
ארכימדס
אסף לוי
בכיוון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472
כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק א'
הוצאת ארכימדס
שאלון 472
הפונקציה הלוגריתמית
חקירה

הוצאת ארכימדס
שאלון 472

הפונקציה הלוגריתמית
חקירה

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית

נוכל להיעזר באי-שוויונות לוגריתמים למציאת תחום הגדרה של פונקציות. כפי שלמדנו, הביטוי בתוך הלוגריתם מוכרח להיות חיובי. לכן , נשלב במציאת תחום ההגדרה גם בדיקה של ערכי ה־x שעבורם המכנה מתאפס, ונקפיד שתחום ההגדרה לא יכלול אותם.

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית

דוגמה: מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה: $f\left(x\right)=\frac{lnx}{x-5}$

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית

דוגמה: מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \frac{lnx}{x-5}$

פתרון: כדי למצוא את תחום ההגדרה עלינו לבצע שתי בדיקות:

הראשונה: נבדוק עבור אילו ערכי x הביטוי שבתוך הלוגריתם הוא חיובי.

נקבל: $x > 0$.

השנייה: נבדוק עבור אילו ערכי x המכנה אינו מתאפס. נקבל: $x \neq 5$.

תחום ההגדרה כולל את כל ערכי x החיוביים מלבד 5,

ולכן הוא: $x > 5$ או $0 < x < 5$.

מנקודה זו והלאה, לאחר הסברים, המצגת מפנה לתרגול בכרך א’ של הספר בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472:

כעת נוכל לפתור את תרגילים 5-2 בעמוד 205.

זוגיות ואי־זוגיות של פונקציה לוגריתמית

דוגמה: עבור כל פונקציה קבעו אם היא זוגית, אי־זוגית או שאינה זוגית ואינה אי־זוגית:

א. $f\left(x\right)=ln\left(x^2\right)$

ב. $g\left(x\right)=x\bullet lnx$

זוגיות ואי־זוגיות של פונקציה לוגריתמית

דוגמה: עבור כל פונקציה קבעו אם היא זוגית, אי־זוגית או שאינה זוגית ואינה אי־זוגית:

א. $f\left(x\right)=ln\left(x^2\right)$ ב. $g\left(x\right)=x\bullet lnx$

פתרון: נבדוק את הביטוי המתקבל עבור בכל פונקציה:

א. מתקיים: $f\left(-x\right)=ln\left(\left(-x\right)^2\right)=ln\left(x^2\right)=f\left(x\right)$, ולכן הפונקציה זוגית.

ב. מתקיים: $g\left(-x\right)=-xln\left(-x\right)$, והביטוי שהתקבל אינו שווה ל־$g\left(x\right)$ ואינו שווה ל־$-g\left(x\right)$. לכן הפונקציה אינה זוגית ואינה אי־זוגית.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 6-8 בעמוד 206.

אסימפטוטה אנכית בפונקציה לוגריתמית

בפונקציות לוגריתמיות נסתמך על תחום ההגדרה כדי למצוא את האסימפטוטות האנכיות.

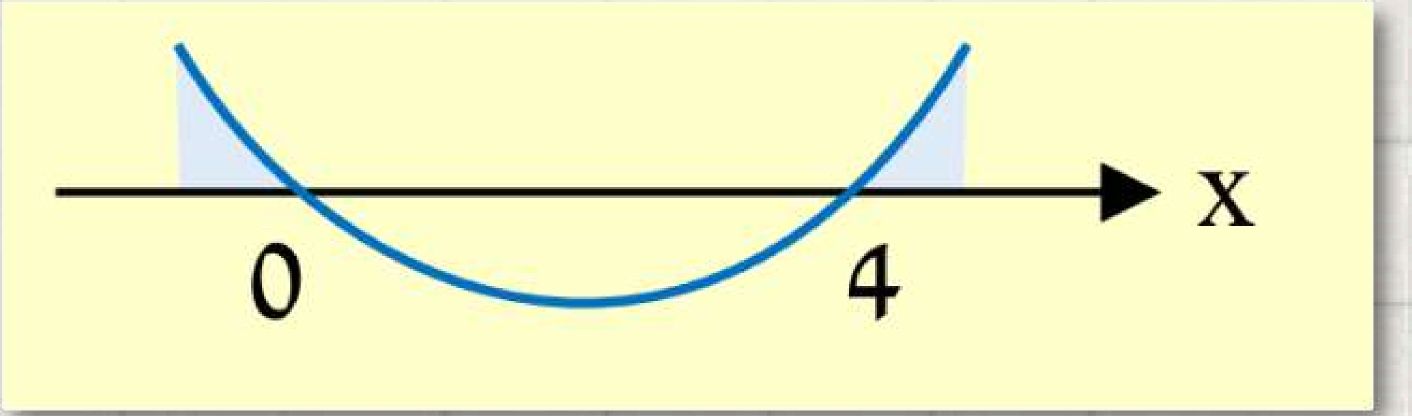
דוגמה: מצאו את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $f\left(x\right)=ln\left(x^2-4x\right)$.

