
ארכימדס
בכיוון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472
כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק א'
הוצאת ארכימדס
שאלון 472
הפונקציה המעריכית
אנליזה

הפונקציה המעריכית
אנליזה

לחצו על הנושא הרצוי

אנליזה (ללא מנה)

אנליזה (מנה)

הוצאת ארכימדס
שאלון 472

הפונקציה המעריכית
אנליזה (ללא מנה)

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של פונקציה מעריכית

במצגת נעסוק אך ורק בפונקציות מעריכיות שבהן בסיס החזקה הוא e.

דוגמאות: $f(x)=x\left(e^{x}\right)$, $g(x)=e^{2x}-e^{x}$, $h(x)=x-e^{x}$.

הצבת ערכי ln בביטויים מעריכיים

תחילה נציג נוסחה חדשה שתסייע כאשר נרצה להציב בפונקציה מעריכית ביטויים לוגריתמיים כמו ln4, ln5 ואחרים:

$$(0 < a) \;\; e^{lna} = a$$

הצבת ערכי ln בביטויים מעריכיים

הנוסחה: $e^{lna}=a \quad (0<a)$

דוגמה: הציבו $x=ln5$ בכל ביטוי, וחשבו: א. e^{x} ב. e^{2x}

פתרון: א. בעזרת הנוסחה שמעל נקבל: $e^{ln5}=5$.

ב. לאחר הצבה נקבל e^{2ln5} . נתבונן במעריך החזקה $2ln5$.

בעזרת חוק הלוגריתם של החזקה $log_a\left(x^n\right)=n\left(log_a x\right)$, נסיק

ש- $2ln5$ שווה ל- $ln\left(5^2\right)$ ולמעשה ל- $ln\left(25\right)$. כלומר, הביטוי e^{2ln5}

הוא למעשה e^{ln25} . בעזרת הנוסחה שמעל נקבל: $e^{ln25}=25$.

מנקודה זו והלאה, לאחר הסברים, המצגת מפנה לתרגול בכרך א' של הספר בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472:

כעת נוכל לפתור את תרגילים 2-3 בעמוד 127.

משוואות ואי־שוויונות מעריכיים שבהם בסיס החזקה הוא e

דוגמה: פתרו את המשוואה: $e^{2x} - 6e^x + 5 = 0$.

משוואות ואי־שוויונות מעריכיים שבהם בסיס החזקה הוא e

דוגמה: פתרו את המשוואה: $e^{2x} - 6e^{x} + 5 = 0$.

פתרון: הביטוי e^{2x} הוא הריבוע של הביטוי e^{x} כי: $e^{2x} = e^{x+x} = (e^{x})^2$.

בהתאם, נכתוב את המשוואה המקורית כך: $(e^{x})^2 - 6e^{x} + 5 = 0$.

נסמן $e^{x} = t$, ונקבל את המשוואה הריבועית: $t^2 - 6t + 5 = 0$

שפתרונותיה: $t = 1$ ו־ $t = 5$. נציב בחזרה את ערכי t שמצאנו, ונקבל:

$$e^{x} = 5 \rightarrow x = \frac{ln5}{lne} = 1.609 \qquad e^{x} = 1 \rightarrow e^{x} = e^{0} \rightarrow x = 0$$

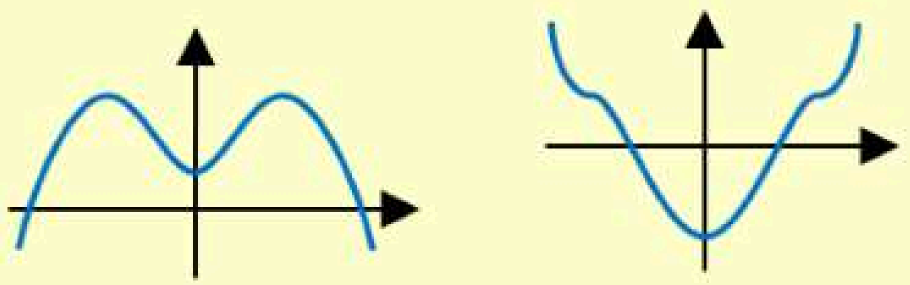
לסיכום, שני פתרונות המשוואה הם: $x = 0$ ו־ $x = 1.609$.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 4-5 בעמוד 128.

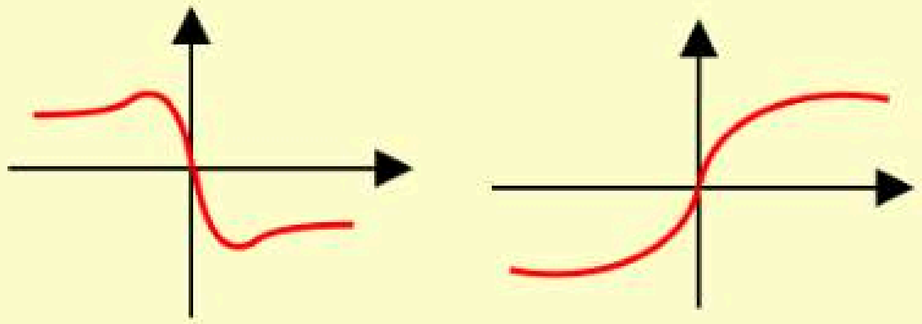
זוגיות ואי־זוגיות של פונקציה מעריכית

תזכורת!

הפונקציה $f(x)$ היא **פונקציה זוגית**, אם לכל x בתחום ההגדרה שלה מתקיים: $f(-x)=f(x)$. הגרף של פונקציה זוגית הוא **סימטרי ביחס לציר ה־y** כפי שניתן לראות בגרפים משמאל:

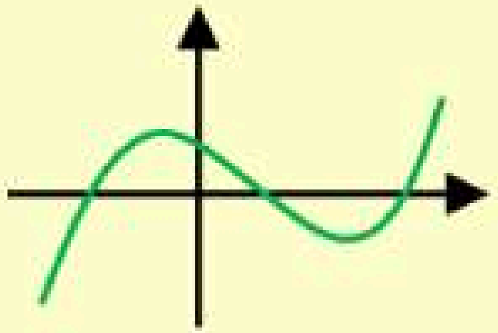


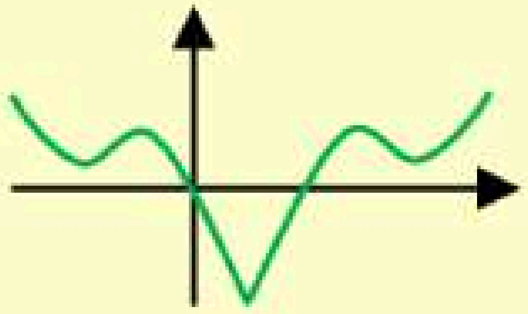
הפונקציה $f(x)$ היא **פונקציה אי־זוגית**, אם לכל x בתחום ההגדרה שלה מתקיים: $f(-x)=-f(x)$. הגרף של פונקציה אי־זוגית הוא **סימטרי ביחס לראשית הצירים** כפי שניתן לראות בגרפים משמאל:



