



**ארכימדס**  
מרכז מחקר

אסף לוי

**בכיוון הנכון עם ארכימדס**  
לטאלון 472

כיתה י"ב - 4 תחנות לימוד - חלק א'



2025

**הוצאת ארכימדס**

**שאלון 472**

**הפונקציה הלוגריתמית**

**אינטגרל**



**ארכימדס**  
פתרונות למידה

אסף לוי  $a^1 = a$

**בכיוון הנכון עם ארכימדס**  
לשאלון 472

כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק א'

שאלות גדיה ודניאלה  
הפונקציה האנליטית  
הפונקציה המעריכית  
חסקת ואנליטיים

$\log_a a = 1$   $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

מהדורת 2025

מכון תלמידי תיכון  
מחזור הלימודים  
17/06/2025

# הוצאת ארכימדס

## שאלון 472

# הפונקציה הלוגריתמית

## אינטגרל



# חישוב שטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה לוגריתמית



כאשר עסקנו באינטגרל של פונקציה מעריכית, חישבנו שטחים שהוגבלו על ידי גרף פונקציית הנגזרת ועל ידי ציר ה־x. כעת נחשב שטחים המוגבלים על ידי גרף פונקציית הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ועל ידי ציר ה־x. בשאלות מסוג זה נסתמך על האינטגרל המסוים לפי הנוסחה:

$$S = \int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b$$



# חישוב שטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה לוגריתמית



**דוגמה:**

נתונה הפונקציה הלוגריתמית:

$$f(x) = -2\ln^3 x + 15\ln^2 x - 36\ln x$$

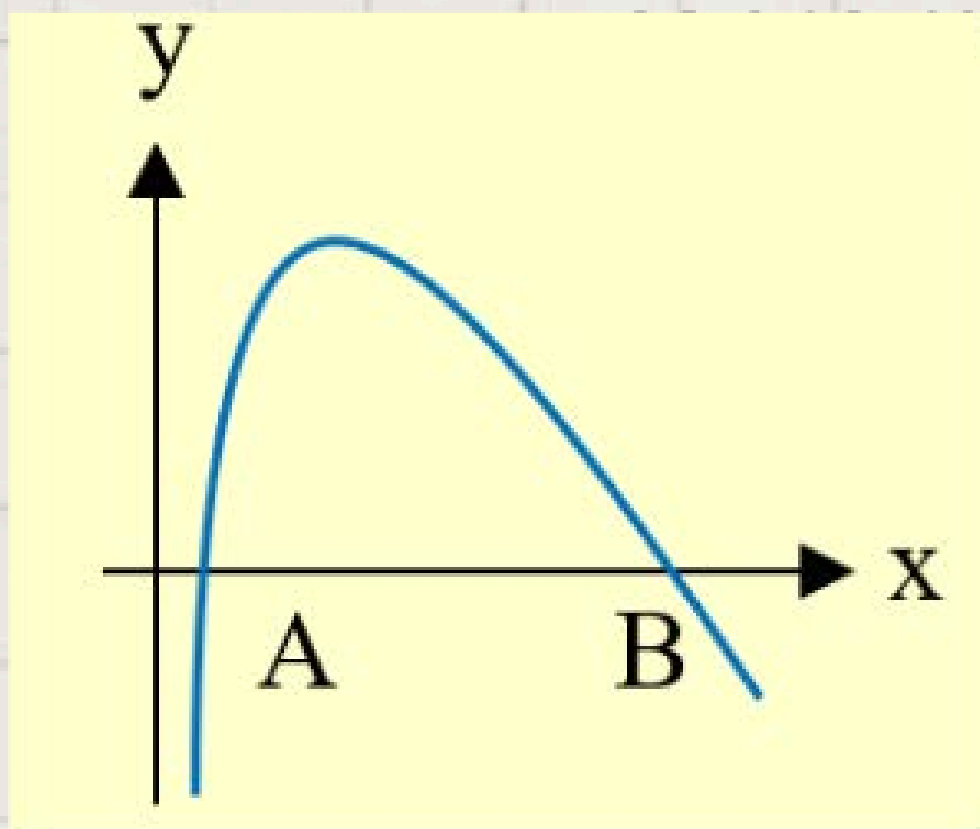
לפניכם גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום

חלקי החותך את ציר ה־x בנקודות  $A(e^2, 0)$

ו־  $B(e^3, 0)$ .

חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית

הנגזרת  $f'(x)$ , ועל ידי ציר ה־x.



# חישוב שטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה לוגריתמית



**פתרון:**

נחשב את השטח המבוקש באמצעות הצבה בנוסחת האינטגרל המסוים:

$$S = \int_{e^2}^{e^3} f'(x) dx = \left[ -2\ln^3 x + 15\ln^2 x - 36\ln x \right]_{e^2}^{e^3}$$

$$= (-54 + 135 - 108) - (-16 + 60 - 72) = \mathbf{1 \text{ יח"ר}}$$





**מנקודה זו והלאה, לאחר הסברים, המצגת מפנה לתרגול בכרך  
א' של הספר בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472:**

**כעת נוכל לפתור את תרגילים 1-5 בעמודים 241-242.**



# מציאת אינטגרל לא מסוים בעזרת פונקציה לוגריתמית



6. הכיתה התבקשה לחשב את האינטגרל הלא מסוים:  $\int \frac{1}{x} dx$ . אריק טען:

"למעשה, התבקשנו לחשב את האינטגרל הלא מסוים  $\int x^{-1} dx$ . כלומר, זהו אינטגרל של פונקציית



חזקה שניתן לחשב בעזרת הנוסחה שלמדנו:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ."

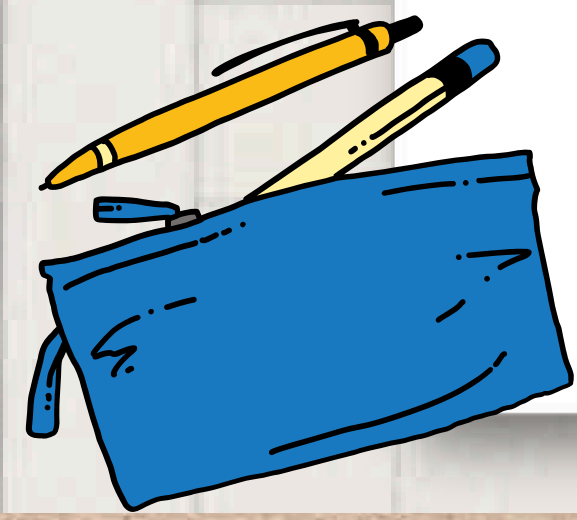
א. בדקו בעזרת הצעתו אם ניתן למצוא את האינטגרל הלא מסוים:  $\int \frac{1}{x} dx$ .

ב. נתונה הפונקציה  $f(x) = \ln x$ .

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
2. גזרו את הפונקציה  $f(x)$ .

3. היעזרו בסעיף הקודם, ומצאו את האינטגרל הלא מסוים:  $\int \frac{1}{x} dx$ .

ג. גל טען: "כאשר  $x < 0$  לא ייתכן ש:  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ ". האם הוא צודק? הסבירו.





# מציאת אינטגרל לא מסוים בעזרת פונקציה לוגריתמית

בשאלה הקודמת מצאנו שבתחום  $x > 0$  מתקבל האינטגרל:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$$

נשים לב שבתחום  $x < 0$  נמצא את האינטגרל לפי הנוסחה:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$



# מציאת אינטגרל לא מסוים בעזרת פונקציה לוגריתמית



נזכיר את חוקי האינטגרציה שחלים על כל פונקציה בעלת פונקציה קדומה:

$$\int k dx = kx + c$$

אינטגרל של מספר קבוע:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

אינטגרל של פונקציית חזקה:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

אינטגרל של פונקציה שהוכפלה במספר קבוע:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

אינטגרל של סכום  
והפרש פונקציות:

# מציאת אינטגרל לא מסוים בעזרת פונקציה לוגריתמית



בדוגמאות הבאות נניח שהמכנה הוא חיובי:

$$\int \left( 2x - \frac{1}{x} \right) dx = x^2 - \ln(x) + c$$

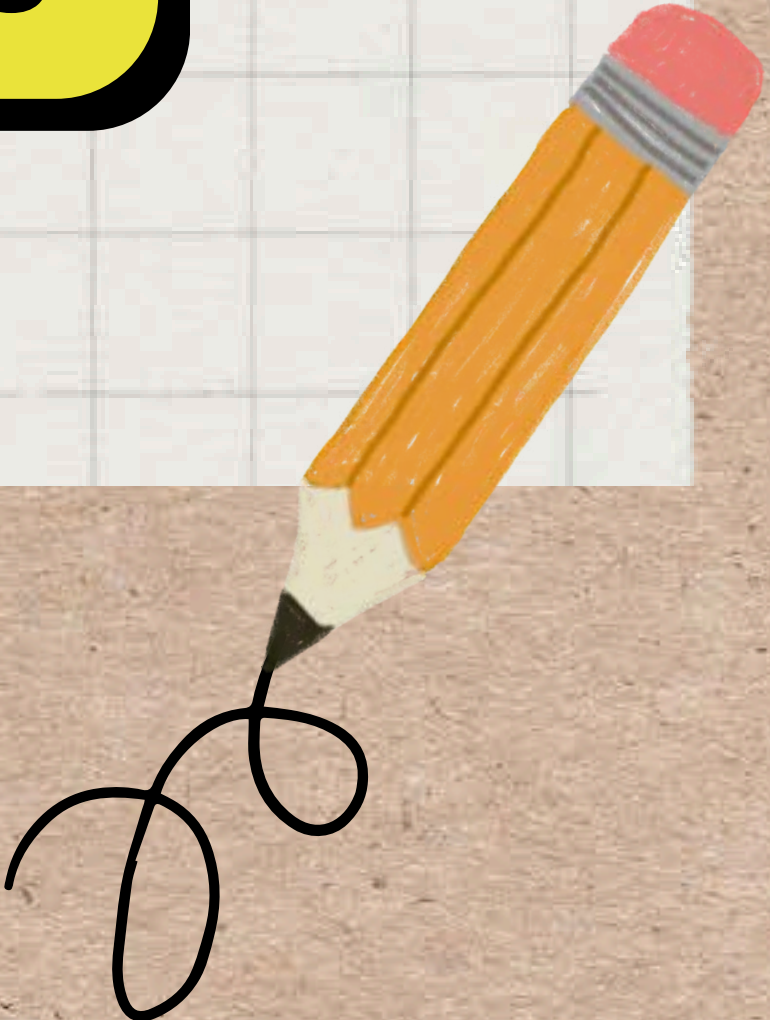
$$\int \left( \frac{1}{x} + 3 \right) dx = \ln(x) + 3x + c$$

$$\int \left( \frac{7}{x} \right) dx = 7\ln(x) + c$$





**כעת נוכל לפתור את תרגיל 7 בעמוד 243.**



# מציאת אינטגרל לא מסוים בעזרת פונקציה לוגריתמית



כעת נעסוק באינטגרל שבו המכנה ביטוי ליניארי:  $\int \frac{1}{mx + b} dx$

כאשר  $0 < mx + b$  נמצא את האינטגרל לפי הנוסחה:

$$\int \frac{1}{mx + b} dx = \frac{\ln(mx + b)}{m} + c$$

כאשר  $mx + b < 0$  נמצא את האינטגרל לפי הנוסחה:

$$\int \frac{1}{mx + b} dx = \frac{\ln |mx + b|}{m} + c$$



# מציאת אינטגרל לא מסוים בעזרת פונקציה לוגריתמית



## דוגמאות:

נניח שהמכנה הוא חיובי ונמצא את האינטגרל:

$$\int \frac{1}{2x + 3} dx = \frac{\ln(2x + 3)}{2} + c$$

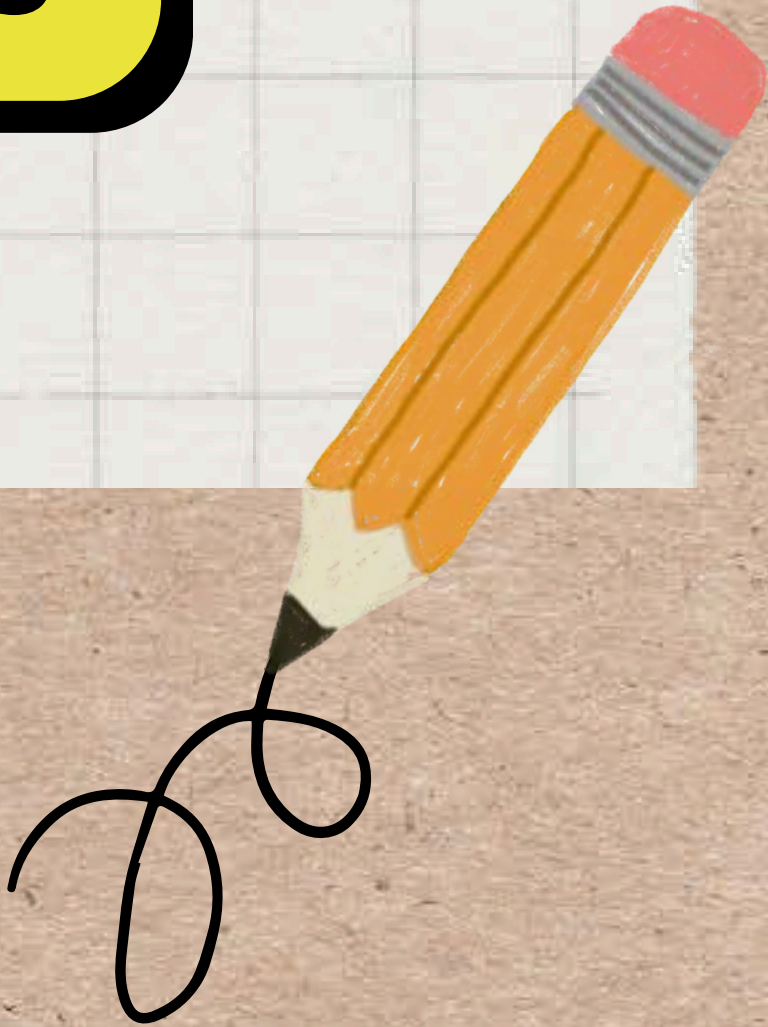
נניח שהמכנה הוא שלילי ונמצא את האינטגרל:

$$\int \frac{5}{-6x + 7} dx = \frac{5 \ln |-6x + 7|}{-6} + c$$





**כעת נוכל לפתור את תרגילים 8-9 בעמוד 244.**





# מציאת הפונקציה הקדומה

**דוגמה:** הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $x > 0$ . נתון:  $f(1) = 9$ .

נתונה הנגזרת  $f'(x) = \frac{6}{x} + 2$ . מצאו את הפונקציה הקדומה  $f(x)$ .



# מציאת הפונקציה הקדומה

**דוגמה:** הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $x > 0$ . נתון:  $f(1) = 9$ .

נתונה הנגזרת  $f'(x) = \frac{6}{x} + 2$ . מצאו את הפונקציה הקדומה  $f(x)$ .

**פתרון:** נמצא את האינטגרל הלא מסוים:

$$f(x) = \int \left( \frac{6}{x} + 2 \right) dx \rightarrow f(x) = 6 \ln x + 2x + c$$

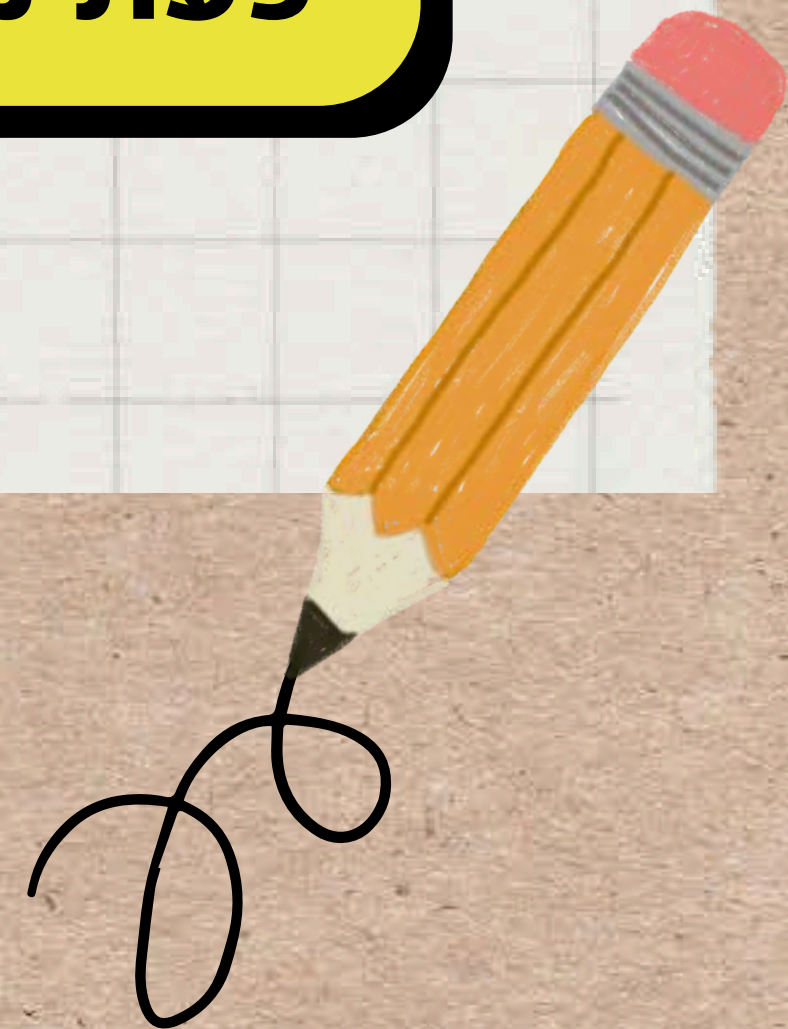
נציב את הנתון  $f(1) = 9$ :

