

חוברת שאלות אתגר לתלמידים מתקדמים בהקבצת 5 יחידות בכיתה י'

לפניכם מקבץ שאלות אתגר המיועדות לתלמידים מתקדמים במיוחד בהקבצת 5 יחידות לימוד בכיתה י'. רמת הקושי של מרבית השאלות **גבוהה משמעותית מהנדרש** מתלמידי כיתה י' ובחלק מהמקרים אף מהנדרש בבחינת הבגרות. השאלות מומלצות לתלמידי 5 יחידות מתקדמים במיוחד המעוניינים לחדד את היכולות המתמטיות שלהם - מיומנות אלגברית וגיאומטרית לצד חשיבה.

גם השנה לומדים עם הספרים של ארכימדס!

בתוכנית החדשה:



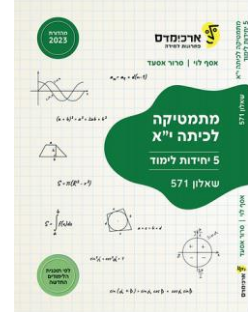
471 יי

<https://bit.ly/3PmXRgH>



571 יי

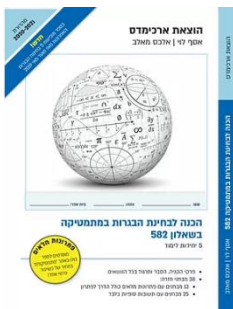
<https://bit.ly/3Nj4HnE>



571 יא

<https://bit.ly/3uiZ7KK>

בתוכנית הקודמת:



582

<https://bit.ly/30uatwS>



482

<https://bit.ly/3yvAske>



581

<https://bit.ly/3s6rzfP>



581 בערבית

<https://bit.ly/3SIjT0K>



481

<https://bit.ly/30v5xrE>

מעוניינים ברכישה מרוכזת של ספרי ארכימדס? תוכלו לקבל הצעת מחיר רשמית ולהזמין דרך יש הפצות:
 בווטסאפ או בשיחה 054-715-4122. במייל yeshbooks@gmail.com או באתר <https://bit.ly/3FQfqBy>

אם התקשת להשיג אותם - לעדכן אותי!

קטלוג ספרי ארכימדס בקישור: <https://bit.ly/2PTzQCY>

מחירון ספרי ארכימדס: <https://bit.ly/3IZfYXz>

ניתן להזמין ספר הביתה עם שליח באתר ארכימדס בקישור: <https://bit.ly/3ymwDNx>

עותק דיגיטלי מוזל ניתן לרכוש באתר Classoos בקישור: <https://www.classoos.co.il>

(הזמנה באתר Classoos מתאפשרת רק ממחשב, לא מסלולארי)

אלגברה - משוואות שניתנות לפתרון על ידי הצבה

1. $(x^2 - 6x + 12)^2 - 3x(x^2 - 6x + 12) + 2x^2 = 0$ תשובות: 2, 3, 4, 6.

2. $6x^4 + (2x^2 - 4x + 3)^2 = 7x^2(2x^2 - 4x + 3)$ תשובות: -1.5, 0.5, 1, 3.

3. $(x - 3)(x + 4)(x + 5)(x - 4) = 180$ תשובות: -6, -2, 1, 5.

4. נתונה המשוואה: $\frac{x^2 - a^2}{x^2 - 5a^2} + \frac{x^2 - 3a^2}{x^2 - 7a^2} = \frac{4a^2 \cdot (x^2 + a^2)}{(x^2 - 5a^2)(x^2 - 7a^2)}$ (a מספר טבעי).

א. פתור את המשוואה.

ב. נתון שסכום ריבועי פתרונות המשוואה גדול ב-11 ממכפלתם של הפתרונות זה בזה. מצא את a.

תשובה: א. $\pm a$, $\pm 3a$. ב. $a = 1$.

אלגברה - משוואות אירציונאליות

תשובות: אין. 5.
$$\frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x+1)}}$$

תשובות: אין. 6.
$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+5}} = \frac{1}{\sqrt{(x+2)(x+5)}}$$

תשובות: -1.75, 2. 7.
$$\frac{1}{\sqrt{x+2}-1} + \frac{2}{\sqrt{x+2}} = 2$$

תשובות: 1, 2. 8.
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{3}{\sqrt{5x^2-x^4}}$$

תשובות: 3a. 9.
$$(0 < a) \sqrt{a+x} + \sqrt{13a+x} = \sqrt{2x+30a}$$

תשובות: 0, $8m^2$. 10.
$$\sqrt{9m^2-x} = 4m - \sqrt{m^2+x}$$

תשובות: 5. 11.
$$\sqrt{x+4} + \sqrt{9-x} = \sqrt{x-1} + \sqrt{14-x}$$

תשובות: 2. 12.
$$\sqrt{x^2+5} + \sqrt{8-x^2} = x + \sqrt{13-x^2}$$

תשובות: 1, 4. 13.
$$(x + \sqrt{x})^2 - 8 \cdot (x + \sqrt{x}) + 12 = 0$$

תשובות: 4. 14.
$$(x + \sqrt{x})^2 = 4 \cdot (x + \sqrt{x}) + 12$$

תשובות: -1. 15.
$$(1 + \sqrt{2+x})^2 + 3 \cdot (\sqrt{2+x} - 4) = -5$$

תשובות: 4. 16.
$$\left(4 + \frac{6}{\sqrt{x}}\right)^2 + 21 = 10 \cdot \left(4 + \frac{6}{\sqrt{x}}\right)$$