זוגיות ואי־זוגיות של פונקציה מעריכית

קיימות גם **פונקציות שאינן זוגיות ואינן אי־זוגיות**. הגרפים של פונקציות אלו אינם סימטריים ביחס לציר ה־y ואינם סימטריים ביחס לראשית הצירים כפי שניתן לראות בגרפים:





זוגיות ואי־זוגיות של פונקציה מעריכית

דוגמה: עבור כל פונקציה קבעו אם היא זוגית, אי־זוגית או שאינה זוגית ואינה אי־זוגית:

א. $f\left(x\right)=e^{x^2}$

ב. $g\left(x\right)=x\left(e^2\right)$

ג. $h\left(x\right)=e^{x-1}$

זוגיות ואי־זוגיות של פונקציה מעריכית

דוגמה: עבור כל פונקציה קבעו אם היא זוגית, אי־זוגית או שאינה זוגית ואינה אי־זוגית:

א. $f(x) = e^{x^2}$ ב. $g(x) = x\left(e^2\right)$ ג. $h(x) = e^{x-1}$

פתרון:

נבדוק את הביטוי המתקבל עבור הצבת הביטוי (-x) במקום x בכל פונקציה:

א. מתקיים: $f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x)$, ולכן הפונקציה היא זוגית.

ב. מתקיים: $g(-x) = (-x)\left(e^{(-x)^2}\right) = (-x)e^{x^2} = -g(x)$, ולכן היא אי־זוגית.

זוגיות ואי־זוגיות של פונקציה מעריכית

המשך פתרון:

ג. מתקיים: $e^{-x-1} = e^{(-x)-1} = h(-x)$, והביטוי שהתקבל אינו שווה

ל־$h(x)$ ואינו שווה ל־$h(-x)$. לכן הפונקציה אינה זוגית ואינה אי־זוגית.

נוכל להראות זאת גם על ידי הצבת הערכים הנגדיים $x = 1$ ו־$x = -1$.

נקבל: $h(1) = e^{-1-1} = e^{-2}$ ו־$h(-1) = e^{1-1} = 1$. ערכים אלו אינם זהים,

ולכן הפונקציה אינה זוגית, וגם אינם נגדיים, ולכן אינה אי־זוגית.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 6-7 בעמוד 129.

הנגזרת של פונקציה מעריכית ומשוואת המשיק

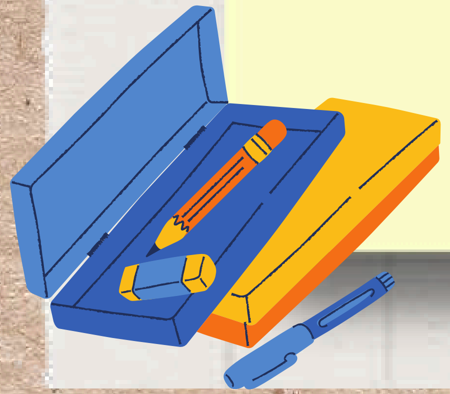
נגזרת הפונקציה המעריכית $f(x) = e^x$ היא $f'(x) = e^x$. כלומר: $(e^x)' = e^x$.

כאשר נגזור פונקציות בפרק זה ובהמשך, נסתמך על חוקי הגזירה שאנו מכירים:

נגזרת של **פונקציית חזקה**: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

נגזרת של פונקציה שהוכפלה **במספר קבוע**: $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

נגזרת של **סכום והפרש** פונקציות: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$



הנגזרת של פונקציה מעריכית ומשוואת המשיק

דוגמאות:

הנגזרת של הפונקציה $f\left(x\right)=3e^{x}+5$ היא:

הנגזרת של הפונקציה $f'\left(x\right)=3e^{x}$ היא:

$$g\left(x\right)=x^{2}-7e^{x}$$

$$g'\left(x\right)=2x-7e^{x}$$

כעת נוכל לפתור את תרגיל 1 בעמוד 130.

תזכורת! שיפוע הישר המשיק

שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = x_1$ שווה לערך הנגזרת באותה נקודה, כלומר ל־ $f'(x_1)$.

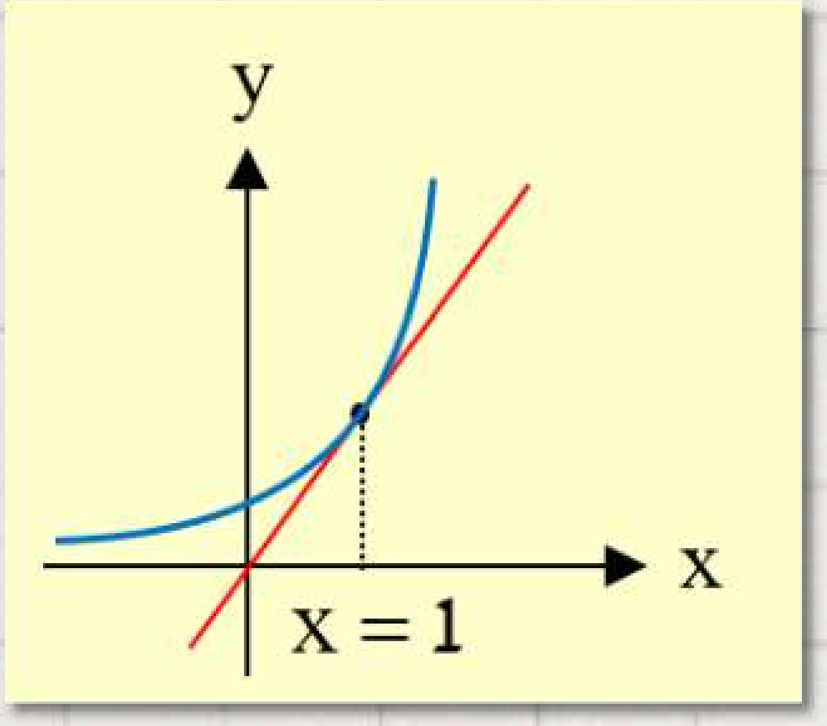
נהוג לסמן את שיפוע המשיק באות m. כאשר שיעורי נקודת ההשקה הם (x_1, y_1) משוואת המשיק היא: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

תזכורת! שיפוע הישר המשיק

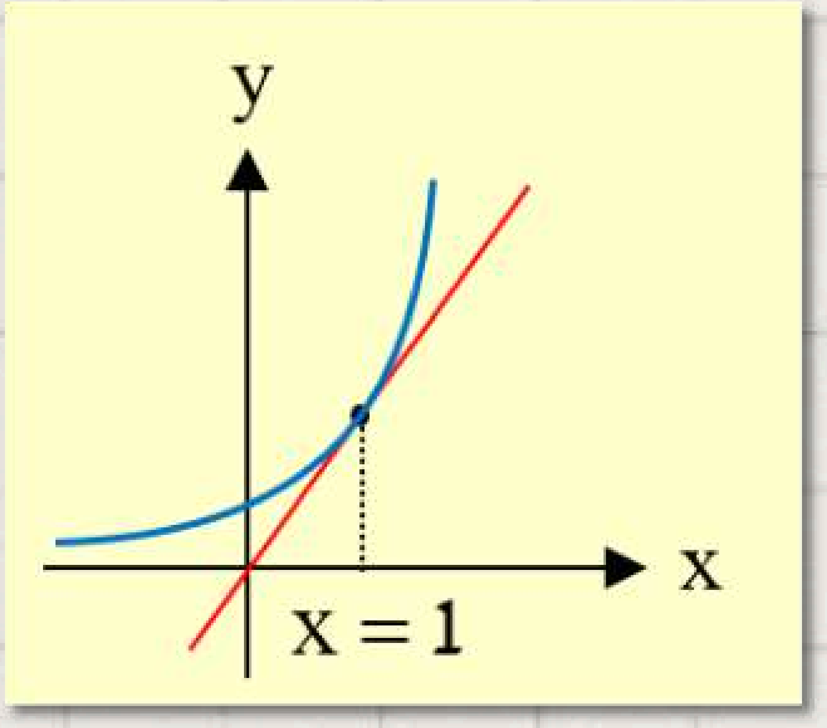
דוגמה: לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = e^x$.

מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה ששיעור ה־x שלה הוא $x = 1$.



תזכורת! שיפוע הישר המשיק



דוגמה: לפניכם גרף הפונקציה $f\left(x\right)=e^{x}$.
מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה
בנקודה ששיעור ה־x שלה הוא $x=1$.

פתרון: נמצא את שיעור ה־y של נקודת ההשקה: $f\left(1\right)=e^{1}=e$.
נקבל: $\left(1,e\right)$. נגזרת הפונקציה היא: $f'\left(x\right)=e^{x}$, ולכן השיפוע בנקודת
ההשקה הוא: $f'\left(1\right)=e^{1}=e$. משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה
$x=1$ היא: $y-e=e\left(x-1\right)\rightarrow y-e=ex-e\rightarrow y=ex$.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 2-4 בעמוד 131.

הנגזרת של פונקציה מורכבת מהסוג $y=e^{f(x)}$

התבוננו בפונקציות הבאות: $g\left(x\right)=e^{x+5}$, $h\left(x\right)=e^{x^2}$, $k\left(x\right)=e^{x^2+x}$.

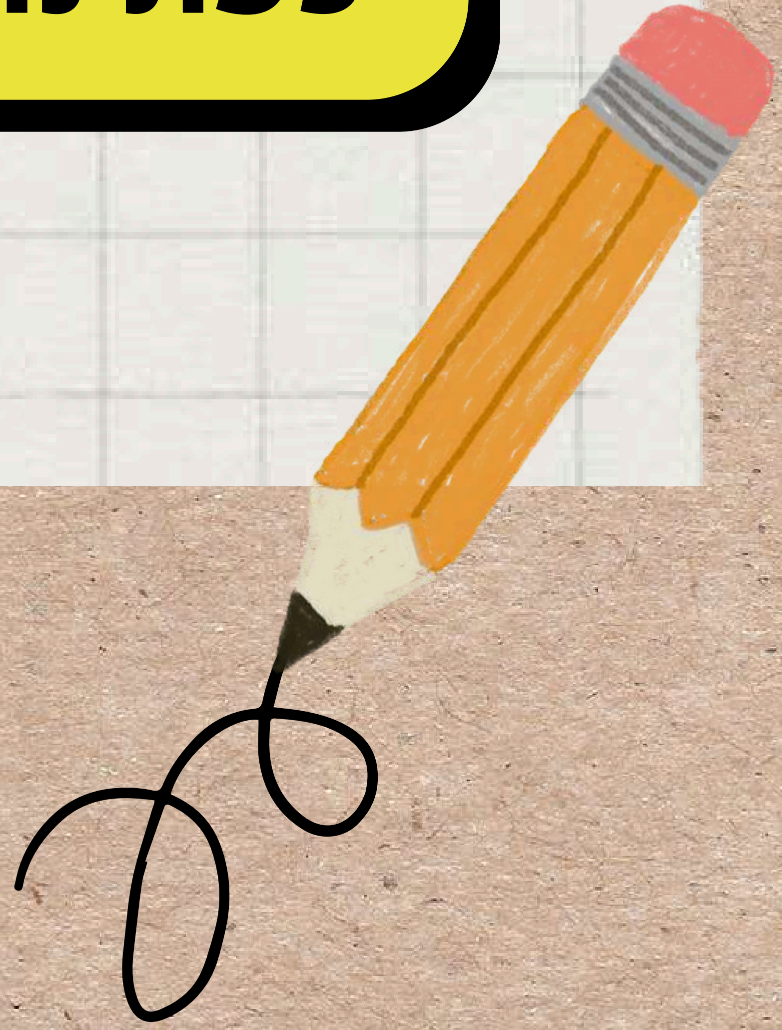
בכל אחת מהן מופיעה פונקציה כלשהי במעריך החזקה.

כאשר נרצה לגזור פונקציה מסוג זה, עלינו להתחשב **בנגזרת הפנימית** של הפונקציה המופיעה בחזקה לפי הנוסחה: $\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}\cdot f'\left(x\right)$.

כדוגמאות נגזור את שלוש הפונקציות שהוצגו למעלה:

$g'\left(x\right)=e^{x+5}\cdot 1=e^{x+5}$, $h'\left(x\right)=e^{x^2}\cdot 2x=2xe^{x^2}$ ، $k'\left(x\right)=e^{x^2+x}\cdot\left(2x+1\right)$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 5-10 בעמודים 131-132.



תזכורת! גזירת מכפלה של פונקציות

נתבונן בפונקציה $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ שהיא מכפלת הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

כפי שלמדנו בעבר, אם הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ ניתנות לגזירה אז נגזרת המכפלה היא:

$h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$.

דוגמה: נגזור את הפונקציה $f(x)=x^2\cdot e^x$, ונקבל:

$$f'(x)=2x\cdot e^x+e^x\cdot x^2=xe^x(2+x)$$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 11-14 בעמודים 132-133.

תזכורת! גזירת פונקציה מורכבת

נתבונן בפונקציה $g(x)=\left[f(x)\right]^n$ שבה מעלים את הפונקציה $f(x)$ בחזקת n.

כפי שלמדנו, אם הפונקציה $f(x)$ ניתנת לגזירה אז הנגזרת היא: $g'(x)=n\cdot\left(f(x)\right)^{n-1}\cdot f'(x)$.

דוגמה: נגזור את הפונקציה $f(x)=(2e^x+1)^5$, ונקבל:

$$f'(x)=5(2e^x+1)^4\cdot(2e^x)=10e^x(2e^x+1)^4$$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 15-18 בעמודים 133-134.

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של פונקציה מעריכית

לפני שנעסוק במציאת שיעורי נקודות הקיצון, נפתור משוואות מהסוג שנידרש לפתור כאשר נשווה את הנגזרת ל־0.

דוגמה: פתרו את המשוואה: $x^2e^x - ex^2 = 0$.

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של פונקציה מעריכית

לפני שנעסוק במציאת שיעורי נקודות הקיצון, נפתור משוואות מהסוג שנידרש לפתור כאשר נשווה את הנגזרת ל־0.

