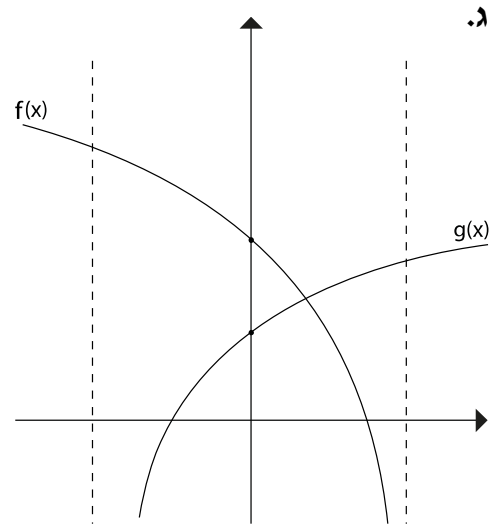
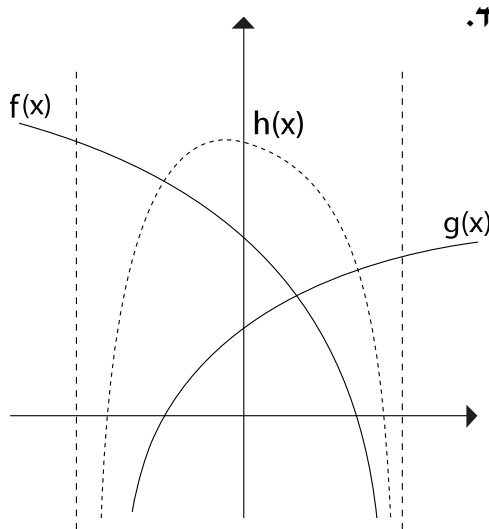
2 א.  $x - 4y - z + 1 = 0$  או  $x + z + 1 = 0$  ב.  $45^\circ$  ג.  $(-3, 1, 6)$

3 א. 1:1 ב.  $67.36^\circ$  ג. 10.15 ס"מ.

4 א.  $f(x)$ : תחום ההגדרה:  $x < a$  והאסימפטוטה  $x = a$ ,

$g(x)$ : תחום ההגדרה:  $-a < x$  והאסימפטוטה  $x = -a$ .

ב.  $f(x): (0, m \cdot \ln a), (a-1, 0)$  ,  $g(x): (1-a, 0), (0, \ln a)$



ה. לא קיים.

5 א. שתייהן מוגדרות לכל  $x$ .

ב.  $a = 4$ , האסימפטוטה של גרף  $g(x)$  היא:  $y = 1$ . האסימפטוטות של גרף  $f(x)$  הן:  $y = 0$  ו- $y = 2$ .

ג.  $f(x): (0, 0.69)$  ,  $g(x): (0, 2.89)$

ד.  $A(2, \sqrt{2})$

ה. 9.9 יח' נפת.

**שאלון 582 - מבחן אתגר 3**

פרק ראשון - גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ( $66\frac{2}{3}$  נק')  
 ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נק')

1. (\*\*) המעגל  $x^2 + y^2 = k^2$  ( $0 < k$ ) חותך את ציר ה-x בנקודות M ו-N (שיעור ה-x של הנקודה M חיובי).

א. הבע באמצעות k את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה M שווה למרחקן מהישר המשיק למעגל בנקודה N.

ב. הנקודה E היא מוקד הפרבולה שמצאת בסעיף א'. מהנקודה E מעלים אנך מציר ה-x החותך את הפרבולה בנקודה A. דרך הנקודה A עובר משיק החותך את ציר ה-x בנקודה B. מעגל שמרכזו בנקודה C, הנמצאת על חלקו החיובי של ציר ה-x, מימין לנקודה E, משיק לישר AB בנקודה D. נסמן ב-c את שיעור ה-x של הנקודה C. הבע באמצעות k ו-c את שיעורי הנקודה D.

ג. נתון:  $BD = 3AD$ . הנקודה A נמצאת בין הנקודות B ו-D. הבע באמצעות k את שיעורי הנקודה C.

ד. נתון: שטח המרובע ADCE הוא 28 יח"ר. מצא את משוואת הפרבולה שמוקדה בנקודה B.

2. (\*\*) פתרונות המשוואה:  $Z^2 - 2\cos\alpha \cdot Z + 1 = 0$  הם A ו-B ופתרונות המשוואה:

$Z^2 - 2\sin\alpha \cdot Z + 1 = 0$  הם C ו-D ( $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ). ארבעת הפתרונות נמצאים על מישור גאוס כך שהפתרונות A ו-C נמצאים ברביע הראשון.

א. הוכח שארבעת הפתרונות נמצאים על אותו מעגל קנוני במישור גאוס.

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את שטח המרובע ABDC.

ג. הבע באמצעות  $\alpha$  את גודל הזוויות שבין אלכסוני המרובע ABDC.

