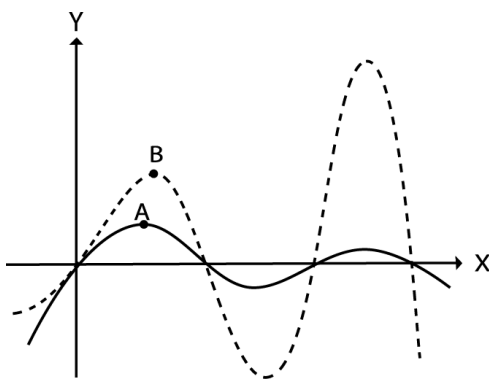


תרגיל אתגר 1

חקירת פונקציה מעריכית משולבת עם פונקציה טריגונומטרית

תרגיל זה הוא ברמת קושי גבוהה מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בחקירת פונקציה. רמת קושי זו אינה מאפיינת את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.



(**) נתונות שתי הפונקציות : $f(x) = a \cdot e^x \cdot \sin x$

$$g(x) = \frac{\sin x}{e^{ax}} : 1$$

בנוסף נתונים הגרפים של שתי הפונקציות הללו, אשר משיקים זה לזה בראשית הצירים.

א. מצא את ערכו של הפרמטר a .

ב. קבע האם הגרף המקווקו מתאים לפונקציה $f(x)$ או לפונקציה $g(x)$. נמק.

ג. מצא פתרון כללי לנקודות החיתוך בין שני הגרפים.

ד. הנקודות A ו-B הן נקודות מקסימום של הגרפים (כמתואר בשרטוט), והן שני קדקודיו של מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. חשב את שטח המלבן.

ה. (*) עבור כל נקודות המקסימום של גרף הפונקציה $g(x)$, הנמצאות ברביע הראשון :

1. נמק מדוע שיעורי ה-x שלהן הם איברים בסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

2. נמק מדוע שיעורי ה-y שלהן הם איברים בסדרה הנדסית אינסופית יורדת ומצא את מנתה.

פתרון:

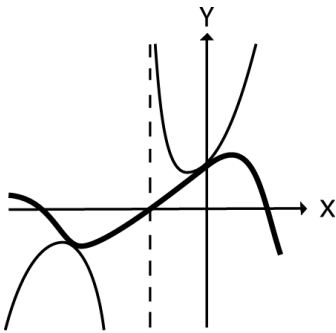
א. $a = 1$.ב. מתאים לפונקציה $f(x)$.ג. כל הנקודות מהסוג $(\pi k, 0)$ עבור כל k שלם.ד. 11.21 יח"ר. ה. 1. ההפרש: 2π . 2. המנה: $\frac{1}{e^{2\pi}}$.

תרגיל אתגר 2

חקירת פונקציה מעריכית משולבת עם פונקציה טריגונומטרית

תרגיל זה הוא ברמת קושי גבוהה מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בחקירת פונקציה. רמת קושי זו אינה מאפיינת את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

(**) נתונות שתי הפונקציות: $f(x) = a \cdot 2^x \cdot \cos x + b$ ו: $g(x) = \frac{2^x}{\cos x} - b$. בנוסף נתונים הגרפים של שתי הפונקציות הללו, אשר משיקים זה לזה בנקודה A ששיעור ה-x שלה הוא $-\pi$.



- א. קבע האם הגרף הדק מתאים לפונקציה $f(x)$ או לפונקציה $g(x)$. נמק.
- ב. מצא את ערכם של הפרמטרים a ו-b.
- ג. הוכח: שני הגרפים משיקים זה לזה גם בנקודה B הנמצאת על ציר ה-y.
- ד. נתון שבתחום: $-\pi < x < 0$:
 - מלבד הנקודות A ו-B אין ערכי x נוספים שבהם שיפועי הגרפים שווים.
 - נקודת המינימום של הגרף העבה נמצאת מימין לנקודה A.
 - נקודת המקסימום של הגרף העבה נמצאת מימין לנקודה B.
- ה. הסבר האם קיימים בתחום זה ערכי x שעבורם מתקיים: $f'(x) < g'(x)$. נמק.
- ו. מצא פתרון כללי לשיעורי ה-x של נקודות החיתוך בין שני הגרפים.
 1. נמק מדוע שיעורי ה-x שלהן הם איברים בסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.
 2. נמק מדוע שיעורי ה-y שלהן הם איברים בסדרה הנדסית ומצא את מנתה.

פתרון:

א. מתאים לפונקציה $g(x)$.ב. $b = 0$, $a = 1$.

ד. לא קיימים.

ה. כל הנקודות ששיעור ה-x שלהן הוא מהסוג πk עבור כל k שלם.ו. $(1, \pi)$ (2) המנה: -2^π .