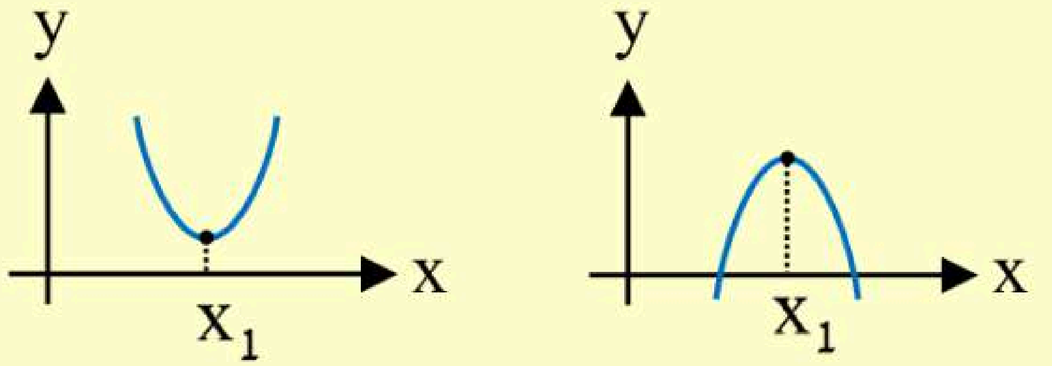
דוגמה: פתרו את המשוואה: $x^2e^x - ex^2 = 0$.

פתרון: נוציא את הגורם המשותף x^2 ונקבל: $x^2\left(e^x - e\right) = 0$.
התקבלה מכפלה של שני גורמים שערכה 0. ניתן להסיק שכל אחד משני הגורמים עשוי להיות שווה ל־0 כך שמתקבלות שתי משוואות:
הראשונה: $x^2 = 0 \rightarrow x = 0$.
השנייה: $e^x - e = 0 \rightarrow e^x = e \rightarrow e^x = e^1 \rightarrow x = 1$.

לסיכום, פתרונות המשוואה הם: $x = 0$, $x = 1$.

כעת נוכל לפתור את תרגיל 19 בעמוד 134.

תזכורת! כיצד מוצאים את נקודות הקיצון של הפונקציה?



נתייחס לנקודה ששיעור ה־x שלה הוא x_1 הנמצאת על
גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום שבו הפונקציה גזירה ומוגדרת.
אם הנקודה x_1 היא נקודת קיצון פנימית של הפונקציה $f(x)$ אז: $\mathbf{f'(x_1)=0}$.

כפי שלמדנו, כאשר נרצה למצוא את שיעור ה־x של נקודות הקיצון של פונקציה, תחילה נבדוק אילו ערכי x מאפסים את הנגזרת. ערכים אלו "חשודים" כערכי ה־x של נקודות קיצון.
לאחר מכן ניעזר בטבלת עלייה וירידה, ונבדוק את סימן הנגזרת. כך נדע אם מדובר בנקודת קיצון, ומהו סוג הקיצון, או שזוהי נקודה שבה הנגזרת מתאפסת, אך היא אינה נקודת קיצון.

תזכורת! כיצד מוצאים את נקודות הקיצון של הפונקציה?

דוגמה: נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x+3}+e^{1-x}$. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, את סוג הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

תזכורת! כיצד מוצאים את נקודות הקיצון של הפונקציה?

דוגמה: נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x+3} + e^{1-x}$. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, את סוג הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה.

פתרון: תחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל x.
הנגזרת היא: $f'(x) = e^{x+3} - e^{1-x}$. נשווה את הנגזרת ל־0, ונקבל:

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^{x+3} - e^{1-x} = 0 \rightarrow e^{x+3} = e^{1-x}$$

$$\rightarrow x + 3 = 1 - x \rightarrow 2x = -2 \rightarrow x = -1$$

הנקודה שבה $x = -1$ היא "חשודה" כנקודת קיצון.

תזכורת! כיצד מוצאים את נקודות הקיצון של הפונקציה?

המשך הפתרון: נציב את הנקודה החשודה בקיצון בטבלת עלייה וירידה.

תחום ערכי x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x$
סימן הנגזרת	-	0	+
עלייה/ירידה של הפונקציה	↘	min	↗

מהטבלה נסיק שנקודה זו נקודת מינימום. כעת נציב $x=-1$ בפונקציה $f(x)$, את שיעור ה־y: $f(-1)=e^{(-1)+3}+e^{1-(-1)}=e^2+e^2=2e^2$

לכן לפונקציה נקודת קיצון יחידה והיא: $min\left(-1,2e^2\right)$.

מהטבלה נסיק שהפונקציה עולה בתחום $-1<x$ ויורדת בתחום $x<-1$.

כעת נוכל לפתור את תרגיל 20 בעמוד 135.

21. נתונה הפונקציה: $f(x)=x^5\cdot e^x$.

א. מצאו את שיעורי ה־x של הנקודות שעבורן מתקיים: $f'(x)=0$.

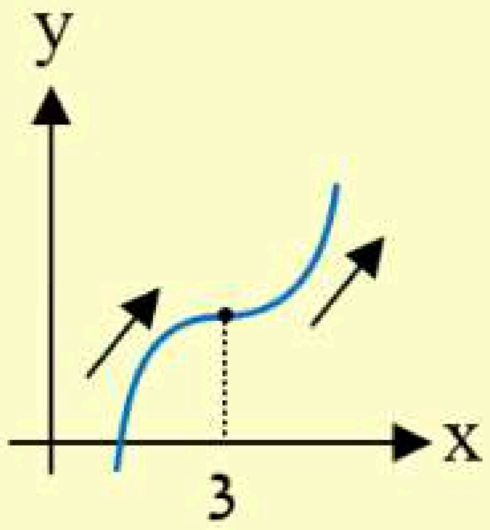
ב. ניתאי טען: "שני שיעורי ה־x שהתקבלו מייצגים נקודות קיצון." האם הוא צודק? הסבירו.

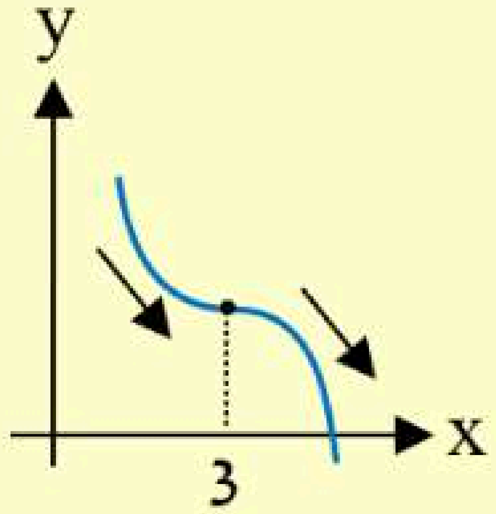
21. נתונה הפונקציה: $f(x)=x^5\cdot e^x$.

א. מצאו את שיעורי ה־x של הנקודות שעבורן מתקיים: $f'(x)=0$.

ב. ניתאי טען: "שני שיעורי ה־x שהתקבלו מייצגים נקודות קיצון." האם הוא צודק? הסבירו.

בשאלה הקודמת עסקנו בנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה,
ואף על פי שערך הנגזרת בה הוא 0, היא **אינה נקודת קיצון**.
כפי שלמדנו בעבר, נקודות מסוג זה הן חלק מתחומי העלייה
או הירידה של הפונקציה, אף על פי שערך הנגזרת בהן הוא 0.
בגרפים משמאל הנקודה ששיעור ה־x שלה הוא 3 היא מסוג זה.