אסימפטוטה אנכית בפונקציה לוגריתמית

בפונקציות לוגריתמיות נסתמך על תחום ההגדרה כדי למצוא את האסימפטוטות האנכיות.

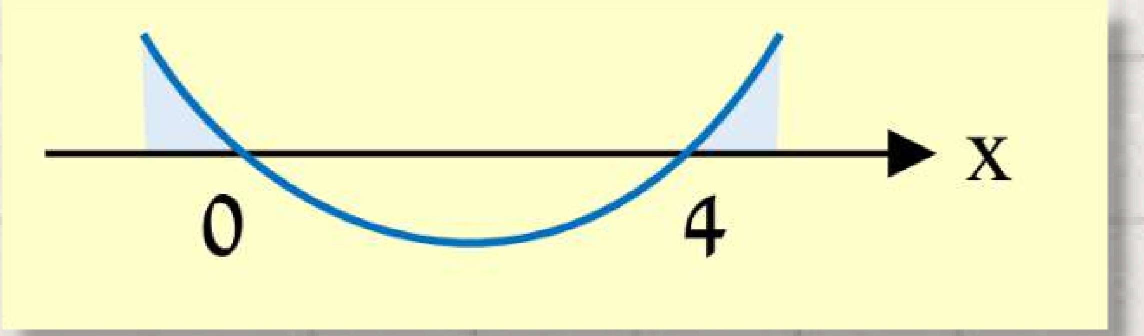
דוגמה: מצאו את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $f(x) = ln\left(x^2 - 4x\right)$.

פתרון: תחילה נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, ולשם כך נבדוק עבור אילו ערכי x הביטוי המופיע בתוך הלוגריתם הוא חיובי: $0 < x^2 - 4x$:

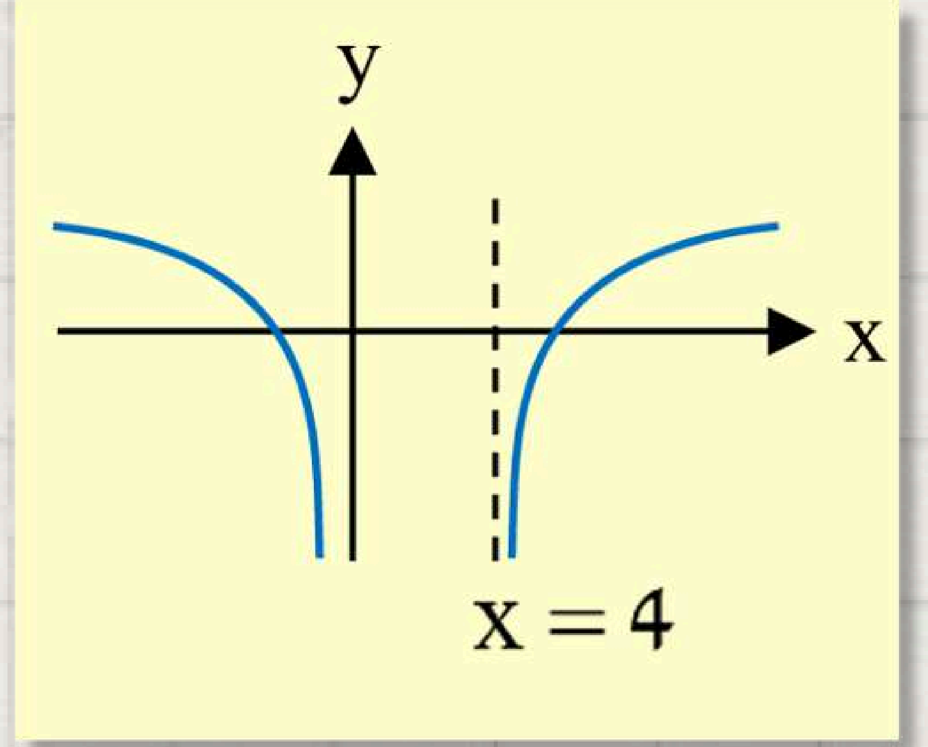


הביטוי הריבועי שבאגף ימין מתאפס עבור $x = 4$ ו־ $x = 0$. נמקם את שני הערכים על ציר ה־x, ונשרטט דרכם פרבולה.

אסימפטוטה אנכית בפונקציה לוגריתמית



המשך פתרון: המקדם 1 של הוא חיובי,
ולכן לפרבולה יש נקודת מינימום.
נמצא עבור אילו ערכי x מתקיים: $0 < x^2 - 4x$. כלומר , מתי הפרבולה
נמצאת מעל לציר ה־x. הפתרון הוא: $4 < x$ או $x < 0$ ולכן זהו תחום
ההגדרה של הפונקציה.



לסיום, האסימפטוטות האנכיות של פונקציית ה־ln
נמצאות בקצה תחום ההגדרה שלה,
ולכן עבור $f(x)$ הן יהיו: $x = 4$ ו־$x = 0$.

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית

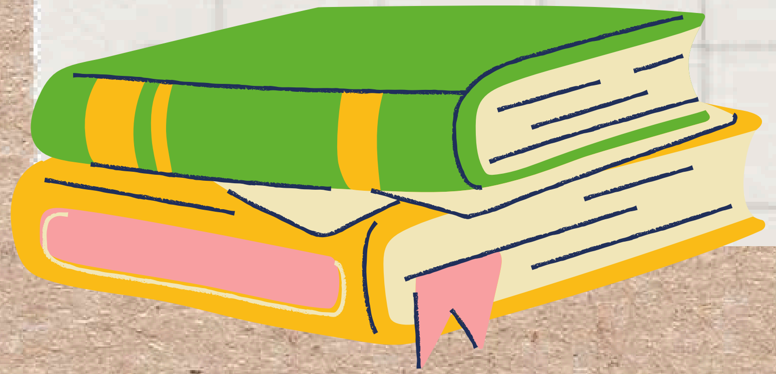
דוגמה: מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה: $f\left(x\right)=\frac{lnx}{x-5}$

פתרון: כדי למצוא את תחום ההגדרה עלינו לבצע שתי בדיקות:

הראשונה: נבדוק עבור אילו ערכי x הביטוי שבתוך הלוגריתם הוא חיובי.
נקבל: $0<x$.

השנייה: נבדוק עבור אילו ערכי x המכנה אינו מתאפס. נקבל: $x\neq 5$.

תחום ההגדרה כולל את כל ערכי x החיוביים מלבד 5,
ולכן הוא: $5<x$ או $0<x<5$.



כעת נוכל לפתור את תרגילים 9-12 בעמודים 207-208.

הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ומשוואת המשיק

נגזרת הפונקציה הלוגריתמית $f(x)=lnx$ היא $f'(x)=\frac{1}{x}$ עבור $0<x$.

כלומר: $(lnx)'=\frac{1}{x}$.

