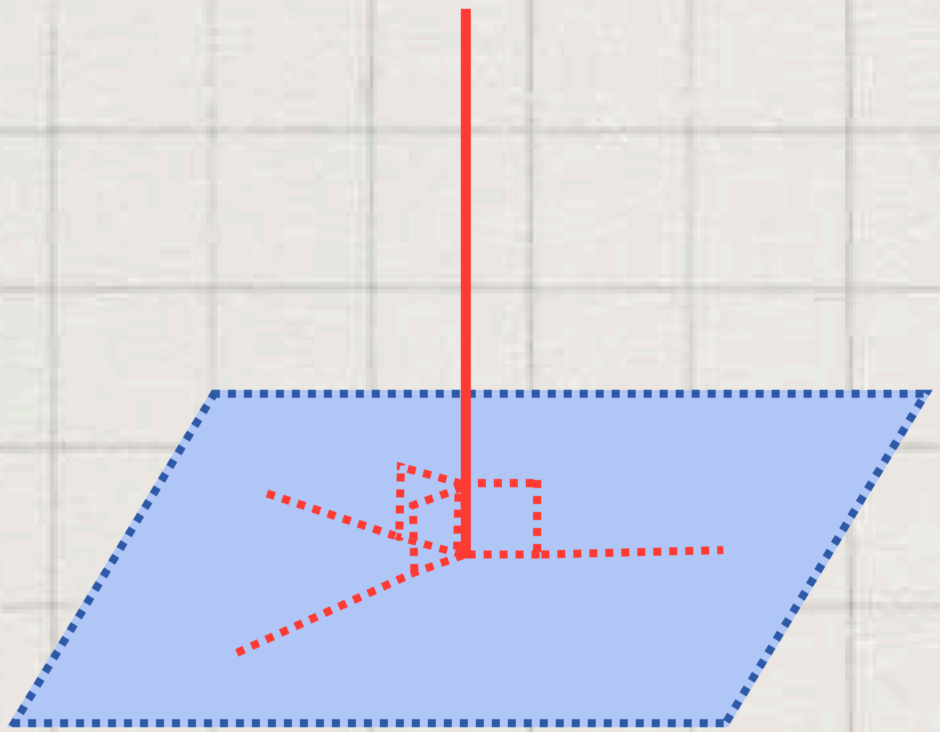
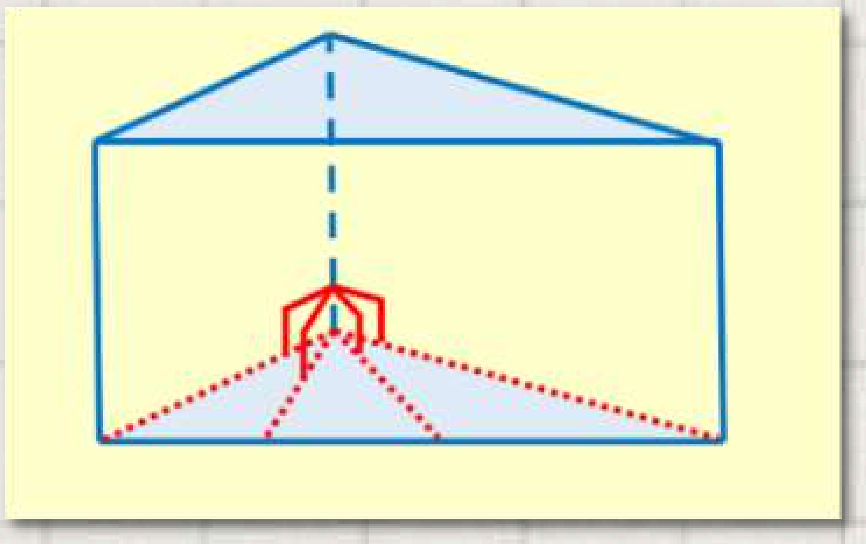

ארכימדס
אסף לוי
בכיוון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472
כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק ב'
הוצאת ארכימדס
שאלון 472
הווקטור הגיאומטרי
וקטור ניצב למישור

הוצאת ארכימדס
שאלון 472

הווקטור הגיאומטרי
וקטור ניצב למישור

ישר ניצב למישור





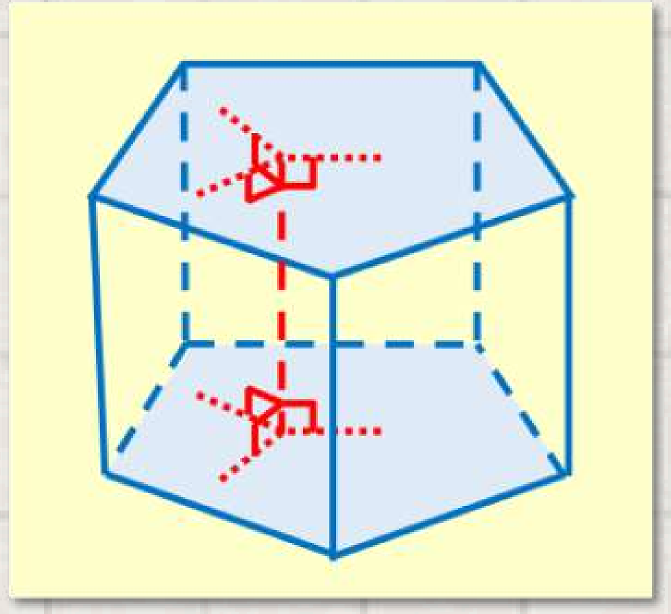
נתבונן בשרטוט משמאל. הישר l מאונך למישור אם הוא מאונך לכל הישרים המוכלים במישור, ורק במקרה זה. הישר l נקרא גם "**ניצב למישור**". דוגמה לכך מהמציאות היא עמוד חשמל הניצב למדרכה.

במנסרה ישרה מקצועות הצד ניצבים לבסיסים, כפי שניתן לראות בשרטוט משמאל. למעשה, מקצועות הצד מאונכים לכל הישרים המוכלים במישורים של בסיסי המנסרה.