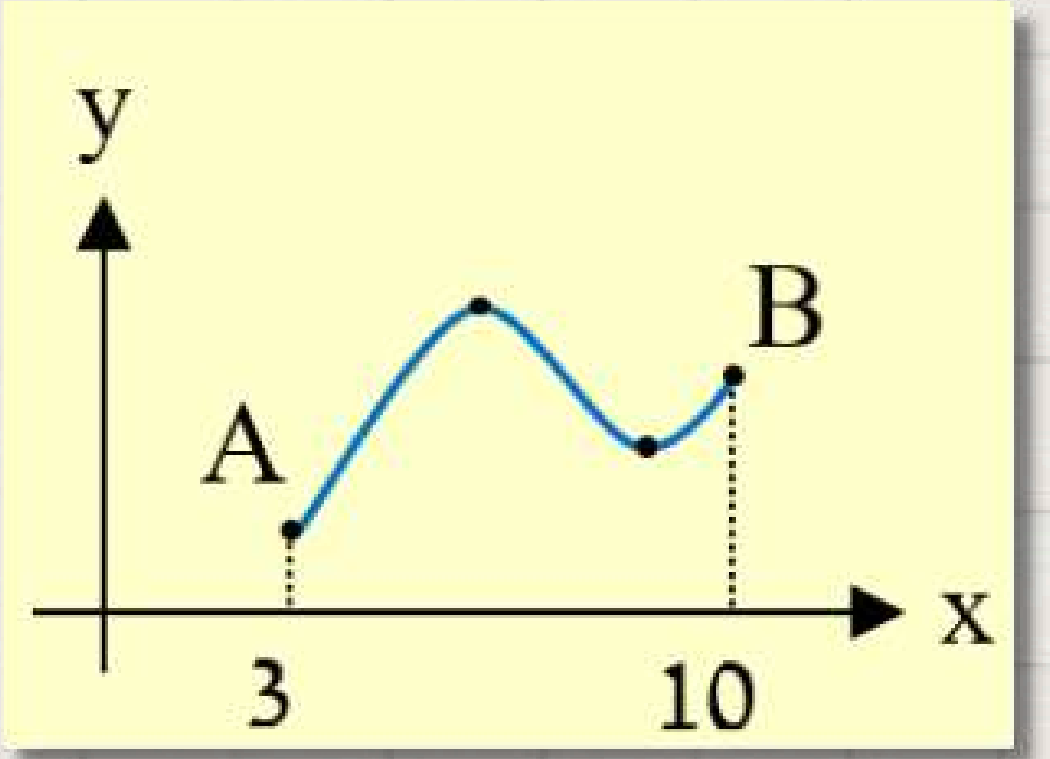




כעת נוכל לפתור את תרגילים 22-24 בעמוד 136.

תזכורת! מהן נקודות קיצון בקצה תחום סגור?

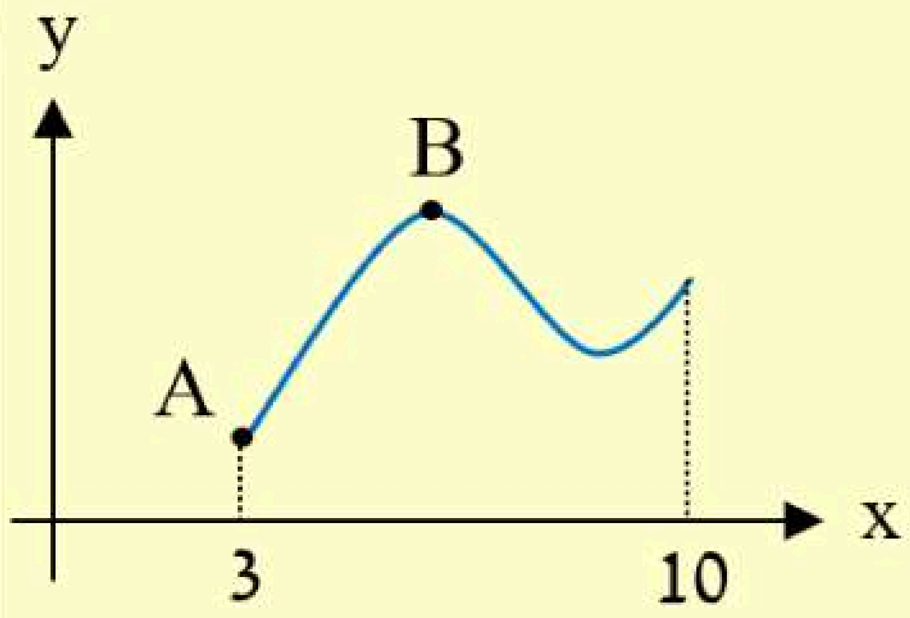
לפניכם גרף פונקציה בתחום הסגור $3 \le x \le 10$.
הנקודות A ו־B הן נקודות קיצון **בקצה התחום**,
ושיעורי ה־x שלהן הם $x = 3$ ו־ $x = 10$
בהתאמה. נמצא את שיעורי ה־y שלהן על ידי
הצבת ערכי x אלו בפונקציה.



שימו לב! ניתן לסמן תחום סגור בשתי דרכים:
לדוגמה: $3 \le x \le 10$ או $[3, 10]$.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 25-26 בעמוד 136.

תזכורת! מהן נקודות קיצון מוחלט?



לפניכם גרף פונקציה בתחום הסגור $3 \le x \le 10$.
הנקודה A היא **נקודת מינימום מוחלט** של הפונקציה $f(x)$ כי שיעור ה-y שלה הוא **הקטן ביותר** מבין כל הנקודות שעל גרף הפונקציה. הנקודה B היא **נקודת מקסימום מוחלט** של הפונקציה $f(x)$ כי שיעור ה־y שלה הוא **הגדול ביותר** מבין כל הנקודות שעל גרף הפונקציה.

תזכורת! מהן נקודות קיצון מוחלט?

דוגמה: מצאו את שיעורי נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x) = x \cdot e^x$ בתחום: $-2 \le x \le 1$.

תזכורת! מהן נקודות קיצון מוחלט?

דוגמה: מצאו את שיעורי נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה

$f\left(x\right)=x\cdot e^{x}$ בתחום: $-2\le x\le 1$.

פתרון: תחילה נמצא את שיעורי **נקודת הקיצון הפנימית:**

$$f'\left(x\right)=e^{x}+xe^{x}=(x+1)e^{x}$$

$$f'\left(x\right)=0\rightarrow(x+1)e^{x}=0\quad /:e^{x}\rightarrow x+1=0\rightarrow x=-1$$

נמצא את שיעור ה־y של נקודת הקיצון: $f\left(-1\right)=(-1)e^{-1}=-\frac{1}{e}$

נוכל להיעזר בטבלת עלייה ולראות ש- $\left(-1,-\frac{1}{e}\right)$ היא נקודת מינימום.

תזכורת! מהן נקודות קיצון מוחלט?