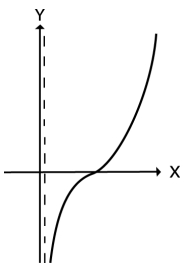
תרגיל אתגר 3

חקירת פונקציית \ln

תרגיל זה הוא ברמת קושי גבוהה מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בחקירת פונקציה. רמת קושי זו אינה מאפיינת את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

(**) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot \ln x + \ln x - x + a$ ($a < 0$).

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. נקודת הפיתול היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ נמצאת על הישר $y = 3x - 5$. מצא את ערכו של הפרמטר a .
- ג. נתון כי עבור כל x חיובי מתקיים $\ln x > -\frac{1}{x}$. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ד. נתון: הישר $x = e$ וגרף הפונקציה $f(x)$ נחתכים על ציר ה- x . מצורף גרף הפונקציה: $g(x) = x \cdot \ln x + \ln x$. שרטט על גבי אותה מערכת צירים גם את גרף $f(x)$, וסמן עליו את נקודת הפיתול של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. חשב את שטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין גרף הפונקציה $g(x)$, והישרים $x = 1$ ו: $x = e$.
- ו. הנקודות M ו- N נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ כך שהישר MN מקביל לציר ה- y . ראשית הצירים בנקודה O והנקודה N אינה ברביע הרביעי. מצא את שיעורי הנקודה N שעבורה יהיה שטח המשולש ΔMNO מינימלי.



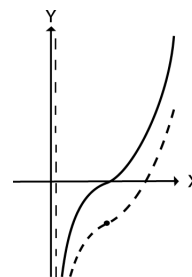
ד. נתון: הישר $x = e$ וגרף הפונקציה $f(x)$ נחתכים על ציר ה- x . מצורף גרף הפונקציה: $g(x) = x \cdot \ln x + \ln x$. שרטט על גבי אותה מערכת צירים גם את גרף $f(x)$, וסמן עליו את נקודת הפיתול של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. חשב את שטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין גרף הפונקציה $g(x)$, והישרים $x = 1$ ו: $x = e$.

ו. הנקודות M ו- N נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ כך שהישר MN מקביל לציר ה- y . ראשית הצירים בנקודה O והנקודה N אינה ברביע הרביעי. מצא את שיעורי הנקודה N שעבורה יהיה שטח המשולש ΔMNO מינימלי.

פתרונות:

- א. $0 < x$.
- ב. $a = -1$.
- ג. עולה: $0 < x$; יורדת: אף x .
- ד.



- ה. $\frac{e^2}{2} + e - 1.5 = 4.913$ יח"ר.
- ו. $N(1,0)$.

תרגיל אתגר 4

חקירת פונקציה מעריכית משולבת עם פונקציה טריגונומטרית

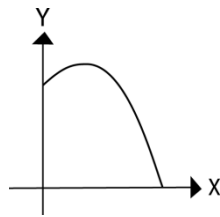
תרגיל זה הוא ברמת קושי גבוהה מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בחקירת פונקציה. רמת קושי זו אינה מאפיינת את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

(**) נתונה הפונקציה: $f(x) = 2^x \cdot \sin(2^x)$.

- א. מבין כל נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x , הנקודה A היא הקרובה ביותר לציר ה- y . מצא את שיעורי הנקודה A .
- ב. מצא את שיעורי הנקודה B , בה חותך גרף הפונקציה $f(x)$ את ציר ה- y .
- ג. נתון: גרף הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר ה- x בין הנקודה A לבין ראשית הצירים, וחותך את ציר ה- y בנקודה ששיעור ה- y שלה גבוה מזה של הנקודה B . שרטט גרף של הפונקציה $f(x)$ בתחום: $0 \leq x \leq x_A$.
- ד. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה שצירת לבין הצירים.
- ה. הגדירו שתי פונקציות חדשות: $g(x) = 2^{-x} \cdot \sin(2^{-x})$ ו: $h(x) = -2^x \cdot \sin(2^x)$. מבין כל נקודות הקיצון של שתי הפונקציות $g(x)$ ו: $h(x)$, הנקודות M ו- N הן בהתאמה הנקודות הקרובות ביותר לציר ה- y . מצא את נקודת החיתוך של הישר MN עם ציר ה- y .

פתרונות:

ד. 2.22 יח"ר. ה. $(0,0)$.



א. $A(1.65,0)$ ב. $B(0,0.84)$ ג.

