

פתרון מלא - מבחן 9**שאלה 1**

נתונים שני מעגלים: מעגל I: $(0 < r), x^2 - 4rx + y^2 = -3r^2$

מעגל II: $(0 < R), x^2 + 4Rx + y^2 = -3R^2$

א. באמצעות השלמה לריבוע נמצא את המשוואה המפורשת של מעגל I:

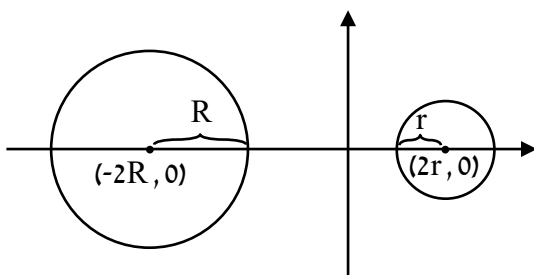
$$x^2 - 4rx + y^2 = -3r^2 \rightarrow x^2 - 4rx + 4r^2 - 4r^2 + y^2 = -3r^2 \rightarrow (x - 2r)^2 - 4r^2 + y^2 = -3r^2$$

$$\rightarrow (x - 2r)^2 + y^2 = r^2$$

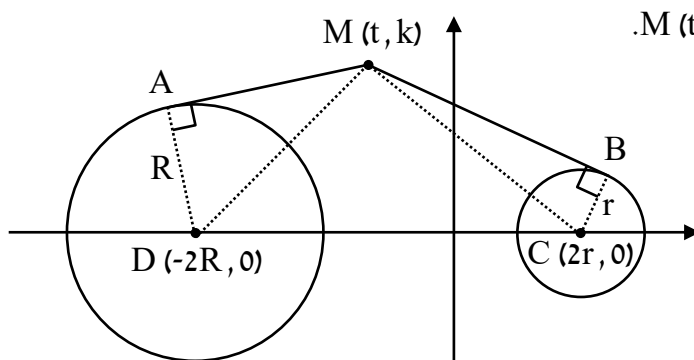
ובאופן דומה עבור מעגל II:

$$x^2 + 4Rx + y^2 = -3R^2 \rightarrow x^2 + 4Rx + 4R^2 - 4R^2 + y^2 = -3R^2 \rightarrow (x + 2R)^2 - 4R^2 + y^2 = -3R^2$$

$$\rightarrow (x + 2R)^2 + y^2 = R^2$$



כפי שניתן לראות בשרטוט משמאל, מרכזי שני המעגלים נמצאים על ציר ה-x והמרחק של כל אחד מהם מציר ה-y גדול מאורך הרדיוס. לכן, שני המעגלים חותכים את ציר ה-x בשתי נקודות ואינם חותכים את ציר ה-y באף נקודה.



ב. נסמן את שיעורי הנקודה M באמצעות t ו- k : $M(t, k)$.

כמו כן, נסמן שתי נקודות השקה כלליות A ו-B, ואת מרכזי המעגלים C ו-D, כמתואר בשרטוט. רדיוס ממרכז מעגל לנקודת השקה מאונך למשיק ולכן המשולשים $\triangle ADM$ ו- $\triangle BCM$ ישרי זווית.

אורך היתר בכל אחד מהמשולשים שווה למרחק של הנקודה M ממרכזי המעגלים C ו-D:

$$MD = \sqrt{[t - (-2R)]^2 + (k - 0)^2} = \sqrt{(t + 2R)^2 + k^2} \rightarrow MD^2 = (t + 2R)^2 + k^2$$

$$MC = \sqrt{(t - 2r)^2 + (k - 0)^2} = \sqrt{(t - 2r)^2 + k^2} \rightarrow MC^2 = (t - 2r)^2 + k^2$$

כעת נוכל לבטא את אורכי המשיקים באמצעות משפט פיתגורס:

$$MA^2 + AD^2 = MD^2 \rightarrow MA^2 + R^2 = (t+2R)^2 + k^2 \rightarrow MA^2 = (t+2R)^2 + k^2 - R^2$$

$$MB^2 + BC^2 = MC^2 \rightarrow MB^2 + r^2 = (t-2r)^2 + k^2 \rightarrow MB^2 = (t-2r)^2 + k^2 - r^2$$