המשך פתרון: נקודות קיצון מוחלט עשויות להיות נקודות קיצון **פנימיות** ועשויות גם להימצא **בקצה התחום**. כדי לבדוק זאת, נמצא כעת את שיעורי ה־y של נקודות הקיצון בקצות התחום:

בקצה הימני כאשר $x=1$ נקבל: $f(1)=1\left(e^{1}\right)$,

ולכן נקודת הקיצון היא $(1,e)$.

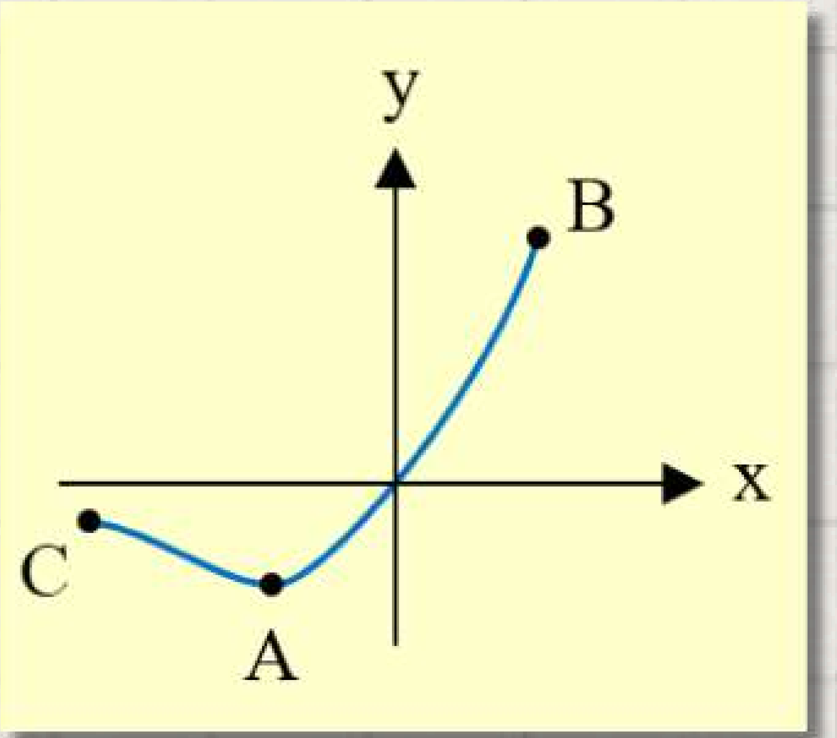
בקצה השמאלי כאשר $x=-2$ נקבל: $f(-2)=-2\left(e^{-2}\right)=-\frac{2}{e^{2}}$,

ולכן נקודת הקיצון היא $\left(-2,-\frac{2}{e^{2}}\right)$.

תזכורת! מהן נקודות קיצון מוחלט?

המשך הפתרון:

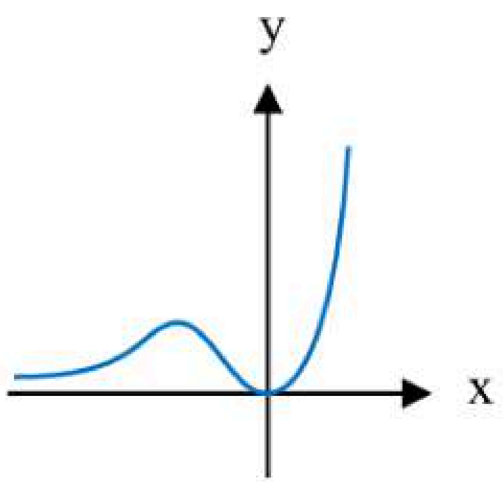
נסמן את נקודות הקיצון A , B ו־C במערכת הצירים. נוכל להסתמך על שיעורי ה־y בלבד ולקבוע שנקודת **המינימום המוחלט** היא נקודת הקיצון הפנימית $A\left(-1,-\frac{1}{e}\right)$, שנקודת **המקסימום המוחלט** היא נקודת הקיצון בקצה התחום $B\,(1,e)$ ושהנקודה $C\left(-2,-\frac{2}{e^2}\right)$ היא נקודת מקסימום **בקצה התחום.**



כעת נוכל לפתור את תרגילים 27-30 בעמודים 137-138.

חקירת פונקציה מעריכית כאשר הגרף שלה נתון

1. לפניכם גרף הפונקציה: $f(x) = x^2 \cdot e^{x+1}$.



א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש כאלו.
3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.
4. תחומי העלייה והירידה.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = (x+1)^2 \cdot e^{x+2}$.

1. איזו טרנספורמציה יש לבצע על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שיתקבל גרף הפונקציה $g(x)$?
2. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
3. האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון מוחלט? הסבירו.

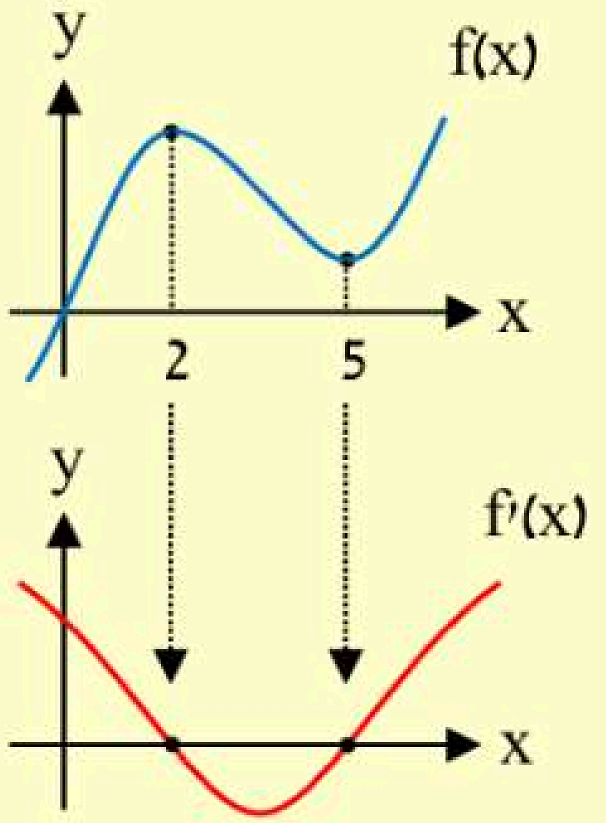
ג. בקישור משמאל מופיעה פעילות דיגיטלית הקשורה בפונקציה $f(x)$.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 2-16 בעמודים 142-147.

תזכורת! הקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף פונקציית הנגזרת

תחילה נציין שנעסוק בקשר זה רק בתחום שבו גם הפונקציה וגם פונקציית הנגזרת מוגדרות.

נזכיר את הנושא בעזרת גרף הפונקציה $f(x)$ (העליון), ובעזרת גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (התחתון).



בנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$, שיפוע הגרף הוא 0,

ובהן פונקציית הנגזרת $f'(x)$ **מתאפסת**.

בתחום שבו **הפונקציה $f(x)$ עולה**, ניתן להסיק שפונקציית הנגזרת $f'(x)$

אי־שלילית, וגרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ נמצא **על ציר ה־x או מעליו**.