כאשר נגזור פונקציות בפרק זה ובהמשך, נסתמך על חוקי הגזירה שאנו מכירים:

נגזרת של **פונקציית חזקה**: $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$

נגזרת של פונקציה שהוכפלה ב**מספר קבוע**: $[k\cdot f(x)]'=k\cdot f'(x)$

נגזרת של **סכום והפרש** פונקציות: $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ומשוואת המשיק

דוגמאות:

הנגזרת של הפונקציה $f(x) = 3lnx + 5$

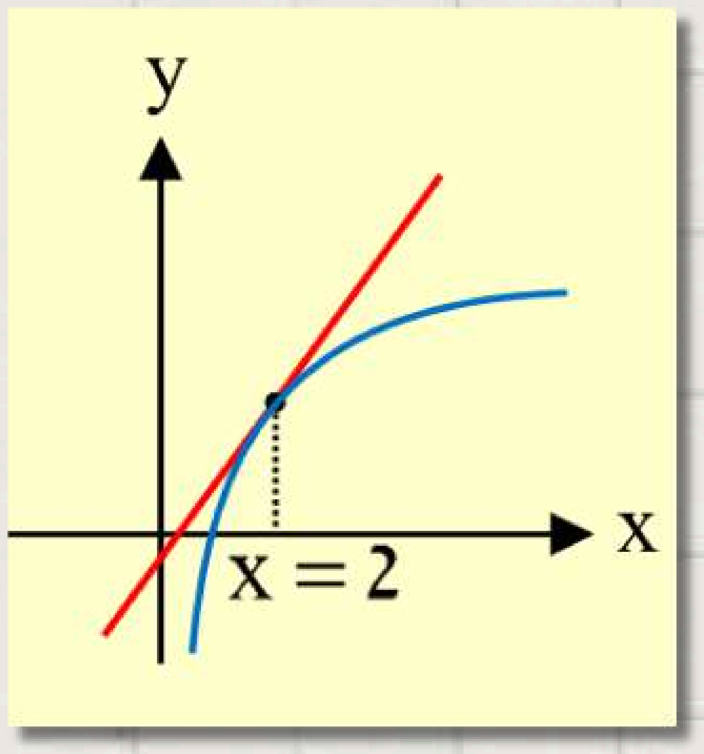
היא: $f'(x) = 3\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$.

הנגזרת של הפונקציה $g(x) = x^3 - 4lnx$

היא: $g'(x) = 3x^2 - 4\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2 - \frac{4}{x}$

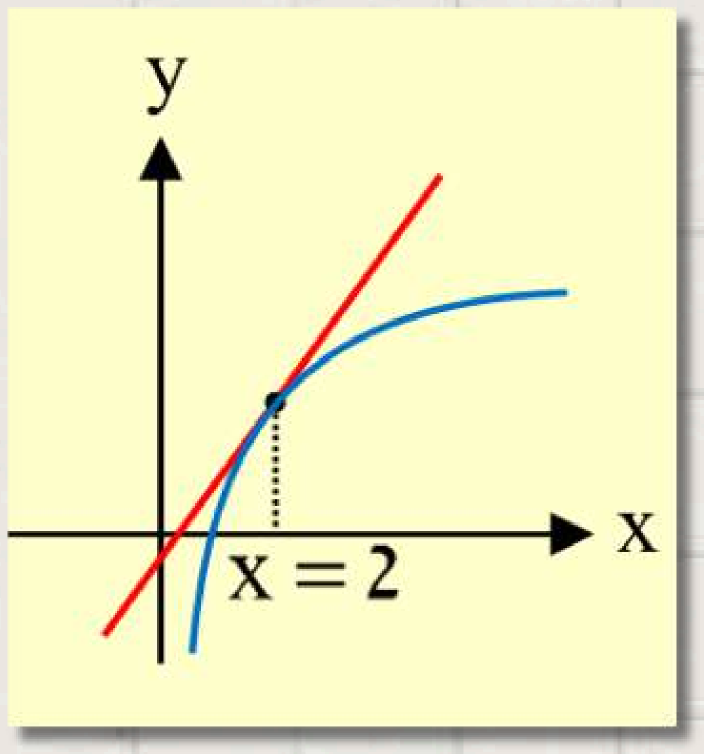
כעת נוכל לפתור את תרגיל 1 בעמוד 209.

הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ומשוואת המשיק



דוגמה: לפניכם גרף הפונקציה $f\left(x\right)=2lnx$. מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה ששיעור ה־x שלה הוא $x=2$.

הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ומשוואת המשיק



דוגמה: לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=2lnx$. מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה ששיעור ה־x שלה הוא $x=2$.