$$f(1) = 6 \ln 1 + 2(1) + c = 9 \rightarrow 6(0) + 2 + c = 9 \rightarrow c = 7$$

לסיכום, הפונקציה הקדומה היא:  $f(x) = 6 \ln x + 2x + 7$ .



**כעת נוכל לפתור את תרגילים 10-14 בעמודים 244-245.**





## האינטגרל המסוים

**דוגמה:** חשבו את האינטגרלים: א.  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$  ב.  $\int_1^3 \frac{4}{2x-1} dx$



## האינטגרל המסוים

**דוגמה:** חשבו את האינטגרלים: א.  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$  . ב.  $\int_1^3 \frac{4}{2x-1} dx$

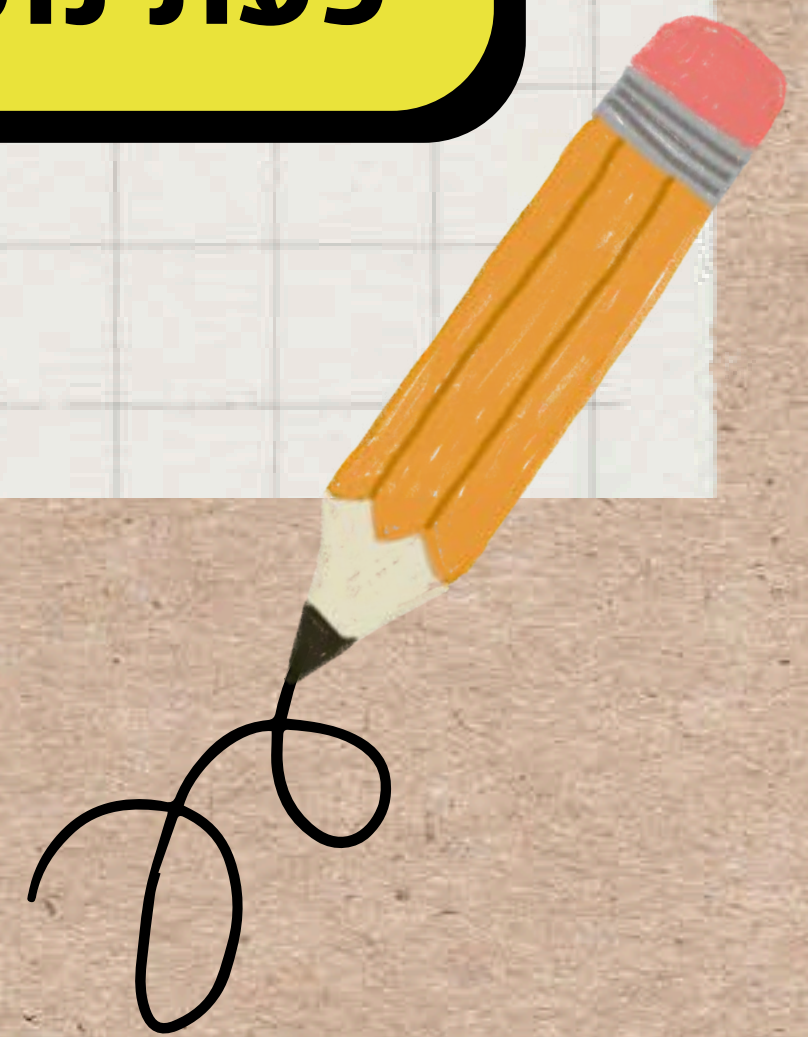