המשיקים שווים זה לזה באורכם ולכן גם ריבועיהם שווים:

$$MA^2 = MB^2 \rightarrow (t+2R)^2 + k^2 - R^2 = (t-2r)^2 + k^2 - r^2 \rightarrow (t+2R)^2 - R^2 = (t-2r)^2 - r^2$$

$$\rightarrow t^2 + 4Rt + 4R^2 - R^2 = t^2 - 4rt + 4r^2 - r^2 \rightarrow 4Rt + 3R^2 = -4rt + 3r^2$$

$$\rightarrow 4Rt + 4rt = 3r^2 - 3R^2 \rightarrow 4t(R+r) = 3(r^2 - R^2) \rightarrow 4t(R+r) = 3(r+R)(r-R)$$

$$\rightarrow 4t = 3(r-R) \rightarrow t = \frac{3}{4}(r-R)$$

לסיום, נציב x במקום הפרמטר t ונסיק שהמקום הגיאומטרי המבוקש הוא הישר: $x = \frac{3}{4}(r-R)$.

ג. i. אם המקום הגיאומטרי נמצא מימין לציר ה- y אז היקף מעגל I גדול מהיקף מעגל II: **הטענה נכונה.**

הסבר: אם הישר $x = \frac{3}{4}(r-R)$ מימין לציר ה- y אז שיעור ה- x של הנקודות שנמצאות עליו גדול מ-0 ולכן:

$$0 < \frac{3}{4}(r-R) \rightarrow 0 < r-R \rightarrow R < r$$

במקרה זה אורך הרדיוס r של מעגל I גדול מאורך הרדיוס R של מעגל II ולכן היקף מעגל I גדול מהיקף מעגל II.

ii. ככל שההפרש בין היקפי המעגלים גדול יותר כך המקום הגיאומטרי רחוק יותר מציר ה- y : **הטענה נכונה.**

הסבר: היקף מעגל I הוא $2\pi r$ והיקף מעגל II הוא $2\pi R$ ולכן ההפרש ביניהם שווה ל:

$$2\pi r - 2\pi R = 2\pi(r-R)$$

ככל שההפרש גדל כך הערך של הגורם $(r-R)$ גדל. כיוון ששיעור ה- x של הנקודות על המקום הגיאומטרי

הוא $x = \frac{3}{4}(r-R)$ הגדלה של $(r-R)$ תגדיל את שיעור ה- x של הנקודות על המקום הגיאומטרי. כתוצאה

מכך כל הנקודות אכן יתרחקו מציר ה- y , לכיוון ימין.

שימו לב: במסגרת הפתרון הנחנו שמתקיים: $R < r$ ומצאנו שככל שההפרש גדל כך המרחק מציר ה- y הולך

וגדל לכיוון ימין. באופן דומה ניתן להראות שגם תחת ההנחה ש: $r < R$ המרחק מציר ה- y הולך וגדל יחד

עם ההפרש אך הפעם הגדילה תהיה לכיוון שמאל.

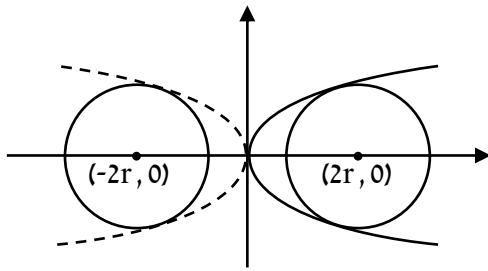
ד. נתון שהנקודה A נמצאת על ציר ה- y וגם על המקום הגיאומטרי מסעיף א'. כיוון שלכל הנקודות על

המקום הגיאומטרי שיעור x זהה נסיק שכל הנקודות נמצאות, בדומה לנקודה A, על ציר ה- y . לכן משוואת

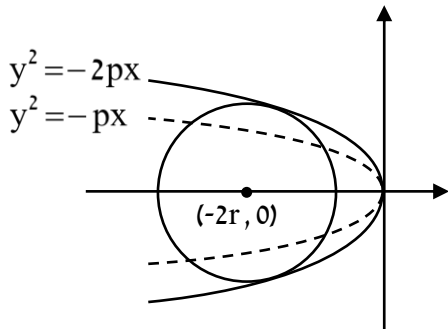
המקום הגיאומטרי היא: $x = 0$. נשווה לתוצאה של סעיף ב':

$$x = 0 \rightarrow \frac{3}{4}(r-R) = 0 \rightarrow r-R = 0 \rightarrow r = R$$

ולכן הרדיוסים של שני המעגלים שווים והמרכזים שלהם על ציר ה- x במרחקים שווים מראשית הצירים.