פתרון: נמצא את שיעורי נקודת ההשקה: $f(2)=2ln2$. נקבל: $(2,2ln2)$.נגזרת הפונקציה היא: $f'(x)=\frac{2}{x}$, והשיפוע בנקודת ההשקה הוא: $f'(2)=\frac{2}{2}=1$ לסיום, משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=2$ היא:

$$y-2ln2=1(x-2)\to y=x-2+2ln2\to y=x-0.614$$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 2-4 בעמוד 210.

הנגזרת של פונקציה מורכבת מהסוג $y=ln\left(f\left(x\right)\right)$

התבוננו בפונקציות הבאות: $g(x)=\ln(x+6)$, $h(x)=\ln(x^2+1)$, $k(x)=\ln(x-x^2)$. בשלושתן מופיעה פונקציה $f(x)$ כלשהי **בתוך** הלוגריתם. כאשר נרצה לגזור פונקציה מסוג זה, נתחשב **בנגזרת הפנימית** של הפונקציה $f(x)$ לפי הנוסחה: $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. הפונקציה $f(x)$ נמצאת **בתוך ln**.

לכן, תחום ההגדרה של הפונקציה $y=ln\left(f\left(x\right)\right)$ הוא כל ערכי ה־x שעבורם הפונקציה $f\left(x\right)$ מוגדרת וגם $0<f\left(x\right)$. נגזור את הפונקציות שהוצגו למעלה:

$$g'\left(x\right)=\frac{1}{x+6} \qquad h'\left(x\right)=\frac{2x}{x^2+1} \qquad k'\left(x\right)=\frac{1-2x}{x-x^2}$$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 5-8 בעמודים 210-211.

תזכורת! גזירת מכפלה של פונקציות

נתבון בפונקציה $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ שהיא מכפלת הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$. כפי שלמדנו, אם הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ ניתנות לגזירה אז נגזרת המכפלה היא: $h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$.

דוגמאות:

נגזור את הפונקציה $f(x)=x^2(lnx)$, ונקבל:

$$f'(x)=2x(lnx)+\frac{1}{x}\left(x^2\right)=2xlnx+x=x(2lnx+1)$$

נגזור את הפונקציה $f(x)=x(1-lnx)$, ונקבל:

$$f'(x)=1(1-lnx)+x\left(-\frac{1}{x}\right)=1-lnx-1=-lnx$$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 9-12 בעמוד 211.

תזכורת! גזירת מנה של פונקציות

נתבונן בפונקציה $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$, שהיא מנת הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$. כפי שלמדנו בעבר,

אם הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ ניתנות לגזירה אז נגזרת המנה היא: $h'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}$.

דוגמה: נגזור את הפונקציה $f(x)=\frac{lnx}{x^2}$, ונקבל:

$$f'(x)=\frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)-2xlnx}{\left(x^2\right)^2}=\frac{\cancel{x}-2\cancel{x}lnx}{x^{\cancel{4}\ 3}}=\frac{1-2lnx}{x^3}$$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 13-14 בעמוד 212.

תזכורת! גזירת פונקציה מורכבת

נתבונן בפונקציה $g(x)=[f(x)]^n$ שבה מעלים את הפונקציה $f(x)$ בחזקת n. כפי שלמדנו בעבר,

אם הפונקציה $f(x)$ ניתנת לגזירה אז הנגזרת היא: $g'(x)=n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$.

דוגמה: נגזור את הפונקציה $f(x)=ln^3(x)$:

$$f'(x)=3ln^2x\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}ln^2x$$

נגזור את הפונקציה $f(x)=(1-lnx)^3$:

$$f'(x)=3(1-lnx)^2\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{3}{x}(1-lnx)^2$$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 15-19 בעמודים 212-213.

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של פונקציה לוגריתמית

לפני שנעסוק במציאת שיעורי נקודות הקיצון, נפתור משוואות מהסוג שנידרש לפתור כאשר נשווה את הנגזרת ל־0.

