

שאלון 581 - מבחן אתגר 1

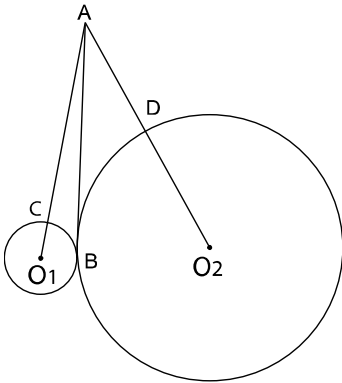
התרגילים במבחן זה קשים מהרגיל ומטרתם לאתגר את התלמידים המתקדמים ולשפר את ההבנה והיכולת האלגברית שלהם לקראת הבחינות: "קשה באימונים - קל בקרב!"

באתר הוצאת ארכימדס ניתן להוריד את הפתרון המלא כולל הדרך לפתרון

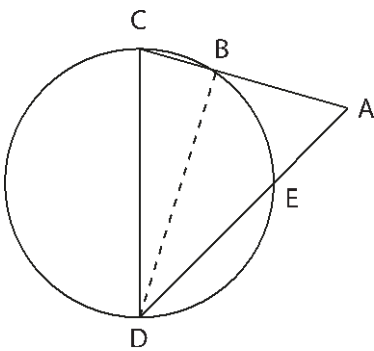
**פרק ראשון - אלגברה והסתברות (40 נק')**  
ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נק')

- שלושה רוכבי אופניים יצאו לדרך בו זמנית: שניים מ-A לכיוון B ואחד מ-B לכיוון A. הרוכב מ-B פגש את הרוכב המהיר מ-A במרחק 40 ק"מ מ-A ואת האיטי במרחק 25 ק"מ מ-A. בעת הפגישה הראשונה המרחק בין שני הרוכבים מ-A היה 20 ק"מ. חשב את המרחק בין A ל-B.
- הסדרה  $a_n$  היא הנדסית אינסופית מתכנסת שאיבריה חיוביים. מהסדרה  $a_n$  מרכיבים שתי סדרות חדשות שהאיברים הכלליים שלהן הם:  $b_n = a_{n+1} \cdot a_{n+3}$  ו:  $c_n = (a_n)^2$ .
  - הוכח ששתי הסדרות החדשות,  $b_n$  ו- $c_n$ , גם הן סדרות הנדסיות אינסופיות מתכנסות.
  - נתון: סכום הסדרה  $c_n$  גדול פי-16 מסכום הסדרה  $b_n$ . מצא את מנת הסדרה המקורית  $a_n$ .
  - למרות שהסדרה  $a_n$  היא אינסופית, תלמיד עובר על האיברים החל מהראשון והלאה וברגע שהגיע לאיבר מסוים שמיקומו אי זוגי, הוא מחליט למחוק את כל האיברים הקטנים מאיבר זה. בסדרת האיברים שלא נמחקו, האיבר הראשון גדול פי ארבעה מהאיבר האמצעי. מצא כמה איברים בסדרת האיברים שלא נמחקו.
- ההסתברויות שדן ושי יסיימו בהצלחה מקצה בודד של ריצה הן  $p$  ו- $q$  בהתאמה. ההסתברות שדן יסיים בהצלחה בדיוק ארבעה מקצים מתוך שבעה, קטנה פי שלושה מההסתברות שיסיים בהצלחה בדיוק שלושה מקצים מתוך השבעה. ההסתברות ששי יסיים בהצלחה שני מקצים מתוך שישה גבוהה פי 20 מההסתברות ששי יסיים בהצלחה חמישה מקצים מתוך שישה.
  - מצא את ערכם של הפרמטרים  $p$  ו- $q$  וקבע מי מבין השניים הוא אצן מוכשר יותר.
  - כדי להחליט מי מהשניים ישלח לייצג את התיכון באליפות העירונית בה מתקיים מקצה אחד של ריצה, הוחלט להטיל קוביה. הנעלם  $x$  מייצג את אחת הספרות המופיעות על גבי הקוביה. אם בהטלת הקוביה יתקבלו הספרה  $x$  או הספרות הנמוכות ממנה, יישלח לתחרות המועמד המוכשר יותר מבין השניים. באליפות העירונית, המועמד הנבחר עשוי לסיים בהצלחה את מקצה הריצה או להיכשל בו. ההסתברות שהמועמד שיבחר יסיים את המקצה בהצלחה, נמוכה ב- $\frac{7}{18}$  מההסתברות שיכשל. מצא את ערכו של  $x$ .

**פרק שני - גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נק')**  
ענה על אחת מהשאלות 4-5 (לכל שאלה 20 נק')



4. שני מעגלים שמרכזיהם  $O_1$  ו- $O_2$  משיקים זה לזה בנקודה B. הישרים  $AO_1$  ו- $AO_2$  חותכים את המעגלים בנקודות C ו-D בהתאמה כמתואר בשרטוט. שטח המעגל שמרכזו  $O_2$  גדול פי 25 משטח המעגל שמרכזו  $O_1$ . נסמן את רדיוס המעגל  $O_1$  בתור  $x$ . נתון:  $AC = 2AD$ . הישר AB משיק למעגלים.
- הבע בעזרת  $x$  את אורכי הקטעים AD ו-AC.
  - המשך הרדיוס  $DO_2$  חותך את המעגל בנקודה M. המשך הרדיוס  $CO_1$  חותך את המעגל בנקודה N. שטח המרובע CDMN הוא 40 סמ"ר. חשב את שטח המשולש  $\triangle ACD$ .
  - הוכח שניתן לחסום במעגל את המרובע CDMN.