תשובות: 2, -5. 17.
$$\sqrt{x^2+3x-1} - \sqrt{x^2+3x-6} = 1$$

תשובות: 4. 18.
$$(\sqrt{x+5}-x)^2 + 2 \cdot (\sqrt{x+5}-x) = -1$$

תשובות: 1, -2. 19.
$$\sqrt{x^2+x+2} + \sqrt{x^2+x+14} = \sqrt{2x^2+2x+32}$$

תשובות: 9. 20.
$$\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} = \frac{5\sqrt{x}+21}{x+\sqrt{x}-6}$$

אלגברה - אי שוויונות במנה

$$21. \text{ נתונות הפונקציות: } f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x} - \frac{2}{x}, \quad g(x) = \frac{x^2-16x+64}{x}$$

- א. מצא עבור אילו ערכי x גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא מעל ציר ה- x .
- ב. מצא עבור אילו ערכי x גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מעל ציר ה- x .
- ג. כאשר הגרפים של שתי הפונקציות נמצאים מעל לציר ה- x , מצא עבור אילו ערכי x גרף $g(x)$ נמצא גם מעל הישר $y = x$.

תשובה: א. $3 < x < 8$ או $x < 0$. **ב.** $8 < x$ או $0 < x < 8$. **ג.** $3 < x < 4$.

$$22. \text{ נתונות הפונקציות: } f(x) = \frac{x^3-x}{2+x}, \quad g(x) = -\frac{15x}{x+2}$$

- בעזרת שתי הפונקציות הגדירו פונקציה נוספת: $h(x) = f(x) + g(x)$.
- מצא עבור אילו ערכי x הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$ שלושתן שליליות.

תשובה: $0 < x < 1$.

$$23. \text{ פתור את אי השוויון: } x - 5 \leq \frac{x^2 + x - 30}{x^2 - x - 2} \leq 5 - x$$

תשובות: $4 \leq x \leq 5$ או $x \leq -2$.

$$24. \text{ פתור את אי השוויון: } 3 - x < \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 2x} \leq 4x - 16$$

תשובות: $4 \leq x$.

$$25. \text{ נתונה המשוואה: } (m+3) \cdot x^2 - x \cdot (2m+5) + m+2 = 0$$

- א. פתור את המשוואה.
- ב. מצא עבור אילו ערכי m סכום ריבועי פתרונות המשוואה קטן מ-2.

תשובה: א. 1, $\frac{m+2}{m+3}$. **ב.** $-2.5 < m$.

$$\begin{cases} 2x + 3y = m \\ mx + (m + 1) \cdot y = 2m \end{cases} \quad 26. \text{ המשוואות הבאות מייצגות שני ישרים הנחתכים במערכת הצירים:}$$

א. הבע באמצעות m את שיעורי נקודת החיתוך של הישרים.

ב. מצאו עבור אילו ערכי m נמצאת נקודת החיתוך שמצאתם ברביע הרביעי.

תשובה: א. $\left(\frac{5m - m^2}{m - 2}, \frac{m^2 - 4m}{m - 2} \right)$. **ב.** $2 < m < 4$ או $m < 0$.

$$\begin{cases} 5x + m \cdot y = 2m \\ m \cdot x + 5 \cdot y = m + 5 \end{cases} \quad 27. \text{ המשוואות הבאות מייצגות שני ישרים הנחתכים במערכת הצירים:}$$

א. הבע באמצעות m את שיעורי נקודת החיתוך של הישרים.

ב. מצא עבור אילו ערכי m שיעורי נקודת החיתוך שמצאתם הם בעלי סימנים מנוגדים.

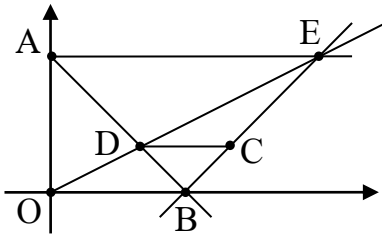
תשובה: א. $\left(\frac{m}{m + 5}, \frac{2m + 5}{m + 5} \right)$. **ב.** $-2.5 < m < 0$.

$$28. \text{ מצא עבור אילו ערכי } m \text{ יהיה למשוואה: } \frac{2 - 2m^2x}{m^2 + 4m + 3} + \frac{mx + 1}{m + 3} = -\frac{m + x}{m + 1} \text{ פתרון גדול מ-2.}$$

תשובה: $3 < m < 9$.

גיאומטריה אנליטית - הקו הישר

29. נתונה הנקודה: $E(6,3)$. הישרים AE ו- CD מקבילים לציר ה- x .



שיפוע הישר AB הוא -1 . המשך הישר DE עובר בראשית הצירים O .

א. מצא את שיעורי הנקודות B ו- D .

ב. מצא את משוואת הישר BE .

ג. מצא את שיעורי הנקודה C .

ד. הסבר מדוע מתקיים: $\angle ABE = 90^\circ$.