3. (\*\*) במנסרה ישרה שבסיסה משולשים שווי שוקיים

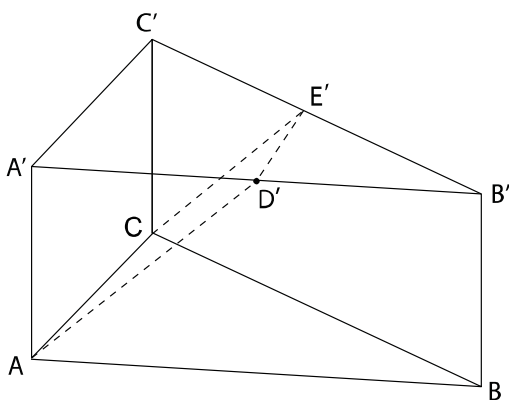
( $AB = BC$ ), הנקודות D' ו-E' הן אמצעי המקצועות A'B' ו-B'C' בהתאמה. נתון:  $3AA' = AB$ ,  $\sphericalangle ABC = 20^\circ$ .

א. חשב את הזווית החדה בין המישור ACE'D' לבין הבסיס ABC.

ב. הנקודות O<sub>1</sub> ו-O<sub>2</sub> הן נקודות מפגשי התיכונים של הבסיס התחתון ושל הבסיס העליון בהתאמה.

הישר O<sub>1</sub>O<sub>2</sub> חותך את המישור ACE'D' בנקודה M.

$$\text{חשב את היחס: } \frac{MO_1}{MO_2}$$



פרק שני - גידול ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ( $\frac{1}{3}$  נק')  
 ענה על אחת מהשאלות 4-5.

4. (\*\* נתונות שתי הפונקציות:  $f(x) = \log_a \left[ (x-a-1)^2 + a^2 \right]$  ו-  $g(x) = 2a^{x-1} - a^{2x-2} + a + 1$  ( $1 < a$ ).

א. הבע באמצעות  $a$ , במידת הצורך, את:

1) תחום ההגדרה של כל אחת הפונקציות.

2) האסימפטוטות לגרפים של כל אחת הפונקציות (במידה ויש כאלו).

3) שיעורי הנקודות A ו-B שהן נקודות הקיצון של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  בהתאמה.

ב. מצא כמה פתרונות ייתכנו למשוואה:  $f(x) = g(x)$ .

ג. הישר AB חותך את ציר ה-x בנקודה C. האסימפטוטה האופקית של גרף  $g(x)$  חותכת את הישר

AB בנקודה D כך שמתקיים:  $CD = 3AD$ . מצא את  $a$ .

ד. נתון: הגרפים של פונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  נחתכים בשתי נקודות. האסימפטוטה האופקית של

גרף  $g(x)$  חותכת את גרף  $f(x)$  בנקודות E ו-F ( $x_E < x_F$ ) ואת גרף  $g(x)$  בנקודה G. חשב את

השטח הכלוא בין גרף  $g(x)$  לבין האסימפטוטה האופקית שלו לבין הישר המקביל לציר ה-y ועובר

דרך הנקודה E.

5. (\*\* נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{50x + 1}{\sqrt[3]{50x^2 + 2x + 12}}$

א. מצא עבור הפונקציה  $f(x)$  את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות (במידה ויש כאלו).

ב. הוכח שהפונקציה  $f(x)$  עולה בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ה. הישר  $y = -px + 2p$  ( $0 < p$ ) חותך את גרף  $f(x)$  בנקודה אחת ששיעור ה-x שלה נמוך מ-1. הישר

חוצה לשני שטחים שווים את השטח הכלוא בין גרף  $f(x)$  לבין הישרים  $x = 1$  ו-  $x = 2$  לבין ציר

ה-x. מצא את  $p$ .

**בהצלחה!**

תשובות:

(1) א.  $y^2 = 4kx$  . ב.  $D\left(\frac{c-k}{2}, \frac{c+k}{2}\right)$  . ג.  $(5k, 0)$  . ד.  $y^2 = -8x$  .

(2) א.  $\cos 2\alpha$  . ג.  $90 - 2\alpha$  ,  $90 + 2\alpha$  .

(3) א.  $34.09^\circ$  . ב. 2 .

(4) א. 1. שתייהן מוגדרות לכל  $x$  . 2. רק לגרף  $g(x)$  יש אסימפטוטה

והיא:  $y = a + 1$  . 3. לגרף  $g(x)$ : הנקודה A היא  $\max(1, a + 2)$  .

לגרף  $f(x)$ : הנקודה B היא  $\min(a + 1, 2)$  . ב. אף פתרון, פתרון אחד או

שני פתרונות (בקיצור: לכל היותר שניים). ג.  $a = 2$  . ד. 0.72 יח"ר.

(5) א. מוגדרת לכל  $x$ , אין אסימפטוטות. ג.  $(0, 0.43)$  ,  $(-0.02, 0)$  .

ד. השרטוט משמאל. ה.  $p = 15$  .