דוגמה: פתרו את המשוואה: $x^2 lnx - 2x^2 = 0$

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של פונקציה לוגריתמית

לפני שנעסוק במציאת שיעורי נקודות הקיצון, נפתור משוואות מהסוג שנידרש לפתור כאשר נשווה את הנגזרת ל־0.

דוגמה: פתרו את המשוואה: $x^2lnx - 2x^2 = 0$

פתרון: נוציא את הגורם המשותף x^2 משני האגפים, ונקבל:

$x^2\left(lnx - 2\right) = 0$. התקבלה מכפלה של שני גורמים שערכה 0. כלומר, כל אחד משניהם עשוי להיות שווה ל־0. נקבל שתי משוואות:

הראשונה: $x^2 = 0 \rightarrow x = 0$.

השנייה: $lnx - 2 = 0 \rightarrow lnx = 2 \rightarrow x = e^2$.

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של פונקציה לוגריתמית

המשך פתרון:

עלינו לבדוק שהצבת הפתרונות $x = 0$ ו־ $x = e^2$ **במשוואה המקורית** אינה מובילה למספר אי־חיובי בתוך הלוגריתם. לאחר ההצבה נמצא שהערך $x = 0$ מאפס את הביטוי בתוך ה־ln, ולכן פתרון זה נפסל. לסיכום, פתרון המשוואה הוא: $x = e^2$.

כעת נוכל לפתור את תרגיל 20 בעמוד 214.

דוגמה: נתונה הפונקציה $f(x)=2\ln x-\ln^{2}x$. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

א. תחום ההגדרה. ב. שיעורי נקודת הקיצון וסוג הקיצון. ג. תחומי העלייה והירידה.

דוגמה: נתונה הפונקציה $f(x)=2\ln x-\ln^2 x$. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

א. תחום ההגדרה.
ב. שיעורי נקודת הקיצון וסוג הקיצון.
ג. תחומי העלייה והירידה.

פתרון:

א. הביטוי בתוך הלוגריתם מוכרח להיות חיובי, ולכן תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $0<x$.

דוגמה: נתונה הפונקציה $f(x)=2\ln x-\ln^2 x$. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

א. תחום ההגדרה. ב. שיעורי נקודת הקיצון וסוג הקיצון. ג. תחומי העלייה והירידה.

ב. הנגזרת של $f(x)$ היא: $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}$. נשווה את הנגזרת ל־0, ונקבל:

$$f'(x)=0 \rightarrow \frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}=0 \rightarrow \frac{2}{x}=\frac{2\ln x}{x} \rightarrow 2=2\ln x \rightarrow 1=\ln x \rightarrow x=e^1 \rightarrow x=e$$

כעת נציב את שיעור ה־x שמצאנו ואת קצה תחום ההגדרה בטבלת עלייה וירידה:

תחום ערכי x	$x=0$	$0<x<e$	$x=e$	$e<x$
סימן הנגזרת		+	0	-
עלייה/ירידה של הפונקציה		↗	max	↘

לכן נסיק שהנקודה שמצאנו היא קיצון מסוג **מקסימום**.

כעת נציב $x=e$ בפונקציה $f(x)$, ונמצא את שיעור ה־y: $f(e)=2\ln e-\ln^2 e=2\cdot 1-1^2=2-1=1$.

לכן לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון יחידה, והיא: $max(e\ ,\ 1)$.

דוגמה: נתונה הפונקציה $f(x)=2\ln x-\ln^2 x$. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