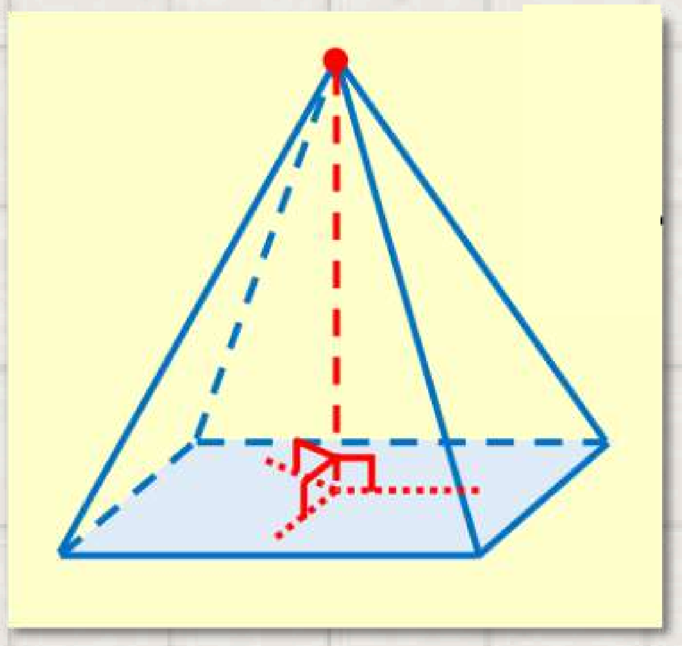
ישר ניצב למישור

בתחילת הנושא עסקנו בגבהים של צורות תלת-מימדיות , נזכיר זאת:

גובה המנסרה הוא קטע המחבר בין שני בסיסיה ומאונך להם.

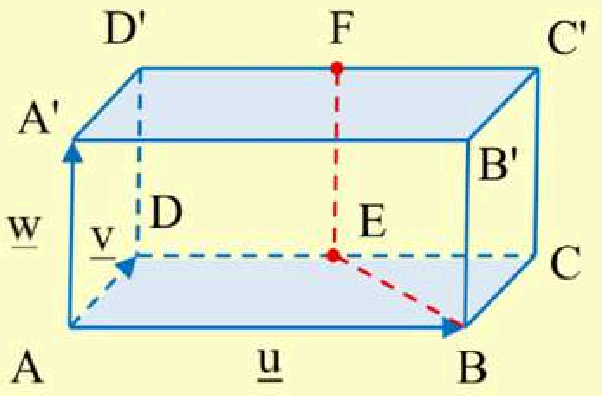


גובה הפירמידה הוא קטע המחבר בין קודקוד הראש של פירמידה לבין הבסיס ומאונך לו.



ישר ניצב למישור

דוגמה: בתיבה שלפניכם נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.



הנקודה F היא אמצע המקצוע C'D'.

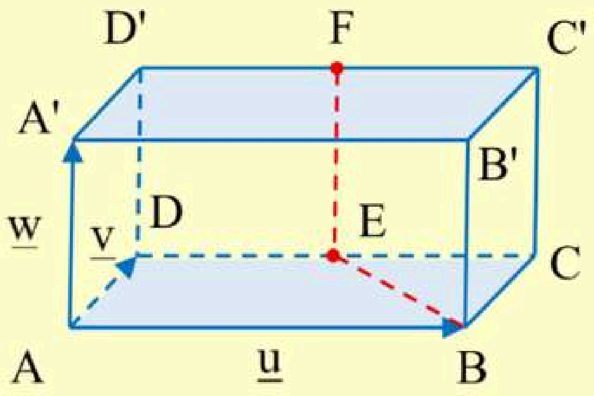
הנקודה E נמצאת על המקצוע CD כך ש: $\overrightarrow{BE}=\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{u}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־$\underline{w}$, במידת הצורך, את הווקטור $\overrightarrow{EF}$.

ב. האם הווקטור $\overrightarrow{EF}$ ניצב לבסיס ABCD? הסבירו.

ישר ניצב למישור

דוגמה: בתיבה שלפניכם נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.



הנקודה F היא אמצע המקצוע C'D'.

הנקודה E נמצאת על המקצוע CD כך ש: $\overrightarrow{BE}=\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{u}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־$\underline{w}$, במידת הצורך, את הווקטור $\overrightarrow{EF}$.

ב. האם הווקטור $\overrightarrow{EF}$ ניצב לבסיס ABCD? הסבירו.

פתרון:

א. פאות התיבה הן מלבנים, ולכן מתקיים: $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

ו־ $\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\underline{u}$. לכן נוכל לבטא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ באופן הבא:

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'F}=(-\overrightarrow{BE})+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}+\frac{1}{2}\cdot(-\overrightarrow{D'C'})$$

$$=-(\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{u})+\underline{v}+\underline{w}-\frac{1}{2}\underline{u}=-\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}-\frac{1}{2}\underline{u}=\underline{w}$$

ב. כן. בסעיף א' מצאנו שמתקיים: $\overrightarrow{EF}=\underline{w}=\overrightarrow{AA'}$. בתיבה הנתונה מקצוע הצד AA' מאונך לבסיס ABCD, ומהשוויון $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AA'}$ נוכל להסיק שגם הווקטור $\overrightarrow{EF}$ מאונך לבסיס ABCD.

ישר ניצב למישור

למדנו שהישר l ניצב (מאונך) למישור אם הוא מאונך לכל הישרים המוכלים במישור, ורק במקרה זה. כאשר נרצה לבדוק אם הווקטור $\underline{w}$ מאונך למישור, לכאורה עומדת בפנינו בעיה:

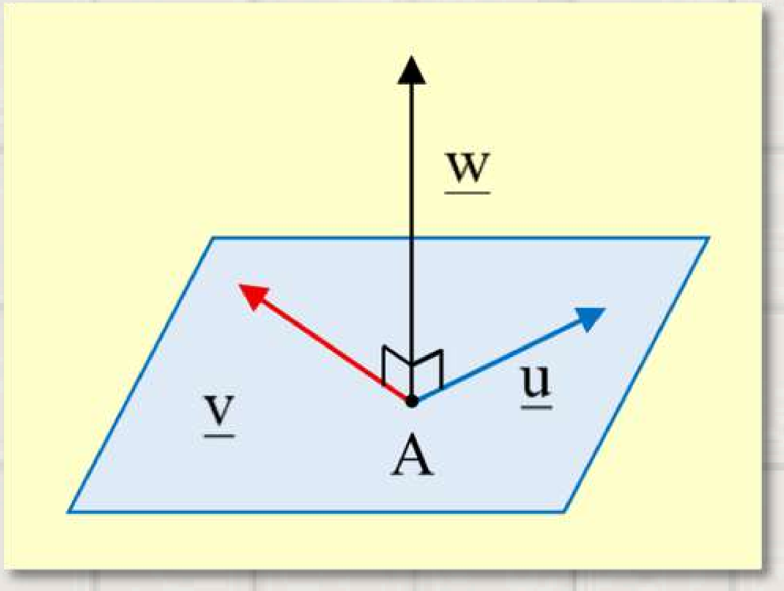
אם נמצאים במישור אינסוף וקטורים בעלי אורך וכיוונים שונים -

כיצד נבדוק אם הווקטור $\underline{w}$ מאונך לאינסוף וקטורים?

ישר ניצב למישור

עלינו למצוא תנאי מספיק, שאם נוודא שהוא מתקיים, נוכל להוכיח שהווקטור $\underline{w}$ מאונך למישור.תחילה נזכיר שכל שני וקטורים שאינם קוליניאריים, הנמצאים על מישור כלשהו, קובעים את אותו מישור. נתונים הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שאינם קוליניאריים הקובעים את המישור המופיע משמאל. בשרטוט נקודת המוצא של הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ היא הנקודה A. זו גם נקודת המוצא של הווקטור w אשר מאונך לכל אחד מהווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$. כלומר $\underline{w}\perp\underline{u}$, וגם $\underline{w}\perp\underline{v}$.

מכך נוכל להסיק ש: $\underline{w}\cdot\underline{u}=0$ וגם $\underline{w}\cdot\underline{v}=0$.



ישר ניצב למישור

נזכיר שכאשר נתונים וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ וסקלרים t ו-s, הווקטור $\underline{a}=t\cdot\underline{u}+s\cdot\underline{v}$ הוא צירוף ליניארי של הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$. למדנו שאינסוף הווקטורים במישור הנקבע על ידי הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$, הם צירופים ליניאריים מהסוג $\underline{a}=t\cdot\underline{u}+s\cdot\underline{v}$. נחשב כעת את המכפלה הסקלארית $\underline{w}\cdot\underline{a}$:

$$\underline{w}\cdot\underline{a}=\underline{w}(t\cdot\underline{u}+s\cdot\underline{v})=t\cdot\underline{u}\cdot\underline{w}+s\cdot\underline{v}\cdot\underline{w}= t\cdot 0 +t\cdot 0=0$$

ישר ניצב למישור

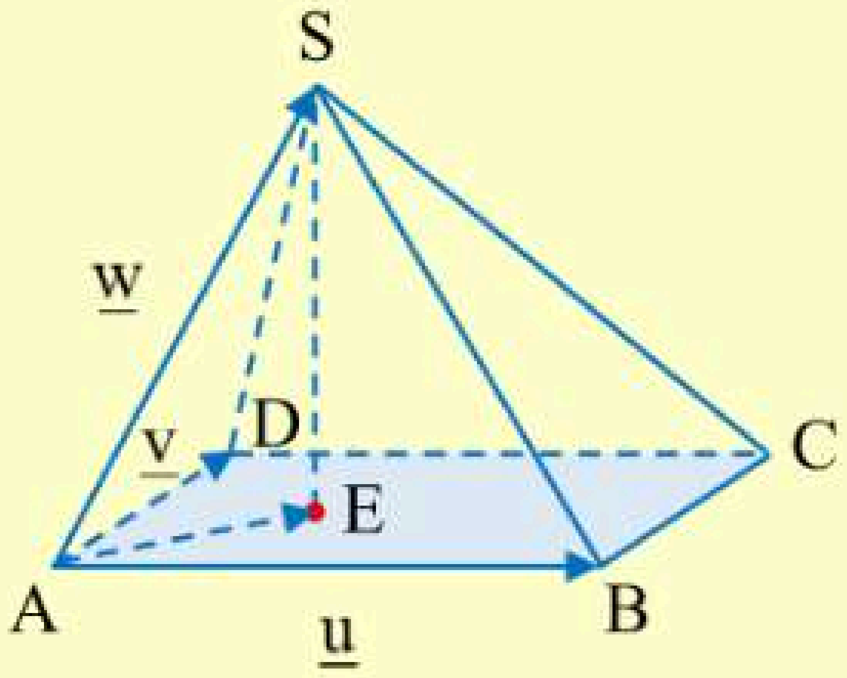
קיבלנו ש: $\underline{w}\cdot\underline{a}=0$, ומכך ניתן להסיק שהווקטור w מאונך לווקטור $\underline{a}$.
כלומר, הווקטור $\underline{w}$ מאונך **לכל צירוף ליניארי** של הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ שאינם קוליניאריים. במילים אחרות, הווקטור $\underline{w}$ מאונך לכל אחד מאינסוף הווקטורים הנמצאים במישור שנקבע על ידי הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$.
לסיכום, כדי להראות שווקטור ניצב למישור כלשהו, עלינו להראות שהווקטור מאונך **לשני וקטורים לא קוליניאריים** שנמצאים על מישור זה.
במילים אחרות, עלינו להראות שהווקטור מאונך לשני וקטורים הנמצאים על אותו המישור, ואינם מונחים על ישרים מקבילים או על אותו ישר.

ישר ניצב למישור

דוגמה: בפירמידה SABCD שלפניכם הבסיס ABCD הוא מלבן, וקודקוד הראש הוא S.

נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.

הנקודה E נמצאת על הבסיס ABCD כך ש: $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{4}\underline{u}$.



א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו־$\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{SE}$.

ב. נתון: $|\underline{v}|=2$, $|\underline{u}|=4$, $\underline{w}\cdot\underline{v}=2$, $\underline{w}\cdot\underline{u}=4$.