בתחום שבו **הפונקציה $f(x)$ יורדת**, ניתן להסיק שפונקציית הנגזרת $f'(x)$

אי־חיובית, וגרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ נמצא **על ציר ה־x או מתחתיו**.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 17-29 בעמודים 148-151.

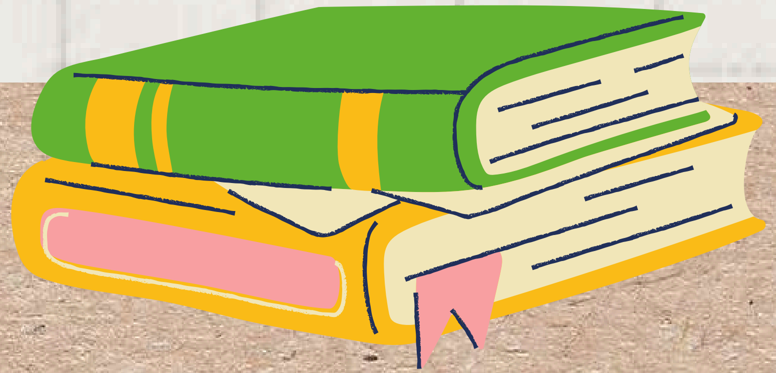
הוצאת ארכימדס
שאלון 472

הפונקציה המעריכית
אנליזה (מנה)

תחום הגדרה של פונקציה מעריכית

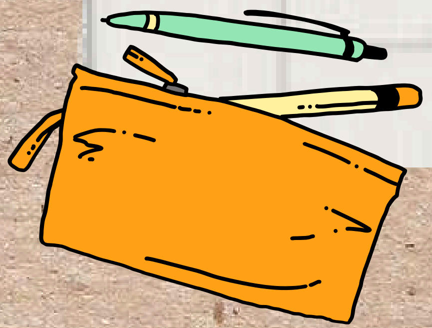
תזכורת!

תחום הגדרה של פונקציה הוא אוסף ערכי ה־x שניתן להציב בה כך שלא יתקבל ביטוי חסר משמעות.



תחום הגדרה של פונקציה מעריכית

בפונקציות המעריכיות שבהן נעסוק, המונה מוגדר לכל x.
כפי שעשינו בעבר בפונקציות מנה, נוכל למצוא את תחום ההגדרה
של הפונקציה לאחר שנבדוק עבור אילו ערכי x המכנה מתאפס.
לדוגמה, בפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{x-5}$ המכנה מתאפס עבור $x = 5$,
ולכן תחום ההגדרה הוא $x \neq 5$.



כעת נוכל לפתור את תרגילים 1-4 בעמוד 155.

אסימפטוטה אנכית

5. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הצירים? הסבירו.

ג. מלאו את טבלת הערכים לפניכם.
התחילו מהתא **הימני**, והתקדמו שמאלה:

x	0	0.1	0.2	0.4	1
f(x)					

ד. מה ניתן לומר על ערכי ה־y של הפונקציה, ככל שמציבים בה ערכי x **חיוביים** אשר הולכים ומתקרבים לערך $x=0$ שבו היא אינה מוגדרת?

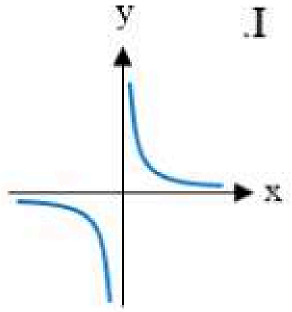
ה. מלאו את טבלת הערכים לפניכם.
התחילו מהתא **השמאלי**, והתקדמו ימינה:

x	-1	-0.4	-0.2	-0.1	0
f(x)					

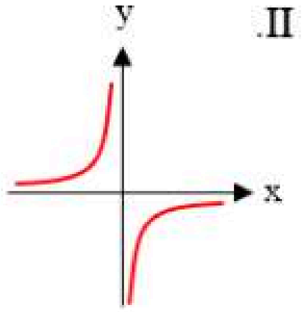
ו. מה ניתן לומר על ערכי ה־y של הפונקציה, ככל שמציבים בה ערכי x **שליליים** אשר הולכים ומתקרבים לערך $x=0$ שבו היא אינה מוגדרת?

ז. היעזרו בטבלאות שמילאתם, וקבעו איזה מהגרפים I-II הוא גרף הפונקציה $f(x)$:

I.



II.



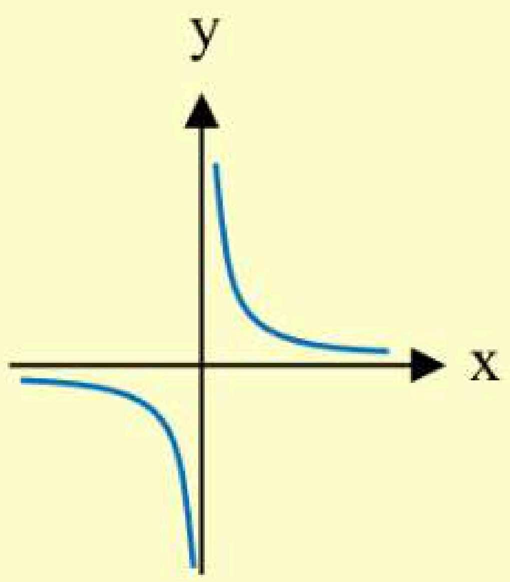
ח. מיתר טענה: "ברביע הראשון, ככל שננוע על גרף הפונקציה מימין לשמאל, ערכי ה־y הולכים ושואפים לאין־סוף $(+\infty)$." האם היא צודקת? היעזרו בהצבת הערך $x=0.001$ והסבירו.

ט. אדר טען: "ברביע השלישי, ככל שננוע על גרף הפונקציה משמאל לימין, ערכי ה־y הולכים ושואפים למינוס אין־סוף $(-\infty)$." האם הוא צודק? היעזרו בהצבת הערך $x=-0.001$ והסבירו.

אסימפטוטה אנכית

בשאלה הקודמת מצאנו שהפונקציה אינה מוגדרת כאשר $x=0$. מהטבלה עולה כי:

- ככל שערכי ה־x השליליים הולכים ומתקרבים לערך $x=0$ מכיוון **שמאל**, ערכי ה־y הם שליליים, **הולכים וקטנים** ללא הגבלה, ולמעשה שואפים **למינוס אין־סוף** $-\infty$.
- ככל שערכי ה־x החיוביים הולכים ומתקרבים לערך $x=0$ מכיוון **ימין**, ערכי ה־y הם חיוביים, **הולכים וגדלים** ללא הגבלה, ולמעשה שואפים **לפלוס אין־סוף** $+\infty$.

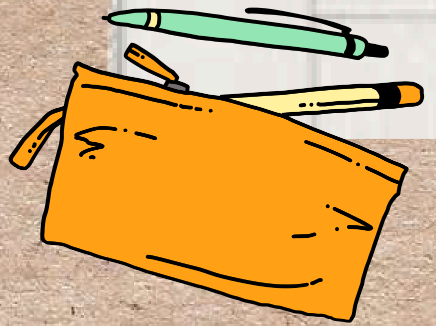


בשנה שעברה עסקנו ב**אסימפטוטות אנכיות**. למעשה, הישר $x=0$ שהוא ציר ה־y, הוא האסימפטוטה האנכית של הפונקציה שבה עסקנו, ולכן הוספנו אותו לשרטוט משמאל.