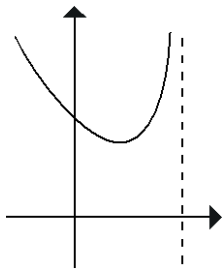


5. המשכי המיתרים BC ו-DE של המעגל המופיע בשרטוט, נחתכים בנקודה A הנמצאת מחוץ למעגל. נתון:  $AE = BC$ ,  $DE = 2.5AB$ . במרובע BCDE חסום מעגל שאינו מופיע בשרטוט.
- חשב את היחס:  $\frac{CD}{AE}$ .
  - קבע האם יתכן שהישר BD הוא קוטר במעגל המופיע בשרטוט. נמק.
  - נתון: שטח המשולש  $\triangle ABD$  הוא 72 סמ"ר. חשב את שטח המרובע BCDE.
  - נסמן את רדיוס המעגל המופיע בשרטוט באמצעות  $R_1$  ואת רדיוס החוסם את המשולש  $\triangle ABD$  באמצעות  $R_2$ . חשב את היחס:  $\frac{R_1}{R_2}$ .

**פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, פונקציות שורש, פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות (40 נק')**  
 ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נק')

6. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{a-x} + \frac{1}{\sqrt{a-x}}$  ( $1 < a$ ).

- א. בתשובות לסעיפים הבאים, השתמש במידת הצורך, בפרמטר a. מצא את:
- (1) תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
  - (2) נקודת הקיצון וסוגה. (הדרכה: בסעיף זה בלבד, כדאי לעשות קודם מכנה משותף).
  - (3) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.



- ב. שרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. לסעיף זה מצורף שרטוט של גרף הפונקציה:  $g(x) = [f(x)]^2 - 2$ .
- (1) מצא את הפונקציה  $g(x)$ . היעזר בפרמטר a.
  - (2) הישר  $x = a - 1$  חותך את גרף  $g(x)$  בנקודת הקיצון שלה. השטח הכלוא ברביע הראשון בין ישר זה, לבין גרף  $g(x)$  והצירים מסתובב סביב ציר ה-x. נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא:  $\frac{\pi \cdot (a^3 + 13)}{3}$ . מצא את ערכו של הפרמטר a.

7. נתונים הגרפים של הפונקציות:  $g(x) = \tan(x^2)$  ו-  $f(x) = -2x^2$ .

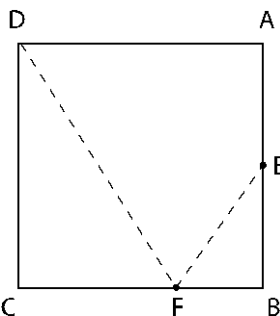
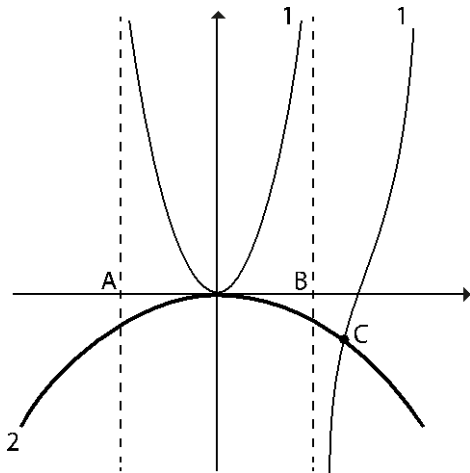
- האסימפטוטות חותכות את ציר ה-x בנקודות A ו-B.
- א. זהה איזה מהגרפים, 1 או 2, מתאים לפונקציה  $f(x)$ .
  - ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B המופיעות בשרטוט.
  - ג. נתון:  $C(0.43\pi, -3.67)$ . מצא את פתרון המשוואה:

$$\tan(x^2) = -2x^2 \quad \text{בתחום: } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

- ד. נתונה הפונקציה  $h(x) = x \cdot \sin(x^2)$ . עבור גרף הפונקציה  $h(x)$ , בתחום:  $0 \leq x \leq 2.1$ :

1. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים.
2. מצא את נקודת הקיצון הפנימית ואת סוגה. (הדרכה: היעזר בסעיף ג').
3. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$ .

ה. בהתאם לשרטוט, חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $h(x)$  לבין ציר ה-x ברביע הראשון.



8. האולם ABCD הוא בצורת ריבוע שאורך צלעו 30 מטרים. הנקודה E היא אמצע הקיר AB. מהפינה D מטיחים כדור טניס לכיוון הקיר BC, אשר פוגע בו בנקודה F ומשם נזרק לנקודה E. מהירותו של הכדור לאורך כל תנועתו היא 10 מטרים לשנייה. הנח כי לאחר הפגיעה בקיר, הכדור יגיע בוודאות לנקודה E. חשב מה צריך להיות אורך הקטע CF, שעברו זמן התנועה הכולל של הכדור יהיה מינימלי.

**בהצלחה!**

תשובות:

(1) 100 ק"מ.

(2) ב.  $q = 0.5$ . ג. 5 איברים.

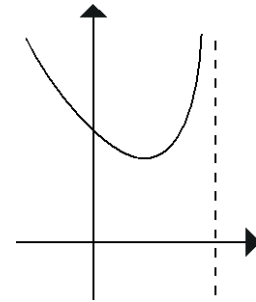
(3) א.  $p = 0.25$ ,  $q = \frac{1}{3}$ . שי אצן מוכשר יותר. ב.  $x = 4$ .