הוכיחו שהווקטור $\overrightarrow{SE}$ מאונך למישור הבסיס ABCD.

ישר ניצב למישור

פתרון:

א. נבטא את הווקטור $\overrightarrow{SE}$ באופן הבא: $\overrightarrow{SE}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AE}=-\underline{w}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{4}\underline{u}$.

ב. נראה שהווקטור $\overrightarrow{SE}$ מאונך לשני הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו־$\overrightarrow{AD}$ הנמצאים במישור הבסיס ABCD **ושאינם קוליניאריים**, ומכך נוכל להסיק שהוא מאונך למישור הבסיס כולו. נתון שהבסיס הוא מלבן, ולכן הווקטורים $\underline{u}$ ו־$\underline{v}$ מאונכים זה לזה, לפיכך המכפלה הסקלרית שלהם שווה ל־0.

נחשב כעת את שתי המכפלות הסקלריות הבאות:

$$\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{AB}=(-\underline{w}+\tfrac{1}{2}\underline{v}+\tfrac{1}{4}\underline{u})\cdot\underline{u}=-\underline{w}\cdot\underline{u}+\tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{u}+\tfrac{1}{4}\underline{u}\cdot\underline{u}=-4+\tfrac{1}{2}\cdot0+\tfrac{1}{4}\cdot4^2=-4+4=0.$$

$$\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{AD}=(-\underline{w}+\tfrac{1}{2}\underline{v}+\tfrac{1}{4}\underline{u})\cdot\underline{v}=-\underline{w}\cdot\underline{v}+\tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v}+\tfrac{1}{4}\underline{u}\cdot\underline{v}=-2+\tfrac{1}{2}\cdot2^2+\tfrac{1}{4}\cdot0=-2+2=0.$$

מצאנו ששתי המכפלות שוות ל־0, ולכן הווקטור $\overrightarrow{SE}$ מאונך ל־$\overrightarrow{AB}$ וגם ל־$\overrightarrow{AD}$ שאינם קולינאריים.

מכך נובע שהווקטור $\overrightarrow{SE}$ מאונך למישור הבסיס ABCD כולו.

לאחר ההסברים, המצגת מפנה לתרגול בכרך ב׳ של הספר בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472:

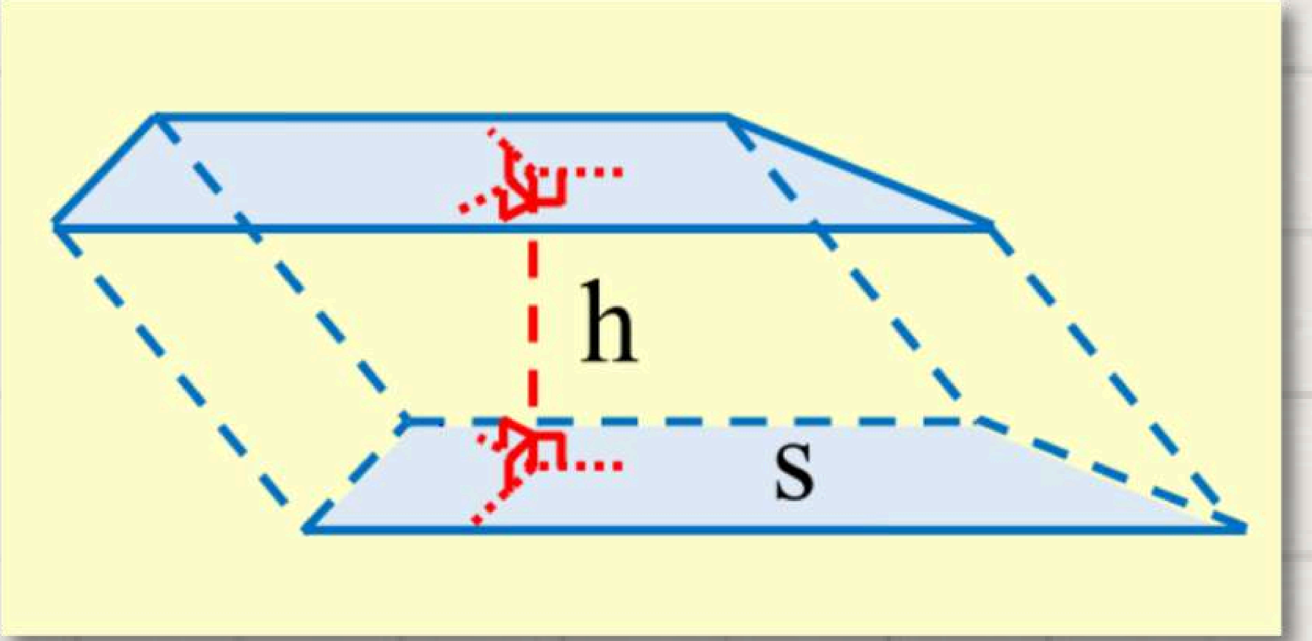
כעת נוכל לפתור את תרגיל 2-1 בעמודים 76-75.

חישוב נפח של צורות תלת-מימדיות

במהלך לימודי המתמטיקה למדנו כיצד לחשב נפח של צורות תלת-ממדיות. תחילה נזכיר שנפח מסומן בעזרת האות V שמקורה במילה האנגלית Volume שמשמעותה 'נפח'.

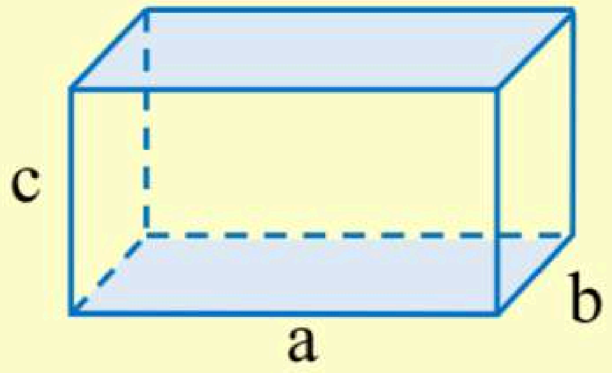
בכל מנסרה ניתן לחשב את הנפח על ידי הכפלת שטח הבסיס S בגובה המנסרה h.