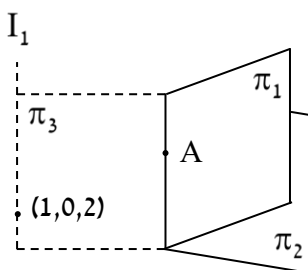
נתון שהפרבולה $y^2 = 2px$ משיקה למעגל I. הפרבולה והמעגל סימטריים שניהם ביחס לציר ה-x ולכן קיימות שתי נקודות השקה, כמתואר משמאל על ידי הפרבולה הרציפה. מצאנו שהמעגלים I ו-II סימטריים ביחס לציר ה-y ולכן הפרבולה שתשיק למעגל II בשתי נקודות תתקבל משיקוף הפרבולה הנתונה ביחס לציר ה-y. משוואת פרבולה זו היא: $y^2 = -2px$ והיא מופיעה בשרטוט במקווקו.



ה. הקטנה של קבוע הפרבולה מביאה לכיווץ שלה לכיוון ציר ה-x ולכן הפרבולה $y^2 = -px$ מתקבלת מכיווץ של הפרבולה $y^2 = -2px$. כיוון שהפרבולה המקורית השיקה למעגל, הפרבולה המכווצת חותכת אותו בארבע נקודות, כפי שניתן לראות בשרטוט משמאל.

שאלה 2

א. הנורמל של π_1 הוא $(m, 1, 1)$ והנורמל של π_2 הוא $(m+1, -1, 1)$. נניח בשלילה שהמישורים מקבילים ולכן הנורמלים שלהם קוליניאריים ומתקיים: $\frac{m+1}{m} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{1}$. כפי שניתן לראות, השוויון הימני הוא שגוי ולכן הגענו לסתירה. מכאן נובע שלא ייתכן שהמישורים מקבילים.



ב. 1. הנקודה A נמצאת על ישר החיתוך של המישורים ולכן היא מקיימת את

שתי המשוואות של המישורים. נציב את הנקודה A $(3, -2, 4)$ במשוואת המישור π_1 ונקבל: $3m - 2 + 4 - 5 = 0 \rightarrow 3m = 3 \rightarrow m = 1$.

2. את המשוואה המייצגת את ישר החיתוך נמצא על ידי חיסור משוואות (המקדם של z זהה בשתי המשוואות ונוח "להיפטר" ממנו):

$$\begin{aligned} \pi_2: 2x - y + z &= 12 \\ \pi_1: x + y + z &= 5 \end{aligned} \quad \text{מתקבל הקשר בין } x \text{ ל-} y: x - 2y = 7$$

קשר זה מייצג את ישר החיתוך ונוכל להציב בו את הנקודה הנתונה A $(3, -2, 4)$.

על מנת לקבל הצגה פרמטרית של ישר החיתוך נצטרך נקודה נוספת על ישר החיתוך.

נציב במשוואת הקשר $x - 2y = 7$, באופן שרירותי הצבה נוחה: $y = 0$ ונקבל $x = 7$.

על ידי הצבה של x ו-y באחת ממשוואות המישורים נקבל $z = -2$ ואת הנקודה B $(7, 0, -2)$.

ההצגה הפרמטרית של הישר העובר דרך נקודות A ו-B היא: $\underline{x} = (3, -2, 4) + t(7 - 3, 0 + 2, -2 - 4)$ ולאחר סידור וצמצום: $\underline{x} = (3, -2, 4) + t(2, 1, -3)$. כמובן שעבור נקודה שרירותית אחרת, היינו מקבלים משוואה שונה, אך גם היא הייתה מייצגת את אותו ישר חיתוך.

ג. אם הישר ℓ_1 מקביל לישר החיתוך שמצאנו בסעיף א' חייב להתקיים יחס זהה בין וקטורי הכיוון שלהם ולכן: $\frac{p^2 + 2p - 1}{2} = \frac{p^2}{1} = \frac{p^2 - 4}{-3}$. לאחר פתרון השוויון הימני נקבל $p = \pm 1$. לאחר פתרון השוויון השמאלי נקבל פתרון יחיד $p = 1$ ולכן הוא הפתרון שמקיים את השוויון המשולש.