ה. הראה שמתקיים: $AB = BE$.

ו. הנקודות F ו- G הן בעלות אותו שיעור y ונמצאות בהתאמה על המשכי הישרים BE ו- AB .

קבע איזו מהטענות הבאות היא נכונה בהתייחס למשולש $\triangle BFG$:

i. המשולש שווה צלעות.

ii. המשולש שווה שוקיים חד זווית.

iii. המשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

iv. המשולש ישר זווית אך לא ניתן לדעת אם הוא גם שווה שוקיים.

ז. חשב את שטח המשולש $\triangle ABCD$.

ח. מצא בשרטוט שלושה זוגות של משולשים דומים.

ט. חשב את שטח הטרפז $BCDO$.

י. הנקודה M נמצאת על המשך AE ברביע השני. חשב את שטח המשולש $\triangle CDM$.

תשובה: א. $B(3,0)$, $D(2,1)$. ב. $y = x - 3$. ג. $C(4,1)$. ד. מכפלת שיפועי הישרים AB ו- BE היא -1 .

ו. iii. ז. 1 יח"ר. ח. $\triangle BOE \sim \triangle CDE$, $\triangle AED \sim \triangle BOD$, $\triangle ABCD \sim \triangle BEA \sim \triangle OAB$.

ט. 2.5 יח"ר. י. 2 יח"ר.

30. הגבהים של המשולש $\triangle ABC$ נחתכים בנקודה $D(5,4)$.

משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות AB ו- AC הן בהתאמה: $y = 2x - 1$ ו: $y = \frac{1}{3}x - 1$.

א. מצא את שיעורי קדקודי המשולש.

ב. חשב את שטח המשולש.

תשובה: א. $A(0,-1)$, $B(4,7)$, $C(9,2)$. ב. 30 יח"ר.

גיאומטריה - שטחים

31. בטרפז $ABCD$, קטע האמצעים EF חותך את האלכסונים

בנקודות N ו- H כמתואר בשרטוט. הגובה BG עובר דרך הנקודה H .

נתון: $\angle ADC = 90^\circ$

א. הוכח: $FN = CG$.

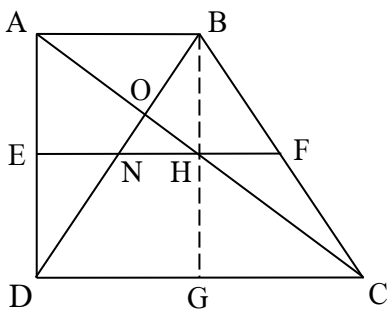
ב. נתון: שטח הטרפז $CDNH$ הוא 60 סמ"ר.

חשב את שטח הטרפז $ABFH$.

ג. חשב את היחס: $\frac{BO}{NO}$.

(הדרכה: העבר את AG ומצא את נקודת מפגש התיכונים במשולש $\triangle ABG$).

תשובה: ב. 36 סמ"ר. ג. 2.



32. הישרים AD ו-DE הם הגבהים ליתר במשולשים ישרי

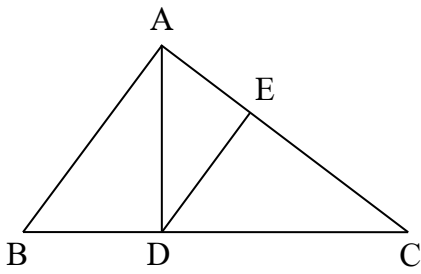
הזווית $\triangle ABC$ ו- $\triangle CAD$ בהתאמה. נסמן: $AB = a$, $AC = b$.

א. הבע באמצעות a ו-b את אורכי הקטעים:

1. AD

2. DE

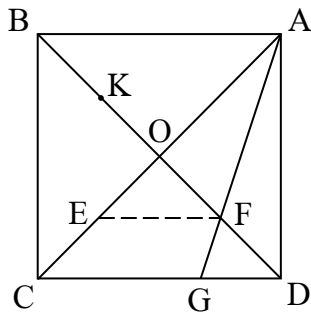
3. CE



ב. הוכח: שטח המשולש $\triangle ADE$ הוא: $\frac{(a \cdot b)^3}{2(a^2 + b^2)^2}$.

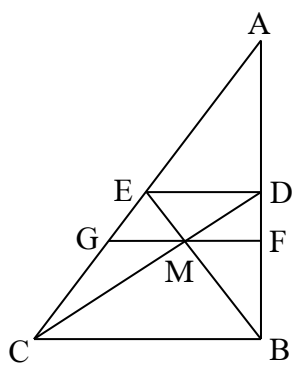
תשובה: א. 1. $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 2. $\frac{ab^2}{a^2 + b^2}$ 3. $\frac{b^3}{a^2 + b^2}$

גיאומטריה - משפט תאלס



33. אלכסוני הריבוע ABCD שהיקפו $4a$, נחתכים בנקודה O. הנקודה G נמצאת על הצלע CD כך שהישר AG חותך את האלכסון BD בנקודה F. הקטע EF הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle CDO$.
 א. הבע באמצעות a את אורכי הצלעות EF ו-CG.
 ב. נתון: שטח הטרפז CEFG הוא 21 ס"מ². מצא את a .
 א. נתון: הנקודה K היא אמצע BO. הוכח: המרובע KFGC הוא טרפז.