הנוסחה: $V=S \cdot h$.

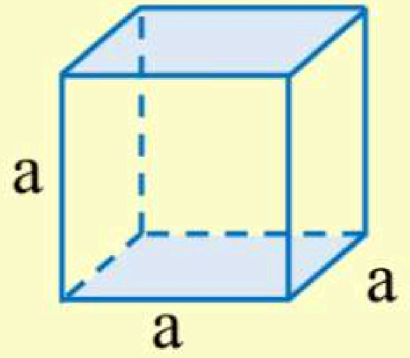


חישוב נפח של צורות תלת-מימדיות

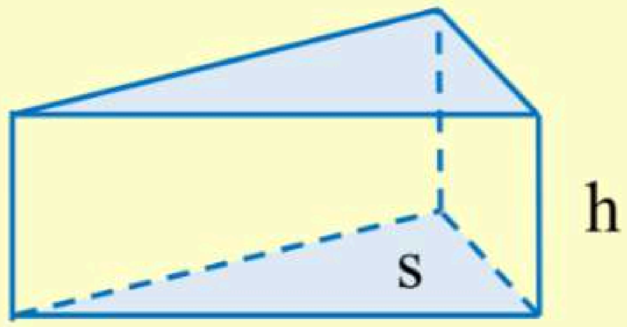
בעבר למדנו כיצד לחשב נפח של שלוש מנסרות ישרות:



נפח **התיבה**: $V = a \cdot b \cdot c$



נפח **הקובייה**: $V = a^3$



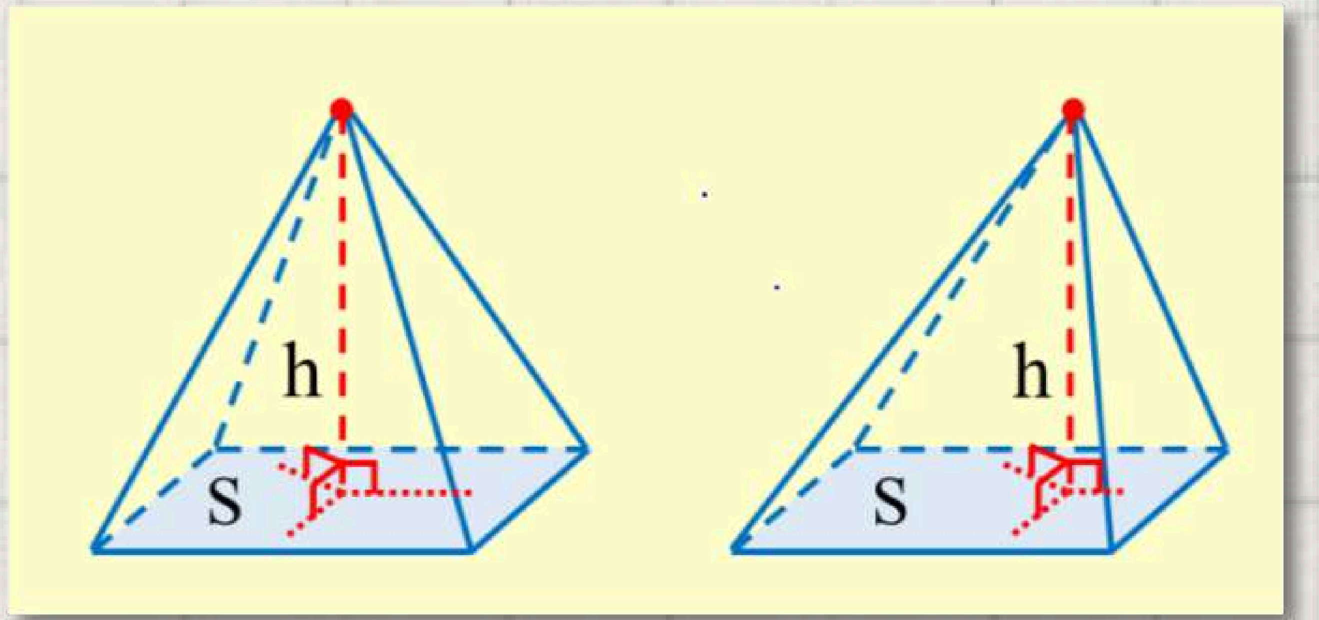
נפח **המנסרה הישרה המשולשת**: $V = h \cdot S$

.

חישוב נפח של צורות תלת-מימדיות

הנפח של פירמידה, ללא קשר לצורת הבסיס וללא קשר להיותה ישרה או לא, שווה לשליש מכפלת שטח הבסיס S בגובה הפירמידה h.

הנוסחה לחישוב הנפח: $V=\frac{1}{3}h\cdot S$.

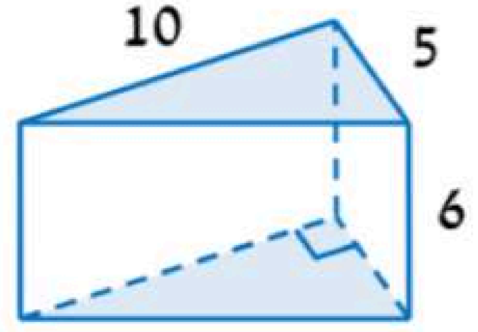


כעת נוכל לפתור את תרגיל 3 בעמוד 76.

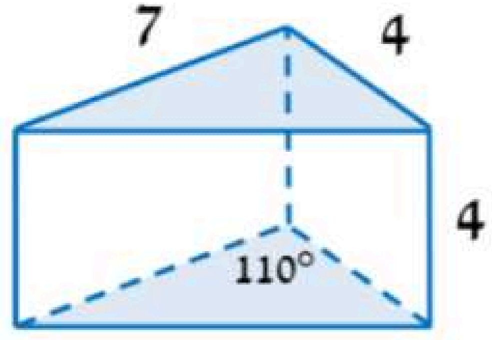
המכפלה הסקלרית

4. לפניכם מנסרות ישרות משולשות. חשבו את הנפח שלהן:

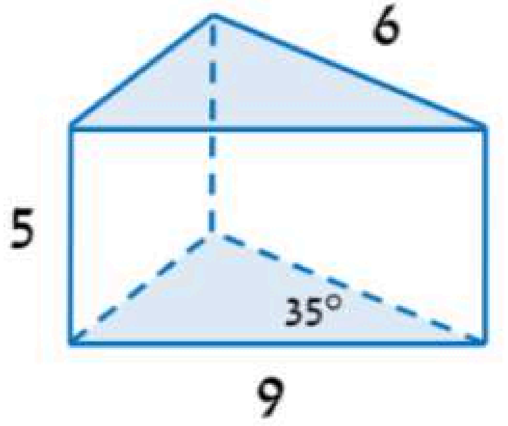
א.