תרגיל אתגר 5

**אינטגרציה של חקירת פונקציה מעריכית, וקטורים אלגבריים,
טריגונומטריה במרחב וגיאומטריה אנליטית**

תרגיל זה הוא ברמת קושי גבוהה מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בשאלון 582. רמת קושי זו אינה מאפיינת את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

$$g(x) = k \cdot \sqrt{\sin\left(\frac{a\pi x}{6}\right)} \quad ; \quad f(x) = k + 1 - \pi^{-1 + \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)} \quad (**)$$

נתונות הפונקציות: בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

- א. הגרפים של הנגזרות $f'(x)$ ו- $g'(x)$ נחתכים בנקודה אחת על ציר ה- x בתחום: $0 \leq x \leq \pi$. מצא את ערכו של הפרמטר a .
- ב. הוכח כי עבור כל k , הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ משיקים זה לזה בנקודה A , שהיא נקודת קיצון פנימית משותפת לשניהן בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.
- ג. הנקודה A נמצאת על מעגל קנוני החותך את ציר ה- x בנקודות B ו- C ואת ציר ה- y בנקודות D ו- E . הנקודה $M(0,0,k)$ נמצאת על ציר ה- z כך שבפירמידה $MBDCE$ הזווית בין הפאה לבין הבסיס היא 45° . מצא את ערכו של הפרמטר k .
- ד. חשב את המרחק של ראשית הצירים מפאת הפירמידה.

פתרונות:

ב. $a=1$. ג. $k=\pm 3$. ד. $2.12 = \sqrt{4.5}$ יח' אורך.

תרגיל אתגר 6

שילוב של חקירת פונקציה מעריכית ולוגריתמית

תרגיל זה הוא ברמת קושי גבוהה מהנדרש בבחינת הבגרות ומטרתו העמקת ההבנה בחקירת פונקציה. רמת קושי זו אינה מאפיינת את ספרי ההכנה שלנו לבגרות, בהם התרגילים הם ברמת הבגרות.

(**) אחת האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה: $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - e^{2-x}}{e^x - e^{a-x}}\right)$ ($0 < a$) עוברת מתחת

לציר ה- x . ארבע האסימפטוטות של הפונקציה כולאות מלבן ששטחו 2 יח"ר.

- א. מצא את ערכו של הפרמטר a .
- ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. תחום ההגדרה.
 2. נקודות החיתוך עם הצירים.
- ג. הוכח שגרף הנגזרת $f'(x)$ שלילי בכל תחום הגדרתו ושרטט אותו.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. הגדירו פונקציה חדשה: $z(x) = f(x) \cdot f'(x)$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה: $z(x)$.
- ו. הגדירו פונקציה חדשה: $p(x) = f(x) - f'(x)$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $p(x)$ בתחום $2 < x$.
- ז. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x) = e^{f(x)}$. עבור גרף הפונקציה $g(x)$ מצא את:
 1. תחום ההגדרה.
 2. אסימפטוטות.
 3. נקודות החיתוך עם הצירים.
- ח. הוכח: גרף הנגזרת $g'(x)$ שלילי בכל תחום הגדרתו.
- ט. קבע האם גרף הנגזרת השנייה $g''(x)$ חותך את ציר ה- x . נמק.

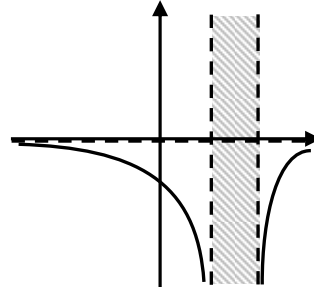
(הפתרונות בעמוד הבא)

פתרונות:

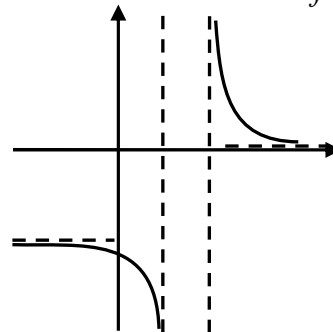
א. $a = 4$.

ב. (1) $2 < x$ או $x < 1$ (2) $(0, -2.12)$.

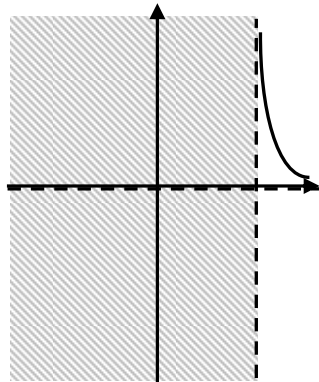
ג. שרטוט $f'(x)$:



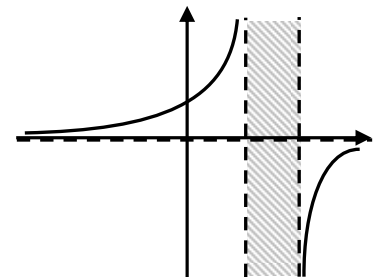
ד. שרטוט $f(x)$:



ו. שרטוט $p(x)$:



ה. שרטוט $z(x)$:



ז. (1) $2 < x$ או $x < 1$ (2) $x = 2, y = 1, y = \frac{1}{e^2}$ (3) $(0, 0.12)$.

ט. לא.