ד. כדי למצוא תצוגה אלגברית למישור π_3 נצטרך שני וקטורי כיוון המקבילים למישור. מכיוון שהמישור π_3 עובר דרך ישר החיתוך, נשתמש בוקטור הכיוון שלו $(2, 1, -3)$. וקטור כיוון נוסף הוא הוקטור העובר דרך הנקודה $A(3, -2, 4)$ הנמצאת על ישר החיתוך ודרך הנקודה $(1, 0, 2)$ הנמצאת על ℓ_1 . וקטור כיוון זה הוא: $(1, -1, 1)$. נמצא את וקטור המקדמים (a, b, c) של המישור π_3 . וקטור המקדמים מאונך למישור ולכל וקטור המקביל למישור ולכן:

$$\begin{array}{ccccc} & & 2a + b - 3c = 0 & \longleftarrow & (a, b, c) \cdot (2, 1, -3) = 0 \\ 3a - 2c = 0 & \longleftarrow & & \longleftarrow & \\ & & a - b + c = 0 & \longleftarrow & (a, b, c) \cdot (1, -1, 1) = 0 \end{array}$$

נניח שרירותית $a = 2$, נקבל $c = 3$. לאחר הצבה באחת המשוואות נקבל $b = 5$. ההצגה האלגברית של המישור π_3 היא $2x + 5y + 3z + d = 0$. נציב את הנקודה $(1, 0, 2)$ ונקבל $d = -8$. ולבסוף, ההצגה האלגברית של המישור π_3 : $2x + 5y + 3z - 8 = 0$.

ה. i. דרך הישר ℓ_1 ניתן להעביר רק מישור אחד שמקביל לישר החיתוך שמצאתם: **הטענה שגויה**.
הסבר: שני הישרים מקבילים ולכן כל מישור שעובר דרך הישר ℓ_1 יקביל לישר החיתוך, פרט למישור π_3 שעובר דרך ישר החיתוך.

ii. דרך הישר ℓ_1 ניתן להעביר רק מישור אחד שמקביל למישור π_1 : **הטענה נכונה**.
הסבר: מבין כל המישורים שניתן להעביר דרך הישר ℓ_1 רק המישור שהנורמל שלו שווה לנורמל של המישור π_1 יקביל למישור π_1 .

iii. לא קיים מישור שהוא מאונך לשלושת המישורים π_1, π_2 ו- π_3 : **הטענה שגויה**.
הסבר: מישור שהנורמל שלו הוא וקטור הכיוון של ישר החיתוך $\underline{x} = (3, -2, 4) + t(2, 1, -3)$, המשותף ל- π_1, π_2 ו- π_3 , יהיה מאונך לשלושת המישורים. באמצעות הנורמל $(2, 1, -3)$ והנקודה A ניתן למצוא דוגמה למשוואת מישור כזה: $2x + y - 3z + 8 = 0$.

שאלה 3:

א. ראשית, נביע את הערך המוחלט של כל אחד מהמספרים. נזכור: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$|Z_1| = \sqrt{b^2 + a^2} \quad \text{ו} \quad |Z_2| = \sqrt{(b-1)^2 + (1+a)^2}$$

לפי הנתון נשווה בין שני האורכים:

$$|Z_1| = |Z_2| \rightarrow \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{(b-1)^2 + (1+a)^2} \rightarrow b^2 + a^2 = (b-1)^2 + (1+a)^2 \rightarrow b = a + 1$$

כעת נביע את הערך המוחלט של סכום שני המספרים. ראשית יש לסדר את הסכום לפי מרכיב ממשי ומרכיב מדומה ורק לאחר מכן לחשב את הערך המוחלט שלו:

$$|Z_1 + Z_2| = |b + ai + b - 1 + (1 + a)i| = |(2b - 1) + (2a + 1)i| = \sqrt{(2b - 1)^2 + (2a + 1)^2} = 5\sqrt{2}$$

נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל: $(2b - 1)^2 + (2a + 1)^2 = 50$.

נציב $b = a + 1$ ונמצא את a ($0 < a$):

$$(2a + 1)^2 + (2a + 1)^2 = 50 \rightarrow 2(2a + 1)^2 = 50 \rightarrow (2a + 1)^2 = 25 \rightarrow 2a + 1 = \pm 5 \rightarrow a = 2 \quad a = -3$$

ולאחר הצבה במשוואה: $b = 3$.

ב. לפי ערכי a ו- b שמצאנו בסעיף א', נקבל את Z_1 ו- Z_2 וכן את המספרים הצמודים שלהם:

$$Z_1 = 3 + 2i \quad \text{והצמוד} \quad \overline{Z_1} = 3 - 2i$$

$$\text{וכן את } Z_2 = 2 + 3i \quad \text{והצמוד} \quad \overline{Z_2} = 2 - 3i$$

לפי השרטוט ניתן לראות שמתקבל טרפז שבסיסיו מקבילים לציר ה- y .

$$\text{נחשב את שטחו: } S = \frac{(3 - (-3) + 2 - (-2)) \cdot (1)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

כלומר, שטחו 5 יח"ר.