ב.

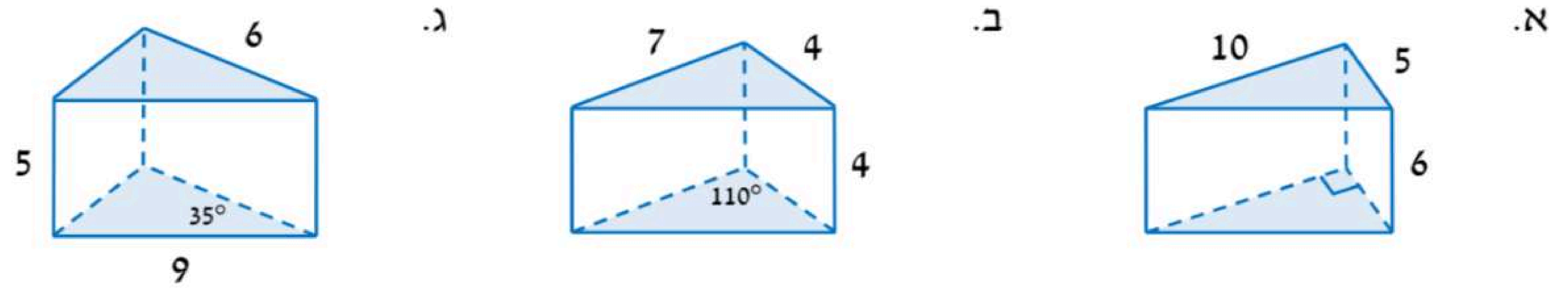


ג.



המכפלה הסקלרית

4. לפניכם מנסרות ישרות משולשות. חשבו את הנפח שלהן:

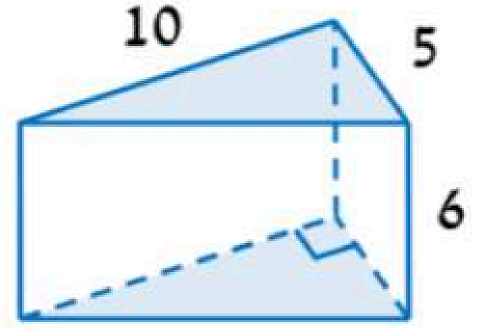


תשובות: א.150.

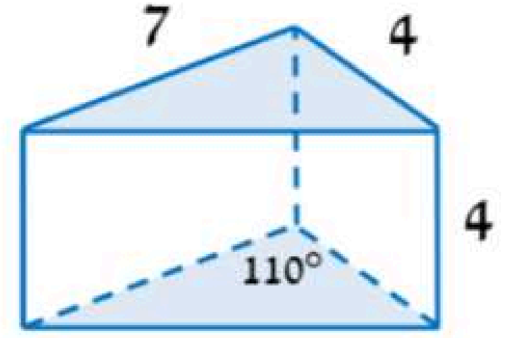
המכפלה הסקלרית

4. לפניכם מנסרות ישרות משולשות. חשבו את הנפח שלהן:

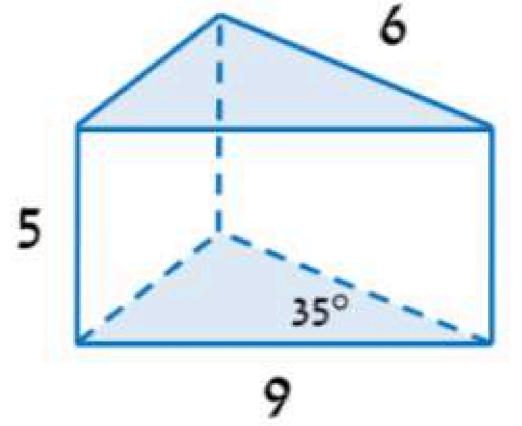
א.



ב.



ג.

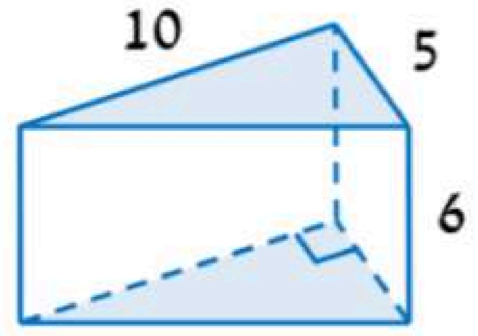


תשובות: א. 150. **ב.** 52.62.

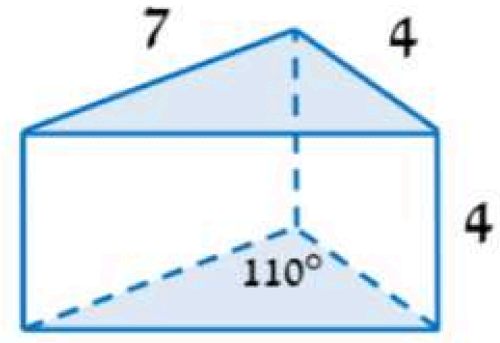
המכפלה הסקלרית

4. לפניכם מנסרות ישרות משולשות. חשבו את הנפח שלהן:

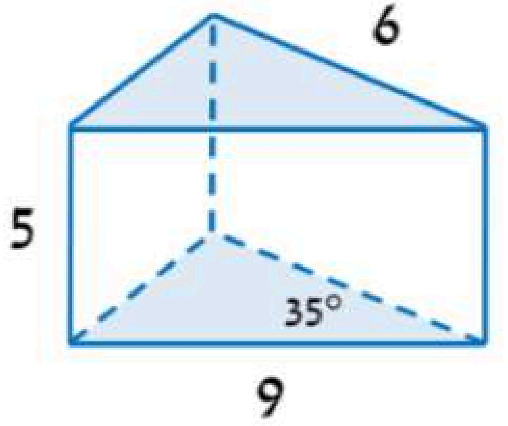
א.