(4) א.  $AD = 2r$ ,  $AC = 4r$ . ב. 5 סמ"ר.

(5) א. 4.5. ב. לא. ג. 96 סמ"ר. ד. 0.75.

(6) א. (1)  $x < a$ . (2)  $\min(a-1, 2)$ . (3)  $(0, \frac{a+1}{\sqrt{a}})$ .

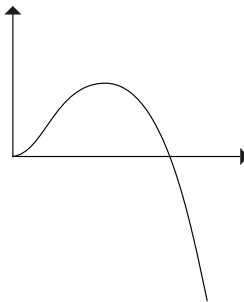
ב.



ג. (1)  $g(x) = a - x + \frac{1}{a-x}$ . (2)  $a = 3$ .

(7) א. גרף 2. ב.  $A(-1.25, 0)$ ,  $B(1.25, 0)$ . ג.  $x = 0$ ,  $x = 0.43\pi$ . ד. (1)  $(0, 0)$ ,  $(1.77, 0)$ .

(2)  $\max(0.43\pi, 1.31)$ . (3) ה. 1 יח"ר.



(8) 20 מי.

## שאלון 581 - מבחן אתגר 2

**התרגילים במבחן זה קשים מהרגיל ומטרתם לאתגר את התלמידים המתקדמים ולשפר את ההבנה והיכולת האלגברית שלהם לקראת הבחינות: "קשה באימונים - קל בקרב!"**

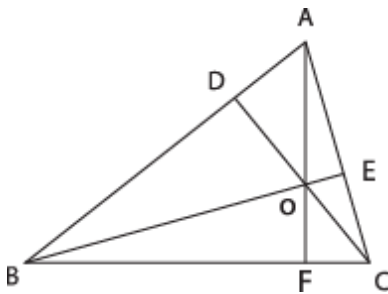
**באתר הוצאת ארכימדס ניתן להוריד את הפתרון המלא כולל הדרך לפתרון**

**פרק ראשון - אלגברה והסתברות (40 נק')**  
ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נק')

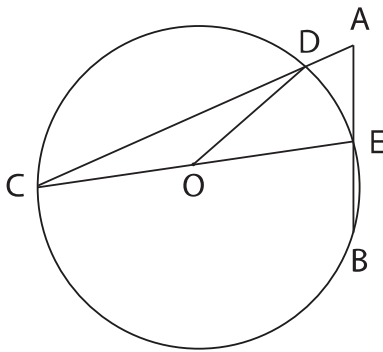
1. אופניים ומשאית יצאו בו זמנית זה לקראת זה, מעפולה ומתל אביב בהתאמה. לאחר פגישתם הראשונה, שהתקיימה במרחק 30 ק"מ מעפולה, הגיעה המשאית לעפולה ומיד הסתובבה והחלה חוזרת לתל אביב. בדרכה בחזרה, פגשה שנית את האופניים. לאחר שהגיעה המשאית לתל אביב, מיד הסתובבה שוב לעפולה ובדרך פגשה בשלישית את האופניים, שעדיין היו בדרך לתל אביב. בין המפגש הראשון והשני חלפו 90 דקות. המרחק בין נקודת המפגש השנייה והשלישית הוא 30 ק"מ.
  - א. מצא את המהירויות של האופניים והמשאית.
  - ב. למחרת יצאו האופניים והמשאית לנסיעות בו זמנית, מאותם יישוביים ובאותו כיוון כמו אתמול, אך במהירויות הנמוכות ב-k קמ"ש מהמהירויות שמצאת בסעיף א'. המפגש הראשון ביניהם התקיים בתוך פחות משעתיים של נסיעה. מצא באיזה תחום מספרים נמצא הפרמטר k.
  
2. סכום n האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  נתון בנוסחה:  $S_n = n \cdot (n + 2)$ .
  - א. הוכח שהסדרה חשבונית ומצא את הנוסחה לאיבר הכללי שלה.
  - ב. נגדיר סדרה חדשה:  $b_n = a_n \cdot (-1)^n$ . הבע באמצעות n את סכום 2n האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$ .
  - ג. הפרמטר m הוא חיובי. לכל אחד מאיברי הסדרה  $b_n$  הוסיפו m. את כל אחד מאיברי הסדרה  $a_n$  הכפילו פי m. סכום 2m האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  (אחרי ההכפלה) גדול פי שמונה מסכום 2m האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  (לאחר התוספות). מצא את ערכו של הפרמטר m.
  
3. עופר מחפש עבודה. הוא הגיש מועמדות באינטרנט לשלושה מקומות עבודה ומועמדות טלפונית לארבעה מקומות עבודה אחרים. ההסתברות שיקבל תשובה חיובית ממקום עבודה שעופר פנה אליו באינטרנט היא 0.2. ההסתברות שיקבל תשובה חיובית ממקום עבודה שעופר פנה אליו טלפונית היא 0.4.
  - א. חשב את ההסתברות שסך הכל שישה מקומות עבודה יחזירו לעופר תשובה חיובית.
  - ב. ידוע שסך הכל שישה מקומות עבודה יחזירו לעופר תשובה חיובית.

חשב את ההסתברות שכל מקומות העבודה אליהם פנה טלפונית - חזרו אליו.