ג. ארבעת המספרים: $Z_1, Z_2, \overline{Z_1}, \overline{Z_2}$ ימצאו על אותו מעגל קונוי אם מרחקם מראשית הצירים זהה.

נמצא את המרחק של כל אחד מהמספרים מראשית הצירים באמצעות הנוסחה: $R = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$Z_1 \rightarrow R = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\overline{Z_1} \rightarrow R = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$Z_2 \rightarrow R = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\overline{Z_2} \rightarrow R = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

ניתן לראות כי בכל אחד מארבעת המקרים הרדיוס $R = \sqrt{13}$ ולכן המספרים נמצאים על מעגל קונוי אחד

שמשוואתו: $x^2 + y^2 = 13$.

ד. הזווית $\angle Z_1EZ_2$ היא הזווית ההיקפית הנשענת על הקשת הקטנה Z_1Z_2 . נמצא את גודל הזווית המרכזית $\angle Z_1OZ_2$ ונזכור כי זווית היקפית שווה למחצית מהזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.

נמצא את הארגומנט של כל אחד מהמספרים באמצעות הנוסחה $\tan \theta = \frac{y}{x}$:

$$Z_1 \rightarrow \tan \theta = \frac{2}{3} \rightarrow \theta = 33.69^\circ$$

$$Z_2 \rightarrow \tan \theta = \frac{3}{2} \rightarrow \theta = 56.31^\circ$$

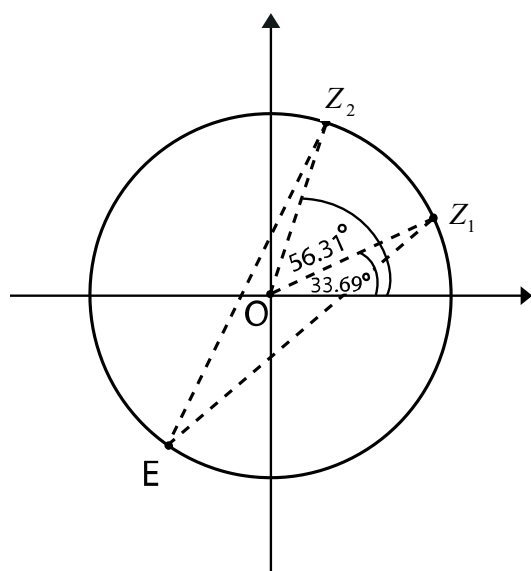
כפי שניתן לראות בשרטוט, ניתן למצוא את גודל

הזווית $\angle Z_1OZ_2$ באמצעות חיסור זוויות:

$$\angle Z_1OZ_2 = 56.31^\circ - 33.69^\circ \rightarrow \angle Z_1OZ_2 = 22.62^\circ$$

לסיכום:

$$\angle Z_1EZ_2 = \frac{\angle Z_1OZ_2}{2} \rightarrow \angle Z_1EZ_2 = 11.31^\circ$$



שאלה 4:

נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{-x} + x \cdot e^x$.

א. נוכיח שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון יחידה שנמצאת על ציר ה-y:

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = -e^{-x} + (x+1) \cdot e^x \quad : f(x) \text{ ראשית נגזור את הפונקציה}$$

$$f'(0) = -e^{-0} + (0+1) \cdot e^0 = -1 + 1 = 0 \quad \text{ולאחר מכן נציב } x = 0$$

מצאנו שמתקיים $f'(0) = 0$ ולכן הנקודה חשודה בתור נקודת קיצון. כעת נמצא את סוג הקיצון:

ראשית נמצא את פונקציית הנגזרת השנייה:

$$f''(x) = -e^{-x} \cdot (-1) + 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = e^{-x} + (x+2) \cdot e^x$$

$$f''(0) = e^{-0} + (0+2) \cdot e^0 = 1 + 2 = 3 \quad \text{ולאחר מכן נציב } x = 0$$

מצאנו שמתקיים $0 < f''(0)$ ולכן הנקודה היא קיצון מסוג מינימום.

$$f(0) = e^{-0} + 0 \cdot e^0 = 1 \quad \text{נמצא את שיעור ה-y של הנקודה:}$$

ולכן לפונקציה $f(x)$ יש את נקודת הקיצון: $\min(0, 1)$.