תשובה: א. $EF = \frac{a}{2}$, $CG = \frac{2a}{3}$. **ב.** 12 ס"מ.



34. במשולש $\triangle ABC$ התיכונים BE ו-CD נחתכים בנקודה M. דרך הנקודה M עובר ישר המקביל לקטע DE וחותך את צלעות המשולש בנקודות F ו-G.
 כמתואר בשרטוט. היקף המשולש $\triangle ADE$ הוא 36 ס"מ. נסמן: $DE = x$.
 הקטע AE ארוך בשה ס"מ מהקטע DE. נתון: $12 \leq AD \leq 18$ ס"מ.
 א. הבע באמצעות x את:

1. היקף הטרפז BCED.

2. אורכי הקטעים DF ו-GE.

ב. מצא את טווח הערכים האפשרי עבור:

1. היקף הטרפז BCED.

2. אורכי הקטעים DF ו-GE.

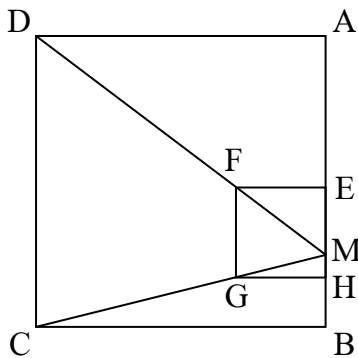
ג. עבור כל טענה, קבע האם היא נכונה או שגויה. נמק את תשובתך:

i. בעזרת הנתונים ניתן לחשב את שטח המשולש $\triangle AGF$.

ii. אם מתקיים: $32 \leq P_{DEGF} \leq 30$ ס"מ אז בהכרח מתקיים: $AB \perp BC$.

תשובה: א. 1. $P_{BCED} = 2x + 36$. **2.** $DF = \frac{30 - 2x}{3}$, $GE = \frac{x + 2}{3}$. **ב. 1.** $48 \leq P_{BCED} \leq 54$ ס"מ.

2. $4 \leq DF \leq 6$ ס"מ, $4 \leq GE \leq 5$ ס"מ. **ג. i.** נכונה. **ii.** נכונה.



35. בשרטוט מופיעים הריבועים ABCD ו-EFGH. הנקודות F, D ו-M נמצאות על אותו ישר. הנקודות G, C ו-M נמצאות על אותו ישר.

א. הוכח: $ME \cdot BH = AE \cdot MH$.

ב. נתון: שטחי המשולשים $\triangle MEF$ ו- $\triangle MHG$ הם בהתאמה

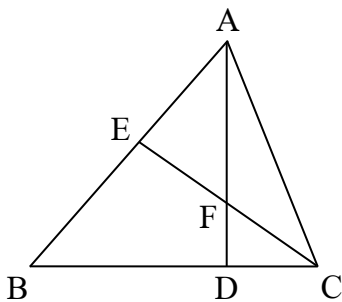
24 סמ"ר ו-8 סמ"ר. שטח הטרפז CDFG הוא 168 סמ"ר.

חשב את שטח הטרפז BCGH.

ג. חשב את היקף הטרפז ADFE.

תשובה: ב. 42 סמ"ר. ג. 52 ס"מ.

גיאומטריה - משפט חוצה זווית במשולש



36. במשולש $\triangle ABC$ הגובה AD וחוצה הזווית CE נחתכים בנקודה F.

הגובה AD אורך ב-3 ס"מ מהקטע BD. נתון: $CD = 5$ ס"מ. שטח המשולש

$\triangle ABC$ נמצא בטווח הערכים: $12 \leq S_{\triangle ABC} \leq 84$ סמ"ר.

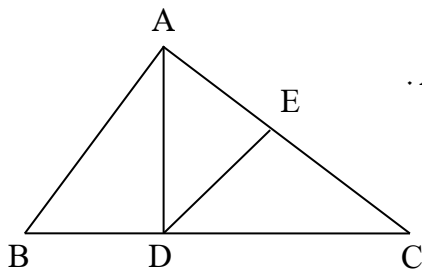
א. מצא את טווח הערכים האפשריים של אורך BD

(הדרכה: סמן $BD = x$).

ב. נתון: אורכו של BD הוא המקסימלי. חשב את אורך AE.

ג. חשב את שטח המשולש $\triangle ACF$.

תשובה: א. $1 \leq BD \leq 9$ ס"מ. ב. $7\frac{2}{9}$ ס"מ. ג. $21\frac{2}{3}$ סמ"ר.



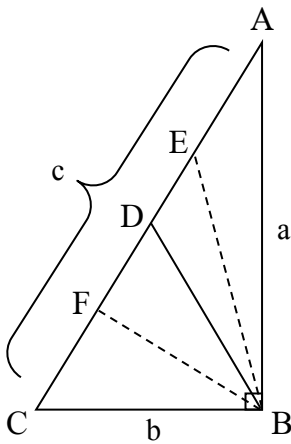
37. הישר AD הוא הגובה ליתר במשולש ישר הזווית ΔABC .

הישר DE הוא חוצה זווית במשולש ΔCAD . נסמן: $AB = a, AC = b$.

א. הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע AD.

ב. הוכח: שטח המשולש ΔADE הוא: $\frac{a^2 \cdot b^3}{2(a+b)(a^2+b^2)}$.

תשובה: א. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



38. הישר BD הוא התיכון ליתר במשולש ΔABC ישר הזווית.

נסמן: $AC = c, BC = b, AB = a$.

א. הבע באמצעות c את אורך התיכון BD.

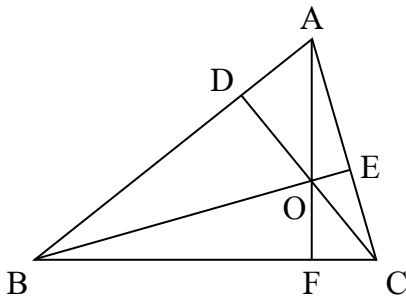
ב. נתון: הישרים BE ו-BF הם בהתאמה חוצי זוויות במשולשים

ΔABD ו- ΔBCD . הוכח: $EF = \frac{c^2 \cdot (a+b+c)}{(2a+c) \cdot (2b+c)}$.

תשובה: א. $\frac{c}{2}$.

גיאומטריה - דמיון משולשים

39. הנקודה O היא נקודת מפגש הגבהים במשולש ΔABC .



א. הוכח: $\Delta AEB \sim \Delta ADC$.

ב. הוכח: $\Delta ADE \sim \Delta ACB$.

ג. נתון: $AD = CE = 2$ ס"מ, $AE = 4$ ס"מ.

חשב את אורך הקטע BD.

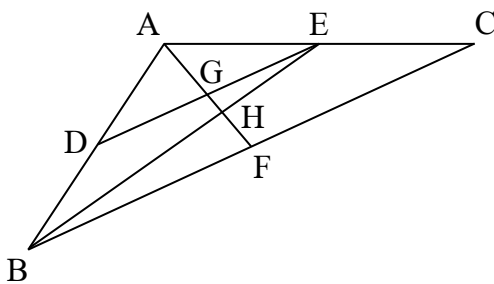
ד. חשב את המרחק בין נקודת מפגש הגבהים במשולש ΔABE

לבין נקודת מפגש הגבהים במשולש ΔACD .

(הדרכה: חשב את אורך BC).

תשובה: ג. 10 ס"מ. ד. 3.83 ס"מ.

40. המשכי שוקי הטרפז BCED נחתכים בנקודה A.



במשולש ΔABC התיכון AF חותך את הישרים

DE ו-BE בנקודות G ו-H בהתאמה.

שטחי המשולשים ΔADE ו- ΔBDE שווים.

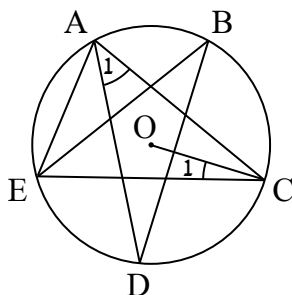
א. הוכח: $\frac{AG}{GH} = 3$.

ב. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{BDGF}}{S_{\Delta AEG}}$.

תשובה: ב. 3.

גיאומטריה - שאלות שונות בנושא מעגל

41. הנקודות A, B, C, D, E נמצאות על מעגל שמרכזו בנקודה O.



הוכח: $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 90^\circ$.

42. הנקודות D ו-F נמצאות על צלעות המשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$

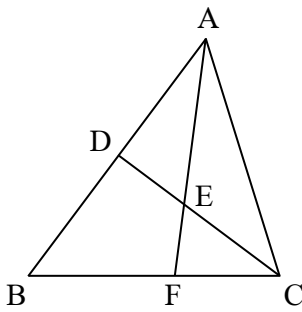
($AC = BC$) שהיקפו 176 ס"מ. הישרים CD ו-AF נחתכים בנקודה E שהיא

גם מרכז המעגל החסום במשולש $\triangle ABC$. נתון: $AD = 33$ ס"מ. חשב את:

א. אורך CF.

ב. היחס בין שטחי המשולשים: $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle CEF}}$.

תשובה: א. 25 ס"מ. ב. $1.32 = 1\frac{8}{25}$.



43. הנקודה E נמצאת מחוץ למעגל שקוטרו AB. הישרים AE

ו-BE חותכים את המעגל בנקודות D ו-C בהתאמה.

המיתר AC חוצה את הזווית $\angle BAD$. נסמן: $\angle CBD = \alpha$.

א. הוכח: $CE = CD$.

ב. נתון: $CD < AD$. מצא את טווח הערכים האפשריים של α .

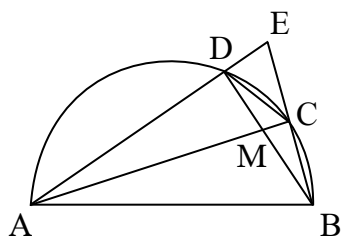
ג. מצא את טווח הערכים האפשריים של הזווית $\angle AEB$.