**פרק שני - גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נק')**  
ענה על אחת מהשאלות 4-5 (לכל שאלה 20 נק')



4. הנקודה O היא נקודת מפגש הגבהים AF, BE, ו-CD במשולש  $\triangle ABC$ .
  - א. הוכח:  $\triangle AEB \sim \triangle ADC$ .
  - ב. הוכח:  $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ .
  - ג. נתון:  $AD = CE = 2$  ס"מ,  $AE = 4$  ס"מ. חשב את אורך הקטע BD.
  - ד. חשב את אורך הצלע BC.



5. מהנקודה A יוצאים שני ישרים החותכים את המעגל בנקודות C, D, E ו-B כמתואר בשרטוט. הנקודה O היא אמצע הקוטר CE שאורכו  $2R$ . הנקודה E היא אמצע הקטע AB. נתון:  $CD = 7AD$ .  
 א. הבע באמצעות R את אורך המיתר BE.  
 ב. קבע האם ניתן לחסום מעגל במרובע CDEB. נמק.  
 ג. הנקודה F נמצאת על CD כך שהמרובע BEDF חוסם מעגל. נתון:  $CF = 1$  ס"מ. חשב את אורך הרדיוס R.

**פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, פונקציות שורש, פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות (40 נק')**  
 ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נק')

6. לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 10x + 4m}$  יש אסימפטוטה אנכית אחת בלבד, אך המכנה שלה מתאפס עבור שני ערכי x שונים.  
 א. מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר m.  
 ב. נתון ש-m חיובי. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$  והוכח כי הגרף יורד לכל x בתחום זה.  
 ג. מהנקודה (0,9) שאינה נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  יוצא ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה M. מצא את שיעורי הנקודה M.  
 ד. נתונה פונקציה נוספת:  $g(x) = \frac{x^2 - ax + b}{x - c}$ . לפונקציה  $g(x)$  אין אסימפטוטה אנכית אך יש לה נקודת אי רציפות סליקה בנקודה M. מצא את ערכי הפרמטרים a, b ו-c.

7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{-\sin x} \cdot (1 + \cos x)$  בתחום:  $0 < x \leq 2\pi$ .  
 א. עבור גרף הפונקציה  $f(x)$ , בתחום הנתון, מצא את:  
 1. תחום ההגדרה.  
 2. נקודות הקיצון ואת סוגן.  
 3. נקודות החיתוך עם הצירים.  
 4. תחומי העליה והירידה.  
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.  
 ג. בתחום הנתון, בין שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x, העבירו את הישר  $x = a$ . ישר זה מחלק את השטח הכלוא ברביע הראשון בין גרף הפונקציה לבין הצירים, לשני שטחים, ימני ושמאלי. שטחים אלו מסתובבים סביב ציר ה-x כך שנפח גוף הסיבוב הימני גדול פי שבעה מנפח גוף הסיבוב השמאלי. מצא את ערכו של הפרמטר a.

8. נתונה הנגזרת:  $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{-x^2+2x+a}}$ . הישר  $2y-x-6=0$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודת

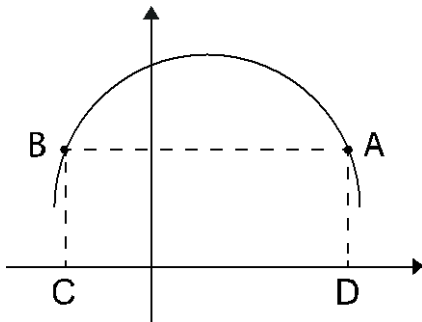
החיתוך של הגרף עם ציר ה-y.

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. נתון גרף הפונקציה  $f(x)$ . המלבן ABCD כלוא בין גרף

הפונקציה  $f(x)$  לבין ציר ה-x כמתואר בשרטוט.

מצא את היקפו המקסימלי של המלבן ABCD.



בהצלחה!

**תשובות:**

(1) א. אופניים: 20 קמ"ש. משאית: 60 קמ"ש. ב.  $0 < k < 10$ .

(2) א.  $a_n = 2n + 1$ . ב. הסכום:  $2n$ . ג.  $m = 4$ .

(3) א. 0.0037. ב.  $\frac{2}{3}$ .

(4) ג. 10 ס"מ. ד. 11.49 ס"מ.

(5) א.  $BE = 0.55R$ . ב. לא ניתן. ג. 2.18 ס"מ.

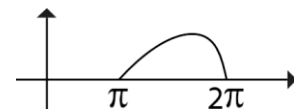
(6) א.  $m = 6$  או  $m = 0$ . ב.  $x \neq 4, 6$ . ג.  $M(3, -3)$ . ד.  $c = 3, b = 18, a = 9$ .

(7) א. (1)  $\pi \leq x \leq 2\pi$ . (2) פנימית:  $\max(1.73\pi, 1.439)$ , בקצה התחום:  $\min(\pi, 0), \min(2\pi, 0)$ .

(3)  $(\pi, 0), (2\pi, 0)$ .

(4) עליה:  $\pi < x < 1.73\pi$ . ירידה:  $1.73\pi < x \leq 2\pi$ .

ג.  $a = 1.5\pi = 4.71$ .

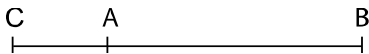


(8) א.  $f(x) = 1 + \sqrt{-x^2 + 2x + 4}$ . ב. 12 יח' אורך.