**פתרון:**

א.  $\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

ב.  $\int_1^3 \frac{4}{2x-1} dx = \left[ 4 \left( \frac{\ln(2x-1)}{2} \right) \right]_1^3 = 2\ln 5 - 2\ln 1 = 2\ln 5$



**כעת נוכל לפתור את תרגילים 15-57 בעמוד 246.**

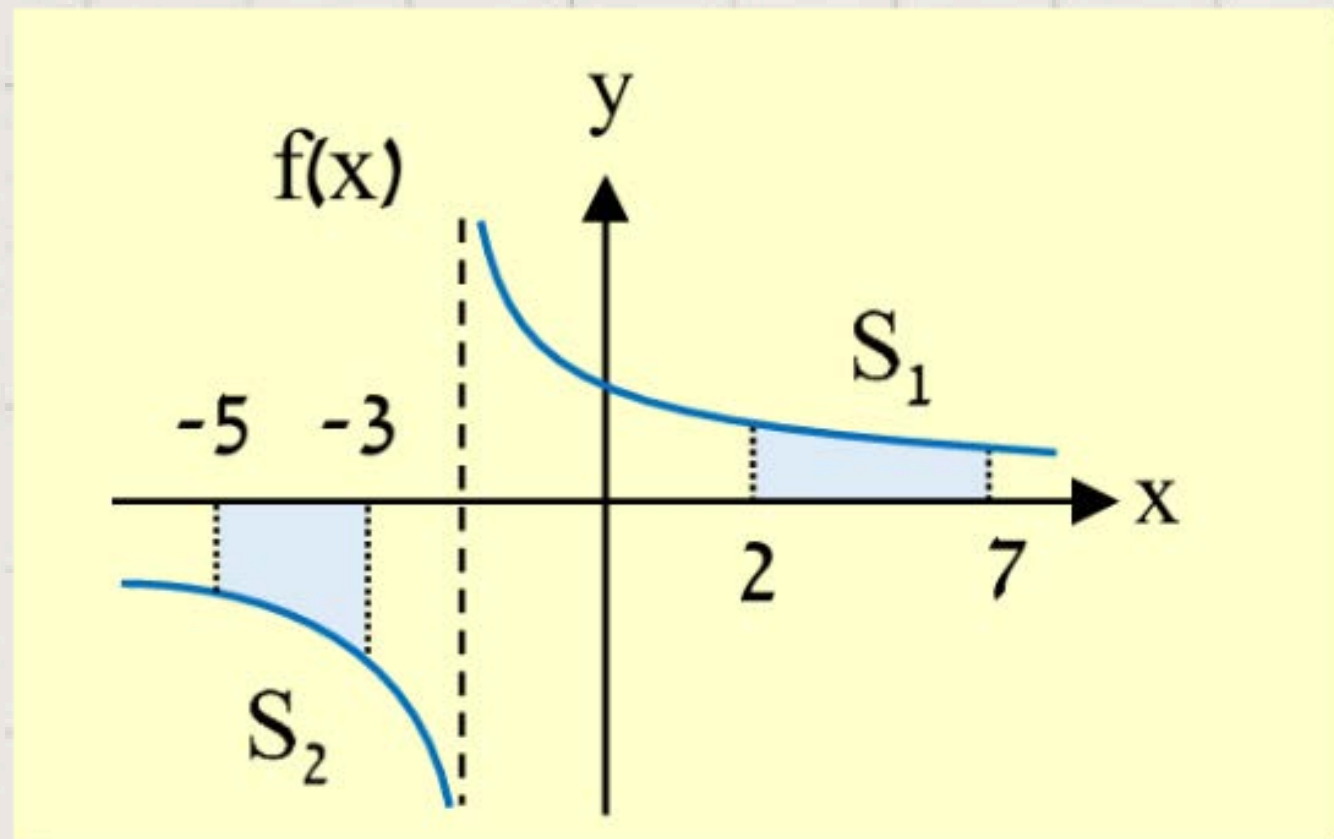




# חישוב שטחים בעזרת אינטגרל

**דוגמה:** לפניכם גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ .

חשבו את שני השטחים הכחולים  $S_1$  ו- $S_2$  המוגבלים על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים המופיעים בשרטוט.