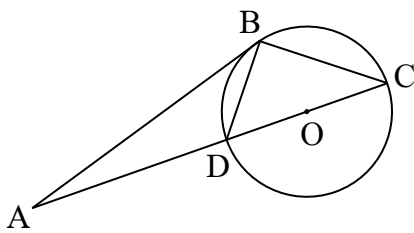
ד. נתון: המיתרים BD ו-AC נחתכים בנקודה M. שטח חצי המעגל הוא 12.5π סמ"ר, $BD = 8$ ס"מ.

חשב את אורך BM ואת שטח המשולש $\triangle ABM$.

ה. חשב את המרחק של הנקודה M מהקוטר AB.

תשובה: ב. $0^\circ < \alpha < 30^\circ$. ג. $60^\circ < \angle AEB < 90^\circ$. ד. 5 ס"מ $BM =$, השטח 15 סמ"ר. ה. 3 ס"מ.





44. הישר CD הוא קוטר במעגל שמרכזו בנקודה O והיקפו 70π ס"מ. הנקודה A נמצאת על המשך CD וממנה יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה B.

א. הוכח: $\triangle ABD \sim \triangle ACB$.

ב. נתון: $BC = 56$ ס"מ.

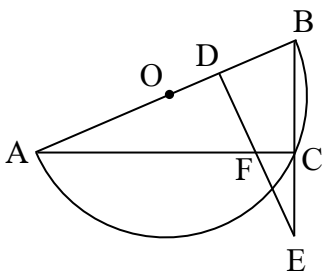
חשב את היקפו ואת שטחו של המשולש $\triangle ABD$.

ג. הנקודה M נמצאת על הקוטר CD כך ששטח המשולש $\triangle BDM$

גדול משטח המשולש $\triangle BCM$ אך קטן משטח המשולש $\triangle ABD$.

מצא באיזה תחום מספרי נמצא אורך הקטע DM.

תשובה: ב. ההיקף: 252 ס"מ, השטח: 1,512 סמ"ר. ג. $35 < DM < 70$ ס"מ.



45. המשולש $\triangle ABC$ חסום בחצי מעגל שמרכזו O וקוטרו AB.

מהנקודה D הנמצאת על הרדיוס BO מעלים אנך החותך את המיתר AC

בנקודה F ואת המשך המיתר BC בנקודה E.

נסמן: $\angle BED = \alpha$. נתון: $60^\circ \leq \angle AFD \leq \angle BAC$.

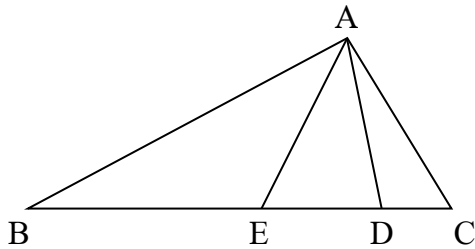
א. מצא את טווח הערכים האפשריים של α ושל הזווית $\angle CFD$.

ב. נתון: כאשר הזווית $\angle CFD$ היא מינימלית אז: $DO = a$, $AB = 6a$.

חשב את היחס: $\frac{BC}{CE}$.

תשובה: א. $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$, $120^\circ \leq \angle CFD \leq 135^\circ$. **ב.** 3.

טריגונומטריה - משפט הקוסינוסים



46. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלע BC במשולש ΔABC .

הישר AE חוצה את הזווית $\angle BAD$.

נסמן: $BD = 55a$, $AB = 56a$, $AD = 21a$.

א. מבלי למצוא זווית כלשהי, הבע באמצעות a את אורך AE.

ב. נתון: $48 \text{ ס"מ} < AE < 24 \text{ ס"מ}$. נתון: $AC = 24a$.

מצא את תחום הערכים האפשרי של שטח המשולש ΔACD .

תשובה: א. $24a$. ב. $374.16 \text{ סמ"ר} \leq S_{\Delta ACD} \leq 93.54 \text{ סמ"ר}$.

טריגונומטריה - המעגל הטריגונומטרי

47. חשב את הוצאה מבלי להיעזר במחשבון:

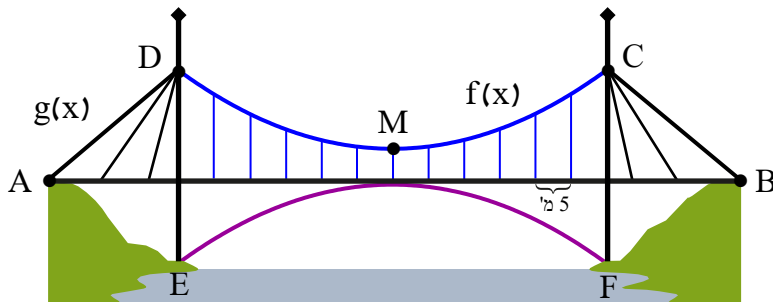
$$\frac{\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 87^\circ \cdot \sin 88^\circ \cdot \sin 89^\circ}{\sin 91^\circ \cdot \sin 92^\circ \cdot \sin 93^\circ \cdot \dots \cdot \sin 177^\circ \cdot \sin 178^\circ \cdot \sin 179^\circ} = \quad \text{א.}$$

$$\frac{\cos 0^\circ + \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 43^\circ + \cos 44^\circ + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ + \sin 46^\circ + \sin 47^\circ + \dots + \sin 88^\circ + \sin 89^\circ + \sin 90^\circ} = \quad \text{ב.}$$

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 178^\circ + \sin^2 179^\circ + \sin^2 180^\circ = \quad \text{ג.}$$

תשובה: א. 1. ב. 1. ג. 90.