שאלון 581 - מבחן אתגר 3

התרגילים במבחן זה קשים מהרגיל ומטרתם לאתגר את התלמידים המתקדמים ולשפר את ההבנה והיכולת האלגברית שלהם לקראת הבחינות: "קשה באימונים - קל בקרב!"

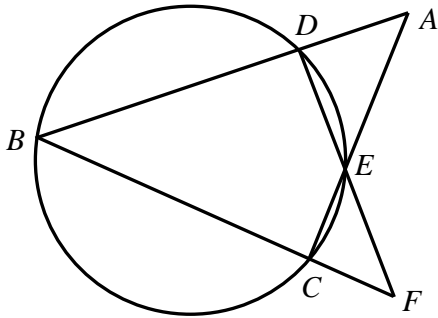
**פרק ראשון - אלגברה והסתברות (40 נק')**  
ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נק')



1. (\*\* בו זמנית, יוצאים קטנוע מהנקודה A לנקודה B ומכונית מהנקודה B לנקודה C (בהתאם לשרטוט). כעבור שעה, יוצא רוכב אופניים מהנקודה A לנקודה C. השלושה הגיעו ליעדם באותו רגע. מהירות הקטנוע כפולה ממהירות האופניים ואורך הקטע BC הוא 100 ק"מ. כשהגיעה המכונית למחצית הדרך בין הנקודה A לנקודה B, היה המרחק בינה לבין הקטנוע שמונה ק"מ והם טרם חלפו זה על פני זה.
  - א. חשב את מהירויות המכונית, הקטנוע ורוכב האופניים.
  - ב. למחרת, כאשר יצאו מאותן נקודות לאותם יעדים באותה שעה כמו בתיאור הקודם, מהירות האופניים פחתה ב- $v$  קמ"ש ומהירות הקטנוע גדלה ב- $v$  קמ"ש. כאשר הקטנוע הגיע לנקודה B, מרחק האופניים מהנקודה C היה 14 ק"מ. מצא את ערכו של הפרמטר  $v$ .
  
2. (\*\* נתונה הסדרה ההנדסית העולה  $a_n$ . אם נוסף לאיבר הראשון שלה 50, נגדיל את האיבר השני שלה ב-50% ונחלק את האיבר השלישי שלה ב-6, נקבל שלושה מספרים שמהווים סדרה הנדסית יורדת.
  - א. מצא את האיבר הראשון בכל אחת משתי הסדרות.
  - ב. נסמן באמצעות  $p^2$  את מנת הסדרה העולה  $a_n$ . כעת ממשיכים את הסדרה היורדת כך שיש לה  $m$  איברים. כעת, באותה סדרה מתכנסת, בין כל שני איברים סמוכים, נוסף איבר, כך שמתקבלת סדרה הנדסית יורדת שנכנה  $b_n$ . הבע באמצעות  $p$  ו- $m$  את האיבר האחרון בסדרה  $b_n$ .
  - ג. ממשיכים את הסדרה  $b_n$  עד אינסוף. נתון שהסכום שלה הוא בין 108 לבין 162. מצא באיזה תחום מספרי נמצא הפרמטר  $p$ .
  
3. (\*\* להשתלמות הוראה הגיעו מורים ומורות ממחוזות המרכז, הצפון והדרום. אם בוחרים באקראי חמישה מבין כלל המשתתפים, ההסתברות לבחור שלושה גברים גדולה ב-50% מההסתברות לבחור שלוש נשים.
  - א. חשב את שיעור הגברים מבין המשתתפים.
  - ב. נתון: חמישית מהמשתתפים היו מורות ממחוז המרכז. האירועים "להיות ממחוז המרכז" ו-"להיות גבר" הם בלתי תלויים. שליש ממשתתפי מחוז הצפון הן נשים. ההסתברות לבחור מורה גבר מבין המשתתפים ממחוז הדרום גדולה פי שניים מהסתברות לבחור מבין כלל המורות, אחת שהגיעה ממחוז הצפון. חשב את שיעור המשתתפים הכולל ממחוז הצפון.
  - ג. המשתתפים חולקו לחדרים לפי המחוז שלהם. בוחרים באקראי באחד החדרים ובוחרים ממנו באקראי את אחד המשתתפים. ידוע שנבחר גבר. חשב את ההסתברות שהגיע מהצפון.

**פרק שני - גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נק')**  
ענה על אחת מהשאלות 4-5 (20 נק')

4. (\*\*) המרובע BCED חסום במעגל כמתואר בשרטוט. המשכי המיתרים BD ו-CE נחתכים בנקודה A. המשכי המיתרים BC ו-DE נחתכים בנקודה F. נתון:  $AD + CE = BD$ ,  $AE = 2CE$ .



א. חשב את היחס:  $\frac{AB}{AC}$ .

ב. נתון: במרובע BCED ניתן לחסום מעגל. הקטע DE קצר בשני ס"מ מהקטע AD. חשב את אורך AD.

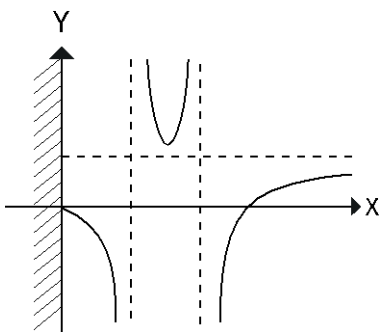
ג. חשב את יחס השטחים:  $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle CEF}}$ .