ב.



ג.



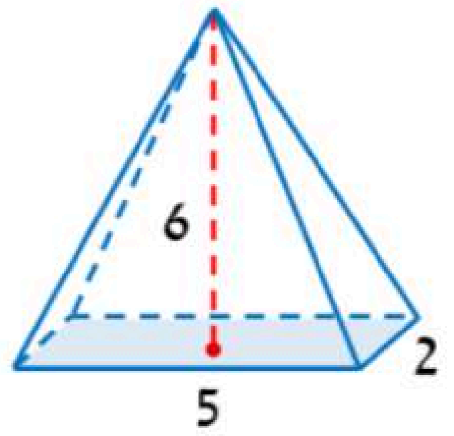
תשובות: א. 150. **ב.** 52.62. **ג.** 77.43.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 5-7 בעמודים 77-78.

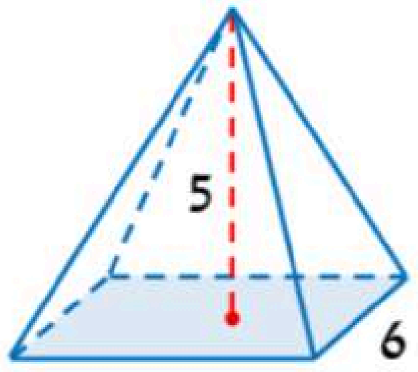
חישוב נפח של צורות תלת-מימדיות

8. לפניכם פירמידות שבהן הגובה לבסיס מסומן באדום. היעזרו בנתונים, וחשבו את נפח הפירמידה:

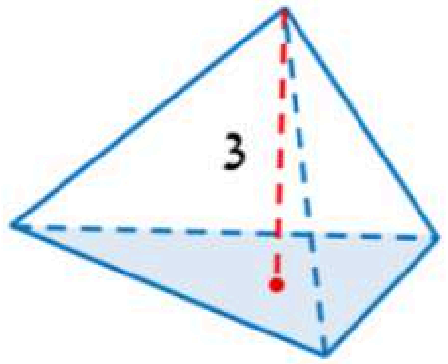
א. בסיס הפירמידה מלבן.



ב. בסיס הפירמידה ריבוע.



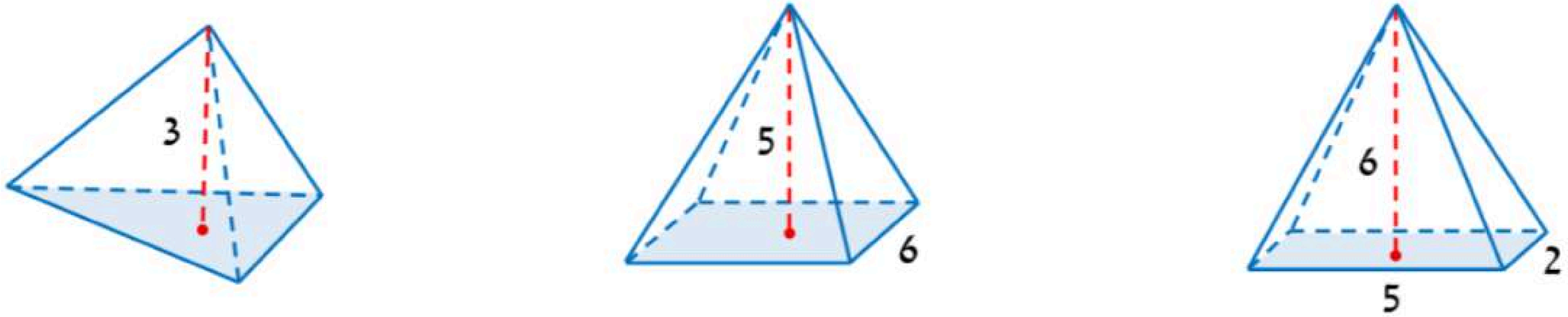
ג. שטח בסיס הפירמידה 7.



חישוב נפח של צורות תלת-מימדיות

8. לפניכם פירמידות שבהן הגובה לבסיס מסומן באדום. היעזרו בנתונים, וחשבו את נפח הפירמידה :

א. בסיס הפירמידה מלבן.   ב. בסיס הפירמידה ריבוע.   ג. שטח בסיס הפירמידה 7.

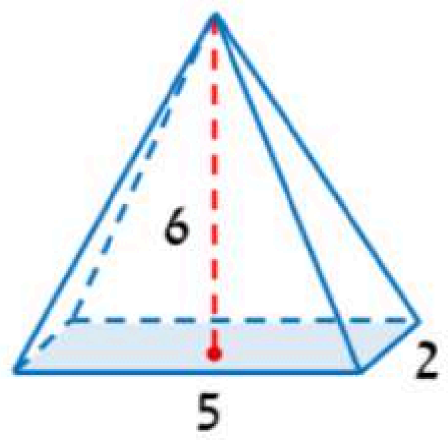


תשובות: א.20.

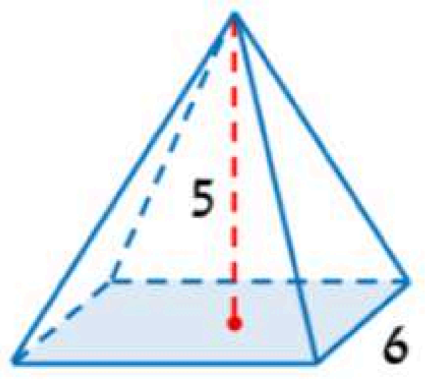
חישוב נפח של צורות תלת-מימדיות

8. לפניכם פירמידות שבהן הגובה לבסיס מסומן באדום. היעזרו בנתונים, וחשבו את נפח הפירמידה:

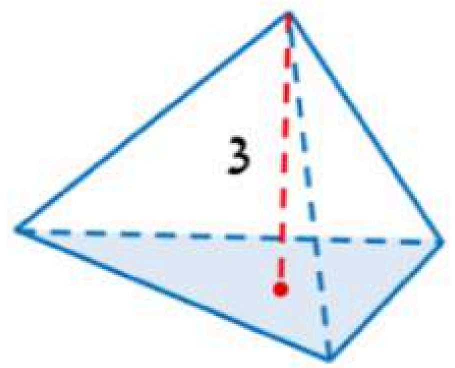
א. בסיס הפירמידה מלבן.