חשבון דיפרנציאלי - פונקציית חזקה



48. CD הוא חבל פלדה סימטרי המחבר בין שתי רגלי הגשר AB.

הפונקציה המתארת את צורת

$$f(x) = \frac{1}{20} \cdot x^n + 5$$

החבל CD היא:

$$g(x) = \frac{5}{2} \cdot x + 125$$

הפונקציה המתארת את החבל הקווי AD היא:

גובה הגשר מעל פני המים הוא 15 מטר. החבל CD מקובע עם הגשר באמצעות 11 מוטות פלדה אנכיים שהמרחק בין כל שניים מהם הוא 5 מטר כמתואר בציור.

א. חשב את המרחק בין שתי רגלי הגשר.

ב. היעזר בצורת הגשר וקבע האם החזקה n בפונקציה f(x) היא זוגית או אי זוגית.

ג. מצא את שיעור ה-x של הנקודה M.

ד. הנקודה M נמצאת 5 מטרים מעל הגשר.

מקם את הציור במערכת צירים מתאימה ומצא את שיעור ה-y של הנקודה M.

ה. מצא את שיעורי הנקודות A ו-D.

ו. מצא את n.

ז. 1. היעזר בסימטריה ומצא את שיעורי הנקודות B ו-C.

2. מצא את אורך הגשר AB.

ח. האם נקודה שגבוהה מהגשר AB ב-25 מטרים יכולה להימצא על החבל DC? נמק.

ט. המהנדס שתכנן את הגשר מעוניין לחזק את הגשר בעזרת קשת פלדה EF, שהפונקציה המתארת

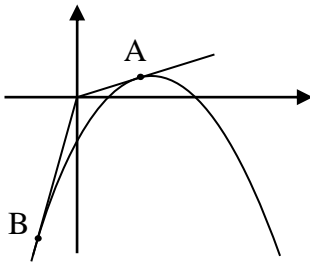
$$h(x) = ax^2$$

אותה היא מהצורה, כמתואר בציור. מצא את a. נמק.

תשובה: א. 60 מטר. ב. החזקה זוגית. ג. $x_M = 0$. ד. $y_M = 5$. ה. $A(-50,0), D(-30,50)$. ו. $n = 2$.

ז. 1. $B(50,0), C(30,50)$. 2. 100 מ'. ח. כן. ט. $a = -\frac{1}{60}$.

חשבון דיפרנציאלי - פונקציית פולינום



49. שני ישרים יוצאים מראשית הצירים ומשיקים לפרבולה:

$$f(x) = -x^2 + 10px - 16p^2 \quad (0 < p)$$

בנקודה A ברביע הראשון

ובנקודה B ברביע השלישי, כמתואר בשרטוט.

א. הבע באמצעות p את משוואות המשיקים.

ב. נתון ששיפוע הישר AB הוא 30. מצא את p .

תשובה: א. הישר $y = 2px$ משיק בנקודה A; הישר $y = 18px$ משיק בנקודה B. **ב.** $p = 3$.

50. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2mx^3 - 3mx^2 - 12mx + m^2$, $(0 < m)$.

א. הבע באמצעות m , במידת הצורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.

ב. מצא עבור אילו ערכי m , נקודת המקסימום של הפונקציה תהיה ברביע השני ונקודת המינימום של

הפונקציה תהיה ברביע הרביעי.

תשובה: א. $\max(-1, m^2 + 7m)$, $\min(2, m^2 - 20m)$. **ב.** $0 < m < 20$.

51. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 3(p+1) \cdot x^2 + 6px$, $(0 < p)$.

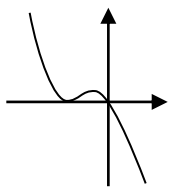
א. הבע באמצעות p , במידת הצורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. מצא עבור אילו ערכי p , שתי נקודות הקיצון של הפונקציה יהיו מאותו צד של ציר ה- x .

תשובה: א. $(p, 3p^2 - p^3)$, $(1, 3p - 1)$. **ב.** $\frac{1}{3} < p < 3$.

52. שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = -4x^3 + ax^2 + bx$ בנקודה $(-1, 1)$ הוא -5 .

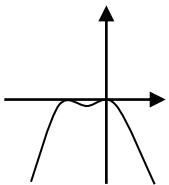
- א. מצא את a ו- b .
- ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. מצא באיזה תחום הפונקציה $f(x)$ חיובית וגם יורדת.
- ו. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x) = f(x) - p$.
- ז. מצא את ערכי p שעבורם גרף הפונקציה $g(x)$ ישק לציר ה- x בנקודה אחת.
- ח. הגדירו פונקציה חדשה: $h(x) = x \cdot f(x)$.
1. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $h(x)$.
2. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

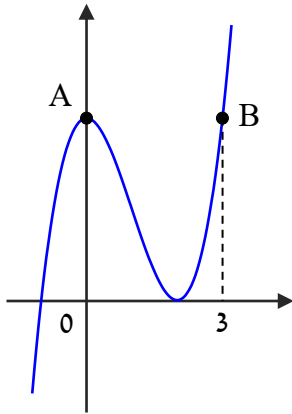


תשובה: א. $a = -4, b = -1$. **ב.** $(0, 0), (-0.5, 0)$. **ג.** $\max\left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{27}\right), \min(-0.5, 0)$.