5. (\*\*) במשולש  $\triangle ABC$  נתון:  $AB + AC = 7a$ ,  $\sphericalangle ACB = \beta$ ,  $\sphericalangle ABC = \alpha$ .  
א. נתון:  $3 \sin \beta = 4 \sin \alpha$ . הבע באמצעות a את אורכי הצלעות AB ו-AC.

ב. נסמן:  $BC = b$ . הוכח:  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{3 \cdot (b^2 + 7a^2)}{4 \cdot (b^2 - 7a^2)}$ .

ג. נתון:  $4 \cos \beta = 3 \cos \alpha$ . חשב את גודל הזווית  $\sphericalangle BAC$ .

**פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, פונקציות שורש, פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות (40 נק')**  
ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נק')



6. (\*\*) נתון גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{2ax - 12b\sqrt{x}}{bx - 3b\sqrt{x} + c}$ ,  $(0 < b, 0 < a)$ .

אשר חותך את ציר ה-x בשתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא 9 יח' אורך.  
א. מצא את האסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
ב. נתון: גרף הנגזרת  $f'(x)$  עולה בכל התחום  $1 < x < 4$  ורק בתחום זה. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ג. מצא באיזה תחום מספרי נמצאת נקודת הקיצון של גרף הנגזרת השנייה  $f''(x)$ .

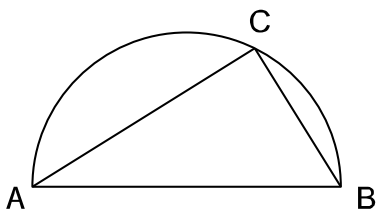
ד. הגדירו פונקציה חדשה:  $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ . שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

7. (\*\*) נתונות הנגזרת השנייה:  $f''(x) = \frac{5-3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3-5x+a}}$  והפונקציה:  $g(x) = \sqrt{x^2+2x+9a}$ .

הפרמטר  $a$  הוא מספר שלם. הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  נחתכים על ציר ה- $y$ . דרך נקודת חיתוך זו, עוברים משיקים לשני הגרפים ומשיקים אלו מאונכים זה לזה. גרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את הישר  $x = -2$  בנקודה  $A$ . גרף הנגזרת הראשונה  $f'(x)$  חותך את הישר  $x = 1$  בנקודה  $B$ . שיעור ה- $y$  של הנקודה  $A$  גדול ב-10 יח' אורך משיעור ה- $y$  של הנקודה  $B$ . מצא את:

א. ערכו של הפרמטר  $a$  ואת הנגזרת הראשונה  $f'(x)$ .

ב. משוואת הישר המשיק לגרף הנגזרת הראשונה  $f'(x)$  בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .



8. (\*\*) במושב נמצאת רחבה בצורת חצי מעגל שקוטרו  $AB$ .

נתון:  $AB = 100$  מטר. הנקודה  $C$  נמצאת על היקף הרחבה כך שמתקבלת החלקה המשולשת  $ABC$ . מזכירות המושב מעוניינת לגדר את החלקה הזו, כך שכל צלע תגודר בגדר מסוג שונה.

עומרי, קבלן בניית גדרות שנבחר לביצוע העבודה, הודיע כי עלות הקמת הגדר למושב תהיה:

600 ש"ח למטר בצלע  $BC$ , 800 ש"ח למטר בצלע  $AC$  ו-1,200 ש"ח למטר בצלע  $AB$ .

מורידים מהנקודה  $C$  אנך לקוטר  $AB$ , החותך את הקוטר בנקודה  $D$ .

חשב את אורכו של הקטע  $BD$ , שעבורו ההכנסה של עומרי מהקמת הגדר תהיה מקסימלית.

בהצלחה!

תשובות:

1 א. קטנוע: 40 קמ"ש, אופניים: 20 קמ"ש, מכונית: 50 קמ"ש. ב. 10 קמ"ש.

2 א. בסדרה העולה האיבר הראשון הוא 4. בסדרה היורדת האיבר הראשון הוא 54.

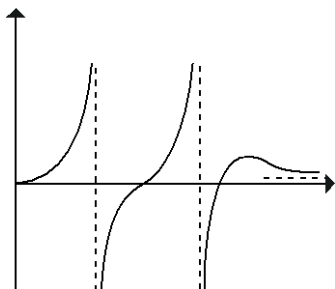
ב.  $54 \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^{2m-2}$  ג.  $1.5 < p < 2$ .

3 א. 60%. ב. 30%. א.  $\frac{20}{53} = 0.377$ .

4 א.  $1\frac{1}{3}$ . ב. 9 ס"מ. ג.  $\frac{7}{4}$ .

5 א.  $AB = 4a, AC = 3a$ . ג.  $\angle BAC = 90^\circ$ .

6 א.  $y = 4$ . ב.  $f(x) = \frac{4x-12\sqrt{x}}{x-3\sqrt{x}+2}$ . ג.  $1 < x < 4$ . ד. השרטוט:



7 א.  $a = 4, f'(x) = -\sqrt{x^3-5x+4} - 4$ . ב.  $y = 1.25x - 6$ .

8  $BD = 36$  מ'

### שאלון 581 - מבחן אתגר 4

התרגילים במבחן זה קשים מהרגיל ומטרתם לאתגר את התלמידים המתקדמים ולשפר את ההבנה והיכולת האלגברית שלהם לקראת הבחינות: "קשה באימונים - קל בקרב!"