לבסוף, נתון שלמשוואה $f'(x) = 0$ יש פתרון אחד ולכן לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון אחת **לכל היותר**. כלומר

הנקודה $\min(0, 1)$ שמצאנו היא נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$.

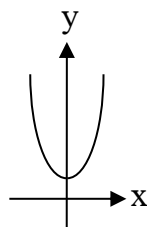
ב. נבחן את התנהגות הפונקציה $f(x)$ כאשר ערכי x שואפים לאינסוף ולמינוס אינסוף:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} + x \cdot e^x = e^{-\infty} + \infty \cdot e^{\infty} = 0 + \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + x \cdot e^x = e^{\infty} - \infty \cdot e^{-\infty} = \infty + 0 = \infty$$

שימו לב: בחישוב הגבול כאשר x שואף למינוס אינסוף, הביטוי הפולינומיאלי x "זניח" בהשוואה לביטוי המעריכי e^x ולכן במכפלה $x \cdot e^x$ השאיפה של e^x ל- ∞ חזקה יותר מהשאיפה של x ל- $-\infty$ כך שהביטוי כולו שואף ל- ∞ .

מצאנו שכאשר ערכי x שואפים לאינסוף ולמינוס אינסוף ערכי הפונקציה שואפים לאינסוף ולכן לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטה אופקית.



ג. על סמך סעיפים א' ו-ב' מתקבל השרטוט הבא:

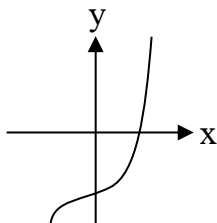
ד. נתונה הפונקציה: $g(x) = e^x(x-1) - e^{-x}$

1. מתקיים:

$$g'(x) = e^x \cdot (x-1) + e^x \cdot 1 - e^{-x} \cdot (-1) = e^x[1 + (x-1)] + e^{-x} = e^x \cdot x + e^{-x} = f(x)$$

ולכן הפונקציה $f(x)$ מהסעיפים הקודמים היא פונקציית הנגזרת של $g(x)$. בסעיף ג' ראינו שהפונקציה $f(x)$ חיובית לכל x , ולכן פונקציית הנגזרת $g'(x)$ חיובית לכל x . מכאן נובע שהפונקציה $g(x)$ עולה לכל x .

2. כאשר לפונקציה מעריכית יש אסימפטוטה אופקית, ככל שגרף הפונקציה מתקרב לאסימפטוטה כך השיפוע שלו הולך ומתקרב לאפס. בהתאם, ערכי פונקציית הנגזרת הולכים ומתקרבים לאפס כך שלגרף פונקציית הנגזרת יש אסימפטוטה אופקית $y = 0$. פונקציית הנגזרת $g'(x)$ היא הפונקציה $f(x)$ וכיוון שראינו שאין לה אסימפטוטה אופקית ב- $y = 0$ נוכל לקבוע שלפונקציה הקדומה שלה $g(x)$ אין אסימפטוטה אופקית.



3. על סמך סעיפים ד'1 ו-ד'2 מתקבל עבור $g(x)$ השרטוט הבא:

נשים לב שנקודת החיתוך עם ציר ה- y היא נקודת **פיתול** כיוון שהוכחנו בסעיף א' שזוהי נקודת קיצון של פונקציית הנגזרת.

ה. נחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, הצירים והישר $x=1$ באמצעות האינטגרל:

$$\int_0^1 f(x)dx = g(x)\Big|_0^1 = g(1) - g(0) = [e^1(1-1) - e^{-1}] - [e^0(0-1) - e^{-0}] = [e \cdot 0 - \frac{1}{e}] - [1 \cdot (-1) - 1] = -\frac{1}{e} + 2$$

לכן, השטח המבוקש שווה ל- $2 - \frac{1}{e} = 1.63$ יח"ר.

ו. נתונה הפונקציה $h(x) = x \cdot g(x)$.

i. לפונקציות $h(x)$ ו- $g(x)$ יש שתי נקודות חיתוך שאחת מהן נמצאת ברביע הרביעי: **הטענה נכונה**.

הסבר: נשווה אלגברית בין הביטויים ונקבל:

$$h(x) = g(x) \rightarrow x \cdot g(x) = g(x) \rightarrow x \cdot g(x) - g(x) = 0 \rightarrow (x-1) \cdot g(x) = 0$$

מכאן נובע שפתרונות המשוואה הם $x_1 = 1$ שמאפס את הגורם השמאלי במכפלה או שיעורי ה- x של נקודות

האפס של הפונקציה $g(x)$ שמאפסים את הגורם הימני במכפלה. כפי שניתן להסיק מסעיף ד' קיימת

לפונקציה $g(x)$ נקודת אפס אחת בלבד ששיעור ה- x שלה אינו ידוע לנו ולכן נסמן בתור x_2 .