ב. בסיס הפירמידה ריבוע.



ג. שטח בסיס הפירמידה 7.

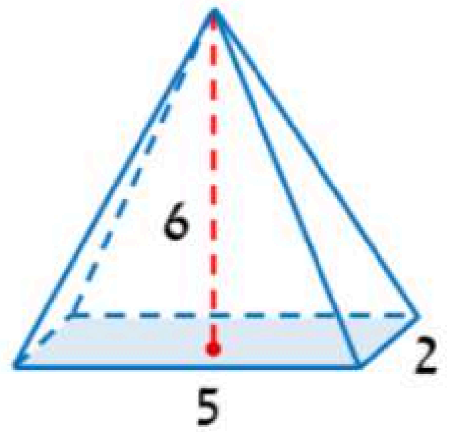


תשובות: א.20. **ב.**60.

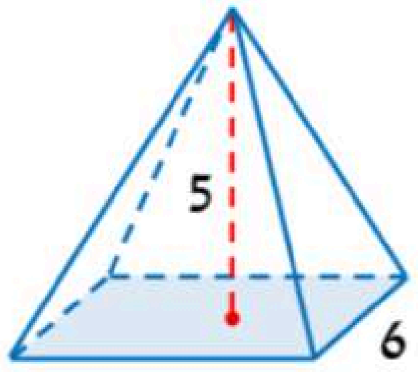
חישוב נפח של צורות תלת-מימדיות

8. לפניכם פירמידות שבהן הגובה לבסיס מסומן באדום. היעזרו בנתונים, וחשבו את נפח הפירמידה:

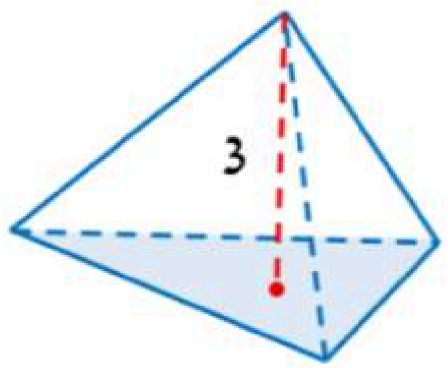
א. בסיס הפירמידה מלבן.



ב. בסיס הפירמידה ריבוע.

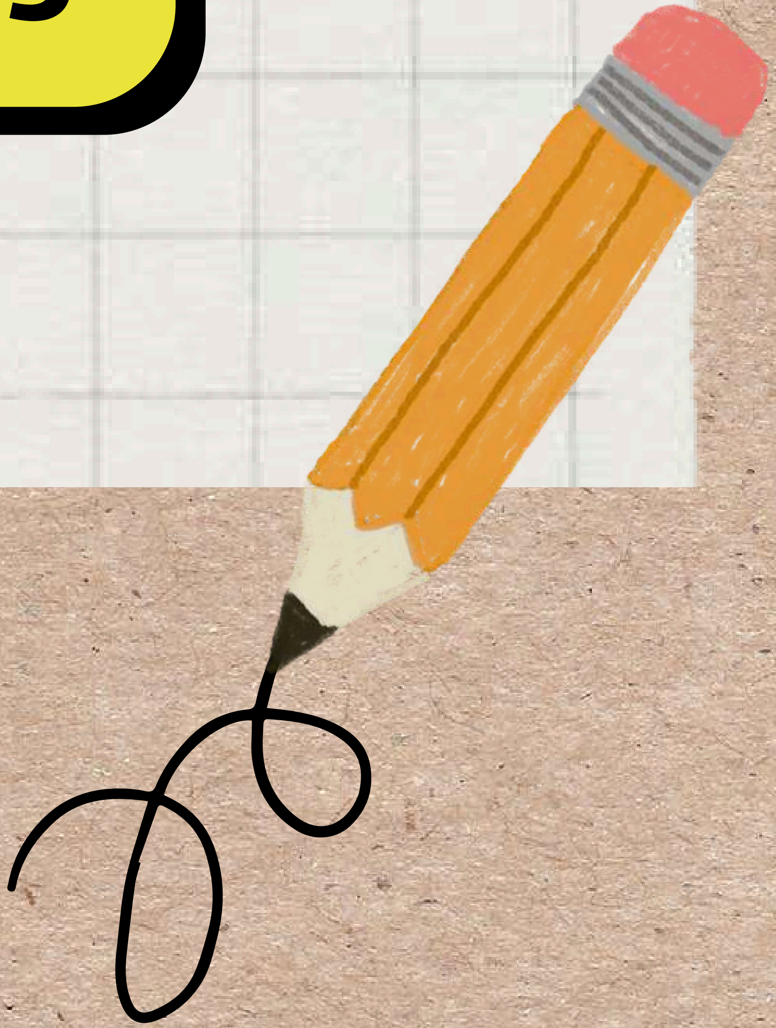


ג. שטח בסיס הפירמידה 7.



תשובות: א.20. **ב.**60. **ג.**7.

כעת נוכל לפתור את תרגיל 9 בעמוד 78.



תרגילים לסיכום הנושא מופיעים בעמודים 80-84.

למרחב ההוראה
לחצו כאן

במרחב ההוראה מאות דפי תרגול, ובינהם בחינות מתכונת. המרחב מיועד לצוותי הוראה במוסדות לימוד אשר רכשו את הספר.

למי לפנות?

לשאלות לארכימדס:

במספר 050-9074007 של הוצאת ארכימדס

להזמנות מרוכזות - פונים ל-"יש הפצות":

טלפון 03-5595354 או ווטסאפ 054-7154211