פרק ראשון - אלגברה והסתברות (40 נק')  
ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נק')

1. (\*\*) מדי יום, הראל מפזר צעצועים בסלון ואמו שרונה מחזירה אותם למקום. הזמן הדרוש להראל לפזר את כל הצעצועים לבדו ארוך פי שלושה מהזמן הדרוש לשרונה לסדרם לבדה. ביום א' כשהסלון היה מסודר לחלוטין, החל הראל לפזר את הצעצועים ב-14:00. כעבור זמן מה החלה שרונה לסדר את הצעצועים כאשר הראל ממשיך לפזרם במקביל. בשעה 15:00 כבר היה הסלון מסודר.
- א. מצא באיזו שעה החלה שרונה לסדר את הסלון.
- ב. ביום ד', כאשר היה הסלון מסודר, החל הראל לפזר את הצעצועים. כעבור  $t$  שעות של פיזור החלה שרונה לסדרם כאשר הראל ממשיך לפזרם במקביל. הבע באמצעות  $t$  את משך הזמן בו עבדו במקביל עד שהיה הסלון מסודר.
- ג. לאבא אסף דרושות שלוש שעות כדי לסדר לבדו את כל הצעצועים. לשרונה דרושות ארבע שעות לשם כך. ב-9:00 החל הראל לפזר את הצעצועים ובשעה מסוימת החל לסדרם בקצב שבו הוא רגיל לפזרם. ב-19:00 הצטרפו אסף ושרונה לסדר במקביל להראל. מצא באיזו שעה הפסיק הראל לפזר את הצעצועים והחל לסדרם, בהינתן שב-20:00 היה הסלון מסודר.

2. (\*\*) נתונים הסכומים הבאים הנכונים עבור כל  $n$  טבעי:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

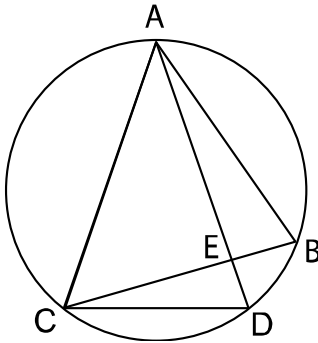
- א. מצא באמצעות הסכומים הללו את נוסחת סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  שאיברה הכללי הוא:  $a_n = n^2 + 2n$ .
- ב. בסדרה  $a_n$  היחס בין סכום  $n$  האיברים הראשונים לבין סכום  $n$  האיברים הראשונים גדול מ-6.25. מצא את הערך המינימלי של  $n$  המקיים יחס זה.

3. (\*\*) בשלושה כדים - א', ב' ו-ג' - נמצאים כדורים כחולים, אדומים וצהובים בכמויות שונות לפי הטבלה:

מספר הצהובים	מספר האדומים	מספר הכחולים	ארגז
2	2	1	א
2	1	2	ב
1	2	2	ג

- א. מטילים קובייה. אם התקבלה הספרה  $n$  או ספרה שנמוכה ממנה, בוחרים בארגז א'. אם התקבלה הספרה  $n+1$  בוחרים בארגז ב'. אם יצאה ספרה הגדולה מ:  $n+1$ , בוחרים בארגז ג'. לאחר בחירת הארגז מוציאים ממנו באקראי כדור. ההסתברות להוציא כדור צהוב היא 0.3. מצא את ערכו של  $n$ .
- ב. כעת שמים את כל הכדורים הכחולים והאדומים בשק נפרד (ללא הכדורים הצהובים). לשק זה מוסיפים כעת  $k$  כדורים כחולים. לאחר ההוספה, מוציאים עשר פעמים כדור באקראי מהשק עם החזרה. ההסתברות להוציא ארבעה כדורים אדומים גבוהה פי ארבעה מההסתברות להוציא ארבעה כדורים כחולים. מצא את ערכו של הפרמטר  $k$ .

**פרק שני - גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נק')**  
 ענה על אחת מהשאלות 4-5 (20 נק')

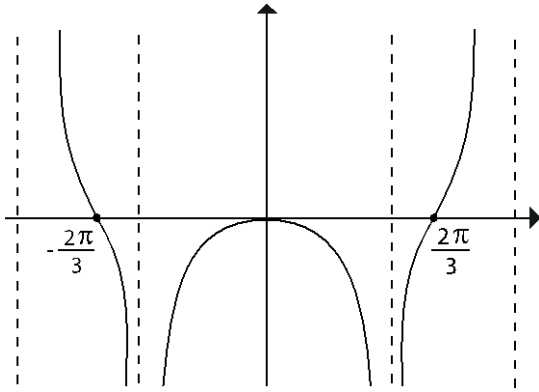


4. (\*\* במעגל הנתון, המיתר AB אורך ב-2 ס"מ מהמיתר CD. המיתרים AD ו-BC נחתכים בנקודה E. שטח המשולש  $\triangle AEB$  גדול פי  $1\frac{7}{9}$  משטח המשולש  $\triangle CDE$ .  
 א. חשב את אורך המיתר CD.  
 ב. נתון:  $AC = AD = m$ . הבע באמצעות m את אורכו של רדיוס:  
 1. המעגל החסום במשולש  $\triangle ACD$ .  
 2. המעגל החסום את המשולש  $\triangle ACD$ .