מצאנו שלמשוואה $h(x) = g(x)$ יש שני פתרונות ולכן לפונקציות יש שתי נקודות חיתוך. שיעור ה- y של

הנקודה x_2 הוא 0 ולכן היא אינה ברביע הרביעי. נמצא את שיעור ה- y של x_1 :

$$g(1) = e^1(1-1) - e^{-1} = e \cdot 0 - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

ולכן שיעורי נקודת החיתוך השנייה הם: $(1, -\frac{1}{e})$ והיא אכן ברביע הרביעי.

$$\text{ii. } \int_0^1 h(x) dx > \int_{-1}^0 (h(x) - g(x)) dx : \text{הטענה שגויה.}$$

הסבר: נמצא את סימן האינטגרלים שמשני צידי איהשוויון. נתחיל מאגף שמאל:

בסעיף הקודם מצאנו ש- $g(1) < 0$ ולכן הנקודה $x = 1$ נמצאת **משמאל** לנקודת החיתוך של הפונקציה $g(x)$

עם ציר ה- x . כלומר בתחום $0 < x < 1$ ערכי הפונקציה $g(x)$ שליליים. הביטוי הפולינומיאלי x לעומת זאת

הוא חיובי בתחום זה ולכן נוכל לקבוע שהמכפלה $x \cdot g(x)$ שלילית בכל התחום.

מצאנו שערכי הפונקציה $h(x) = x \cdot g(x)$ שליליים בתחום $0 < x < 1$ ולכן: $\int_0^1 h(x) dx < 0$.

נעבור לאגף ימין. תחילה נראה שמתקיים:

$$h(x) - g(x) = x \cdot g(x) - g(x) = (x-1) \cdot g(x)$$

ולכן האינטגרל המדובר שקול ל- $\int_{-1}^0 (x-1) \cdot g(x) dx$.

מנימוק דומה לזה שהוצג עבור אגף שמאל נוכל להסיק שבתחום $-1 < x < 0$ ערכי הפונקציה $g(x)$

שליליים. בתחום זה הביטוי הפולינומיאלי $x-1$ שלילי גם כן ולכן נוכל לקבוע שהמכפלה $(x-1) \cdot g(x)$

חיובית בכל התחום.

מצאנו שערכי הפונקציה $(x-1) \cdot g(x)$ חיוביים בתחום $-1 < x < 0$ ולכן: $\int_{-1}^0 (x-1) \cdot g(x) dx > 0$. כלומר

עבור האינטגרל הנתון באגף ימין מתקיים: $\int_{-1}^0 [h(x) - g(x)] dx > 0$.

מצאנו שהביטוי באגף שמאל הוא שלילי ואילו הביטוי באגף ימין הוא חיובי ולכן אגף ימין הוא הגדול מהשניים והטענה המוצגת שגויה.

שאלה 5

א. לפי הגדרת פונקציית ה- $\ln$, הפונקציה הנתונה מוגדרת לכל $0 < x$ ויש לה אסימפטוטה אנכית ב- $x = 0$.

ב. נקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקבלת עבור $x = 0$. כיוון שהפונקציה לא מוגדרת עבור שיעור x זה, לא קיימת נקודת חיתוך עם ציר ה- y . נמצא את נקודות החיתוך עם ציר ה- x :

$$f(x) = 0 \rightarrow (\ln^2 x - 2 \ln x)^n = 0 \rightarrow \ln^2 x - 2 \ln x = 0 \rightarrow \ln x (\ln x - 2) = 0$$

$$\ln x = 0 \rightarrow x_1 = e^0 \rightarrow x_1 = 1 \quad \text{מכאן ששני הפתרונות הם:}$$

$$\ln x - 2 = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x_2 = e^2$$

לכן, נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים הן: $(1, 0)$, $(e^2, 0)$.