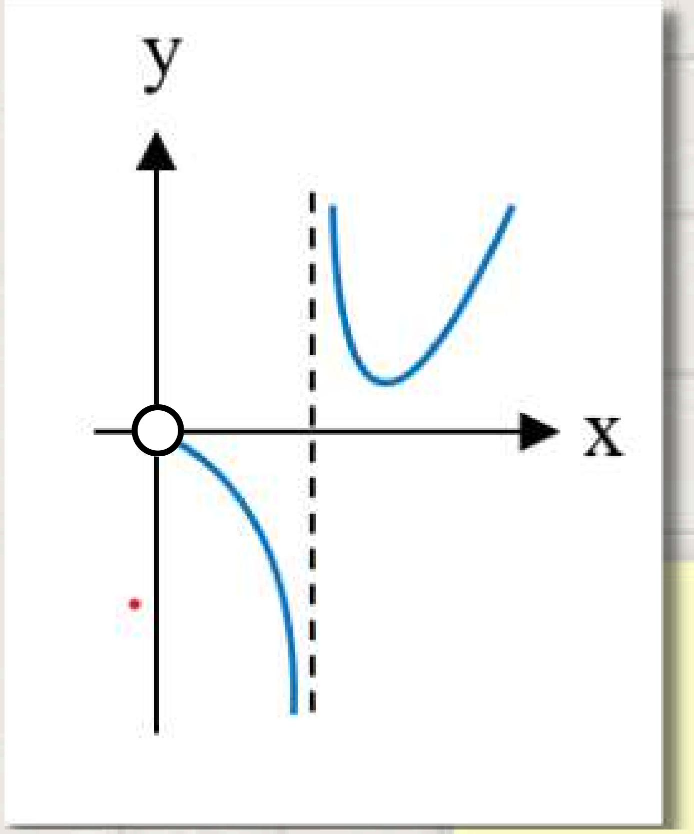
א. תחום ההגדרה.   ב. שיעורי נקודת הקיצון וסוג הקיצון.   ג. תחומי העלייה והירידה.

ג. מהטבלה שבנינו ניתן להסיק גם על **תחומי העלייה והירידה** של הפונקציה $f(x)$:

הפונקציה עולה בתחום $0<x<e$ ויורדת בתחום $e<x$.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 21-33 בעמודים 215-218.

המקרה המיוחד של "חור" בגרף הפונקציה

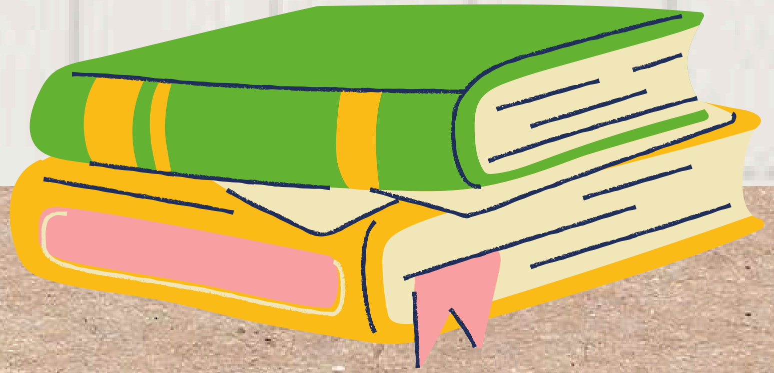


נתבונן בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2}{2lnx-1}$.

הפונקציה אינה מוגדרת כאשר $x=\sqrt{e}$, והאסימפטוטה האנכית שלה היא $x=\sqrt{e}$.
הפונקציה גם אינה מוגדרת בתחום $x<0$, אך **אין לה אסימפטוטה אנכית** כאשר $x=0$.
נשים לב שבתחום $0<x<\sqrt{e}$, ככל שערכי ה־x הולכים וקטנים, ומתקרבים לערך $x=0$, ערכי ה־y הולכים ומתקרבים לערך $y=0$. למעשה, גרף הפונקציה הולך ומתקרב לראשית הצירים, אך אינו מגיע אליה. מבחינה גרפית נראה שיש "חור" בגרף, והוא נקרא 'נקודת אי־רציפות סליקה'.
איננו נדרשים למצוא נקודות מסוג זה. כאשר הן קיימות בפונקציה, הן יופיעו בשרטוט נתון.

שימו לב!

שאלות סיכום בנושא חקירה מלאה של פונקציה לוגריתמית מופיעות בעמודים 221-234.



למרחב ההוראה
לחצו כאן

במרחב ההוראה מאות דפי תרגול, וביניהם בחינות מתכונת. המרחב מיועד לצוותי הוראה במוסדות לימוד אשר רכשו את הספר.

למי לפנות?

לשאלות לארכימדס:

במספר 050-9074007 של הוצאת ארכימדס

להזמנות מרוכזות - פונים ל-"יש הפצות":

טלפון 03-5595354 או וואטסאפ 054-7154211