5. (\*\* במשולש  $\triangle ABC$  נתון:  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $AB + AC = a$ , ו-  $BC = b$ .  
 א. הבע באמצעות a ו-b את שטח המשולש  $\triangle ABC$ .  
 ב. נתון:  $AC = 0.6a$ . חשב את שתי הזוויות האחרות במשולש.  
 ג. נתון: הנקודה M נמצאת על הצלע BC כך שהישר AM חוצה את הזווית  $\angle BAC$ .  
 נתון:  $AM = \sqrt{6}$  ס"מ. חשב את היקף המשולש  $\triangle ABC$ .

**פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, פונקציות שורש, פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות (40 נק')**  
 ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נק')

6. (\*\* הנגזרת השנייה של הפונקציה  $g(x)$  היא:  $g''(x) = 12x - 18$ . לפונקציה  $g(x)$  יש נקודת מקסימום ששיעור ה-x שלה הוא 1 ונקודת מינימום הנמצאת על הישר  $y = 10$ .  
 א. מצא את הפונקציה  $g(x)$ .  
 ב. מגדירים פונקציה חדשה:  $f(x) = \frac{2x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 26x - 4 \cdot g(x)}{2x + 1}$ . נתון שגרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את ציר ה-x בנקודה (3,0). מצא את תחומי החיוביות והשליליות של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 ד. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$  לבין ציר ה-x ברביע הראשון.



7. (\*\*) נתונה הפונקציה:  $f(x) = a \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \tan x$  בתחום

$-\pi \leq x \leq \pi$ . בשרטוט מופיע גרף הנגזרת  $f'(x)$  בתחום

$-\pi \leq x \leq \pi$ . לגרפים של  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ו-

1-  $f''(x)$  יש אותן אסימפטוטות אנכיות.

א. מצא את האסימפטוטות לגרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מצא באמצעות השרטוט את ערכו של הפרמטר a.

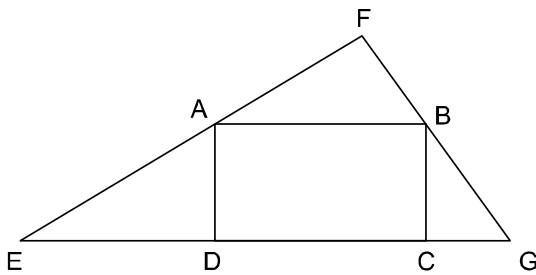
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של גרף  $f(x)$ .

ד. שרטט את גרף:

1. הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.

2. הנגזרת השנייה  $f''(x)$  בתחום:  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

ה. חשב את השטח הכלוא בין הישר  $x = \frac{\pi}{3}$  וציר ה-x לבין גרף  $f''(x)$ .



8. (\*\*) במשולש  $\triangle EFG$  ששטחו תשעה סמ"ר, חסום המלבן

ABCD, כמתואר בשרטוט. נתון:  $AB = 2AD$ .

א. חשב את האורך המקסימלי של הקטע BC.

ב. כאשר אורכו של BC מקסימלי, חשב את שטח

המשולש  $\triangle BEF$ .

בהצלחה!

תשובות:

(1) א. 14:40 ב.  $0.5t$  ג. 18:00

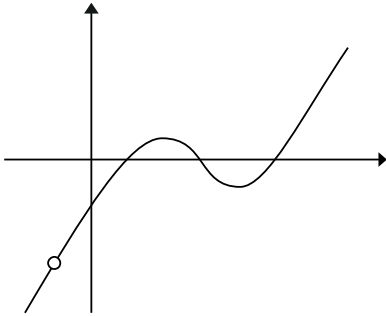
(2) א.  $S_n = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$  ב.  $n=8$

(3) א.  $n=2$  ב.  $k=5$

(4) א. 6 ס"מ. ב. (1)  $\frac{\sqrt{m^2-9}}{m+3} = 3 \cdot \sqrt{\frac{m-3}{m+3}}$  (2)  $\frac{m^2}{2\sqrt{m^2-9}}$

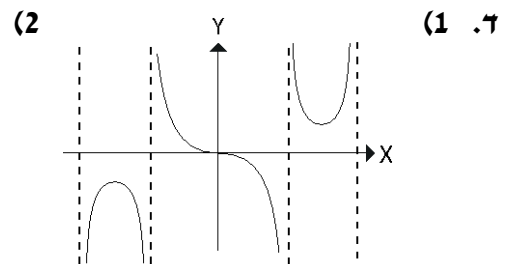
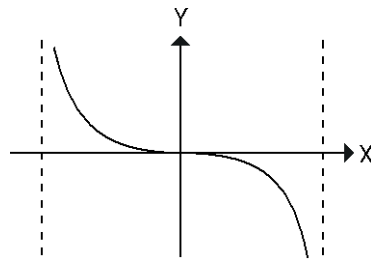
(5) א.  $\frac{(a^2-b^2) \cdot \sqrt{3}}{12}$  ב.  $40.89^\circ, 79.1^\circ$  ג. 9 ס"מ.

(6) א.  $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$  ב. חיוביות:  $x > 4$  או  $2 < x < 3$  שליליות:  $3 < x < 4$  או  $-0.5 < x < 2$  או  $x < -0.5$  ג. השרטוט משמאל. ד. 0.25 יח"ר.



(7) א.  $x = -\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi$  ב.  $a=2$  ג. עולה:  $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$  או  $-\pi < x < -\frac{2\pi}{3}$

יורדת:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$  או  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  או  $-\frac{2\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{2}$



ה.  $2\frac{2}{3}$  יח"ר.

(8) א. 1.5 ס"מ. ב. 4.5 סמ"ר.