ג. נמצא את פונקציית הנגזרת $f'(x)$:

$$f'(x) = n(\ln^2 x - 2 \ln x)^{n-1} \cdot \left(\frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} \right) = \frac{2n}{x} (\ln^2 x - 2 \ln x)^{n-1} \cdot (\ln x - 1)$$

פונקציית הנגזרת מתאפסת עבור:

$$\text{I. } \ln^2 x - 2 \ln x = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = e^2$$

$$\text{II. } \ln x - 1 = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x_3 = e$$

את שיעורי ה- y של x_1, x_2 מצאנו בסעיף ב'. נמצא את שיעור ה- y של x_3 :

$$f(e) = (\ln^2 e - 2 \ln e)^n = (1^2 - 2)^n = (-1)^n$$

לכן, הנקודות עבורן מתקיים $f'(x) = 0$ הן: $(1, 0)$, $(e^2, 0)$ ו- $(e, (-1)^n)$.

כיוון ששיעור ה- y של הנקודה השלישית תלוי בזוגיות של n , נבדוק את סוג הקיצון בעזרת טבלאות עלייה וירידה עבור n זוגי ועבור n אי-זוגי:

עבור n זוגי:

תחום x	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < e$	$x = e$	$e < x < e^2$	$x = e^2$	$e^2 < x$
נציב בנגזרת	0.5	קיצון	2	קיצון	3	קיצון	8
סימן הנגזרת	-		+		-		+
הפונקציה עולה/יורדת		min		max		min	

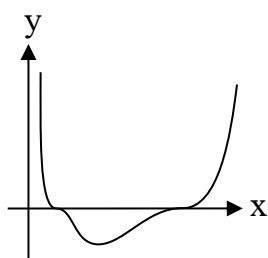
עבור n אי-זוגי :

תחום x	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < e$	$x = e$	$e < x < e^2$	$x = e^2$	$e^2 < x$
נציב בנגזרת	0.5	פיתול	2	קיצון	3	פיתול	8
סימן הנגזרת	-		-		+		+
הפונקציה עולה/יורדת				min			

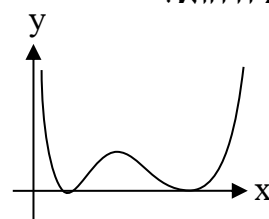
לכן, עבור ערכי n זוגיים נקבל: $\min(1,0)$, $\max(e,1)$ ו- $\min(e^2,0)$.

ואילו עבור ערכי n אי-זוגיים נקבל: $(1,0)$ פיתול, $(e^2,0)$ פיתול ו- $\min(e,-1)$.

כאשר $n = 2k + 1$ כלומר כאשר n אי-זוגי
גרף הפונקציה הוא :

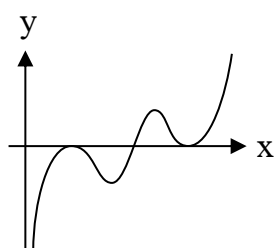


ד. כאשר $n = 2k$ כלומר כאשר n זוגי
גרף הפונקציה הוא :



ה. נתון: $\int_1^{e^2} f(x) dx < 0$.

בתחום זה הגרף עבור n זוגי נמצא מעל ציר ה- x ולכן האינטגרל חיובי ואינו מתאים לנתון.



לעומת זאת, הגרף עבור n אי-זוגי נמצא מתחת לציר ה- x ולכן האינטגרל שלילי ומתאים לנתון החדש. נסיק ש- n אי-זוגי ולכן גרף הפונקציה המתאים מסעיף ד' הוא השמאלי. כדי לשרטט את גרף פונקציית הנגזרת נשים לב שתחום ההגדרה אינו משתנה, ולכן $x = 0$ נשארת אסימפטוטה אנכית. כמו כן, קיימות 3 נקודות בהן פונקציית הנגזרת מתאפסת ואת תחומי החיוביות והשליליות ביניהן נקבע לפי תחומי העליה והירידה של הפונקציה. נקבל שגרף פונקציית הנגזרת הוא המופיע משמאל :

ו. אינטגרל בתחום בו גרף הפונקציה נמצא מתחת לציר ה- x הוא בעל סימן שלילי. נסמן את התחומים

הנתונים על גבי גרף פונקציית הנגזרת שמצאנו ונראה שבהשוואה ל- $\int_1^{e^2} f'(x) dx$, האינטגרל $\int_{0.5}^{e^2} f'(x) dx$ בעל

יותר שטחים בעלי סימן שלילי, ולכן קטן ממנו בערכו ואילו האינטגרל $\int_1^{e^3} f'(x) dx$ מכיל יותר שטחים בעלי

סימן חיובי ולכן גדול ממנו בערכו. מכאן שהביטוי בעל הערך הגדול ביותר הוא **ביטוי 2**: $\int_1^{e^3} f'(x) dx$.