## חישוב שטחים בעזרת אינטגרל

**פתרון:** נחשב את השטחים על ידי הצבה הנוסחאות האינטגרל המסוים:

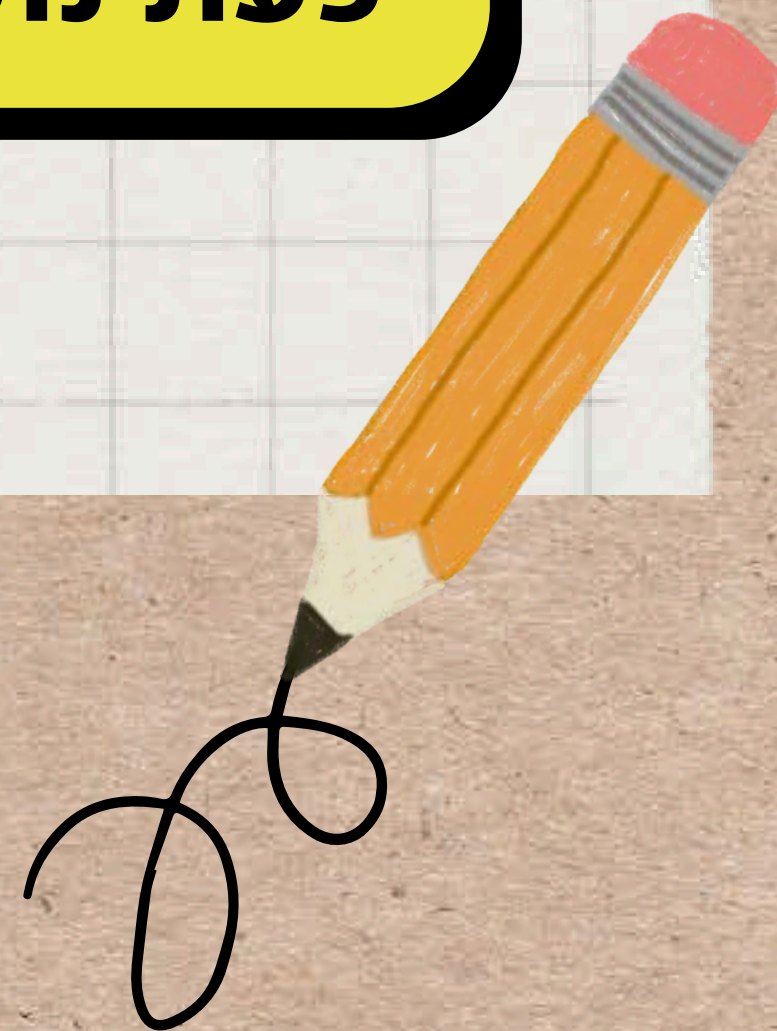
$$S_1 = \int_2^7 \frac{1}{x+2} dx = [\ln(x+2)]_2^7 = \ln 9 - \ln 4 = \mathbf{0.811 \text{ יח"ר}}$$

$$S_2 = \int_{-5}^{-3} \left( 0 - \frac{1}{x+2} \right) dx = - \int_{-5}^{-3} \frac{1}{x+2} dx = [-\ln(x+2)]_{-5}^{-3}$$

$$= -\ln|-1| - (-\ln|-3|) = -\ln 1 + \ln 3 = \mathbf{1.099 \text{ יח"ר}}$$



**כעת נוכל לפתור את תרגילים 18-52 בעמודים 247-257.**





# למרחב ההוראה לחצו כאן

במרחב ההוראה מאות דפי תרגול, וביניהם בחינות מתכונת. המרחב מיועד לצוותי הוראה במוסדות לימוד אשר רכשו את הספר.



# למי לפנות?

לשאלות לארכימדס:

במספר 050-9074007 של הוצאת ארכימדס

להזמנות מרוכזות - פונים ל-"יש הפצות":

טלפון 03-5595354 או וואטסאפ 054-7154211