מציאת אסימפטוטה אנכית

בפרק זה נמצא אסימפטוטות אנכיות כפי שמצאנו אותן בפונקציות מנה בעבר:

נמצא את ערכי ה־x המאפסים את המכנה, וכל אחד מהם מייצג אסימפטוטה אנכית. **לא נעסוק** במקרים שבהם ערך ה־ x המאפס את המכנה, אינו מייצג אסימפטוטה אנכית.



מציאת אסימפטוטה אנכית

דוגמה:

מצאו את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה: $f(x)=\dfrac{e}{e^{x}-e^{7}}$.

פתרון: נמצא את ערכי x שעבורם המכנה מתאפס:

$$e^{x}-e^{7}=0 \rightarrow e^{x}=e^{7} \rightarrow x=7$$

לכן האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $f(x)$ היא $x=7$.

מציאת אסימפטוטה אנכית

8. לידור טוענה: "מבין כל סוגי הטרנספורמציות שעסקנו בהם, רק הזזה אופקית עשויה להשפיע על האסימפטוטה **האנכית** של הפונקציה המתקבלת."

א. האם היא צודקת? הסבירו.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{e^2-e^x}$. מצאו את האסימפטוטה האנכית של הפונקציות הבאות:

1. $g(x)=f(x-5)$
2. $h(x)=f(x)+2$
3. $p(x)=2f(x+3)$
4. $k(x)=-f(x-1)$

מציאת אסימפטוטה אנכית

8. לידור טענה: "מבין כל סוגי הטרנספורמציות שעסקנו בהם, רק הזזה אופקית עשויה להשפיע על האסימפטוטה **האנכית** של הפונקציה המתקבלת."

א. האם היא צודקת? הסבירו.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x}{e^2-e^x}$. מצאו את האסימפטוטה האנכית של הפונקציות הבאות:

1. $g(x)=f(x-5)$
2. $h(x)=f(x)+2$
3. $p(x)=2f(x+3)$
4. $k(x)=-f(x-1)$

בשאלה הקודמת עסקנו בהשפעה של טרנספורמציות על האסימפטוטה האנכית. מבין אלו שעסקנו בהן, רק הזזה אופקית ושיקוף ביחס לציר ה־y עשויים להשפיע על האסימפטוטה האנכית.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 9-12 בעמוד 158.

הנגזרת של פונקציה מעריכית עם מנה ומשוואת המשיק

נתבונן בפונקציה $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$ שהיא מנת הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$. כפי שלמדנו בעבר,

אם הפונקציות $f(x)$ ו־$g(x)$ ניתנות לגזירה אז נגזרת המנה היא: $h'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}$.

דוגמה: נגזור את הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$, ונקבל: $f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-e^x\cdot x^2}{(e^x)^2}=\frac{x\cancel{e}^x(2-x)}{e^{\cancel{2}x}}=\frac{x(2-x)}{e^x}$.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 3-1 בעמוד 158.

מציאת אסימפטוטה אנכית

תזכורת! שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=x_1$ שווה לערך הנגזרת באותה נקודה, כלומר ל־ $f'(x_1)$. נהוג לסמן את שיפוע המשיק באות m. כאשר שיעורי נקודת ההשקה הם (x_1,y_1) משוואת המשיק היא: $y-y_1=m\cdot(x-x_1)$.

מציאת אסימפטוטה אנכית

תזכורת! שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=x_1$ שווה לערך הנגזרת באותה נקודה, כלומר ל־$f'(x_1)$. נהוג לסמן את שיפוע המשיק באות m. כאשר שיעורי נקודת ההשקה הם (x_1,y_1) משוואת המשיק היא: $y-y_1=m\cdot(x-x_1)$.

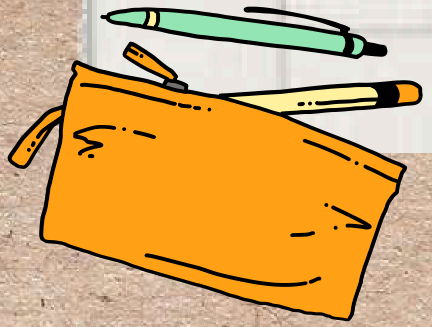
4. בכל סעיף מצאו את שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה ששיעור ה־x שלה נתון:

א. $f(x)=\frac{e^x}{x}$, $x=1$

כעת נוכל לפתור את תרגילים 5-7 בעמוד 162.

דגש חשוב בחקירת פונקציה מעריכית עם מנה!

כאשר המכנה של הפונקציה מתאפס עבור ערכי x כלשהם, עלינו למצוא את **תחום ההגדרה** ולהקפיד שערכי ה-x האלו שמצאנו, יופיעו בטבלת העלייה והירידה שבה מופיעים גם ערכי ה-x של נקודות הקיצון.
נדגים זאת.



דגש חשוב בחקירת פונקציה מעריכית עם מנה!

דוגמה: נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=\frac{e^{2x}}{x^2}$.

הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=0$ ושיעור ה-x של נק' הקיצון הוא $x=1$.

שני ערכי x האלה יופיעו בטבלת העלייה והירידה:

תחום ערכי x	$x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$1<x$
סימן הנגזרת	+		-	0	+
עלייה/ירידה של הפונקציה	↗		↘	min	↗

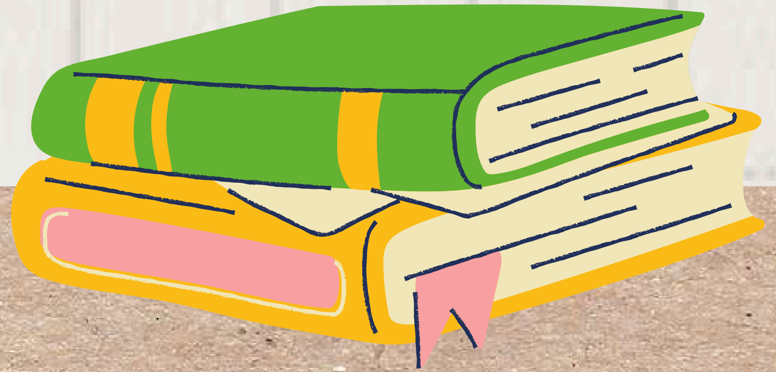
⇓ תחום הגדרה.

⇓ נק' קיצון.

כעת נוכל לפתור את תרגילים 8-11 בעמודים 162-163.

שימו לב!

שאלות סיכום בנושא חקירה מלאה של פונקציה מעריכית עם מנה מופיעות בעמודים 164-174.



למרחב ההוראה

לחצו כאן

במרחב ההוראה מאות דפי תרגול, וביניהם בחינות מתכונת. המרחב מיועד לצוותי הוראה במוסדות לימוד אשר רכשו את הספר.

למי לפנות?

לשאלות לארכימדס:

במספר 050-9074007 של הוצאת ארכימדס

להזמנות מרוכזות - פונים ל-"יש הפצות":

טלפון 03-5595354 או וואטסאפ 054-7154211