ד. השרטוט העליון משמאל. **ה.** $-\frac{1}{6} < x < 0$ או $x < -0.5$. **ו.** $p = 0, \frac{2}{27}$.

ז. 1. חיוביות: אף x ; שליליות: $x \neq -0.5, 0$. 2. השרטוט התחתון משמאל.





53. בציר מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x . הנקודות $A(0,4)$ ו- $B(3,4)$ נמצאות על גרף הפונקציה כמתואר בציר.

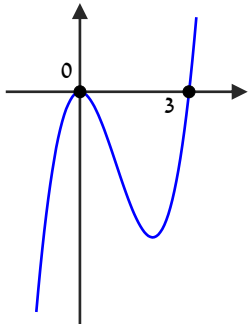
א. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x) = f(x) - 4$.

ב. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. היעזר בגרף הפונקציה $g(x)$ ופתור בעזרתו את אי השוויון: $\frac{f(x)-4}{x+5} > 0$.

ד. פתרון אי השוויון $\frac{f(x)-4}{x^2+5} < 0$ הוא:

1. $x > 3$ 2. $x < 3$ 3. $0 < x < 3$ 4. $x < 0$ או $0 < x < 3$



ה. פתרון אי השוויון $\frac{f(x)-4}{x^2-25} \geq 0$ הוא:

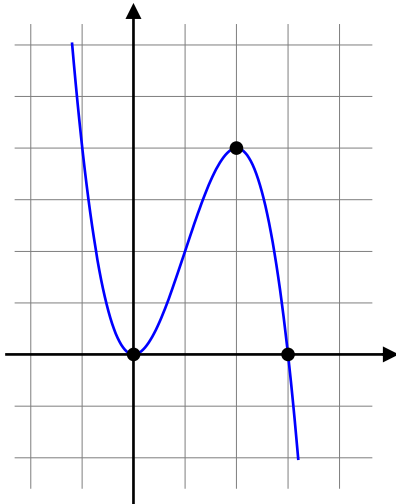
1. $-5 < x \leq 3$ או $x > 5$ 2. $-5 \leq x \leq 3$ או $x > 5$

3. $0 \leq x \leq 3$ או $x > 5$ 4. $-5 < x \leq 0$

תשובה: א. השרטוט משמאל. ב. שלילית: $0 < x < 3$ או $x < 0$; חיובית: $x > 3$.

- ג. $x > 3$ ד. 4. ה. 1.

חשבון דיפרנציאלי - פונקציה מורכבת



54. הפונקציה $f(x)$ והנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות לכל x .

לפינך גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.

א. בחר מבין הטענות הבאות את הטענה הנכונה. נמק את בחירתך.

i. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון ונקודת פיתול אחת.

ii. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת ושתי נקודות פיתול.

iii. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת ונקודת פיתול אחת.

ב. נתון: $f(0) = f(4) = 0$ ו- $f(3) = 6\frac{3}{4}$.

שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נגדיר פונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = (f(x))^2$.

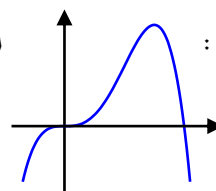
ג. גזור את הפונקציה $g(x)$.

ד. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה.

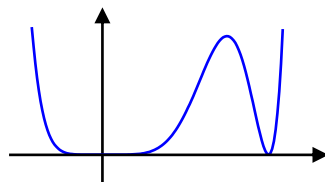
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ו. נתון: $f(1) = 0.75$. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x = 1$.

תשובה: א. טענה ii. ב. סקיצה: $g'(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot f(x)$ ג.



ז. $y = 3x - \frac{39}{16}$



ד. $\min(0,0)$, $\max(3, \frac{729}{16})$, $\min(4,0)$ ה. סקיצה:

חשבון דיפרנציאלי - פונקציה רציונאלית (מנה)

55. הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$ ו $g(x) = \frac{x+2}{x}$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון ובנוסף

בנקודה B. מצא את:

א. שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A.

ג. הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B, עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

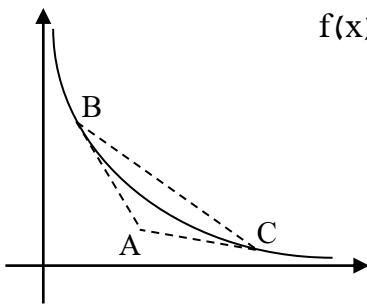
תשובה: א. $A(2,2)$, $B(-1,-1)$. ב. $y = 2.5x - 3$. ג. 116.56° .

56. הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{(3-x)^3}{x^2}$ ו $g(x) = \frac{64x^4}{(3-x)^3}$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון

ובנוסף בנקודה B. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A.

תשובה: $y = -28x + 36$.

57. במשולש $\triangle ABC$ הצלעות AB ו-AC משיקות לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x+36}{x}$



בנקודות B ו-C בהתאמה. נתון: $A(3,10)$.

א. מצא את משוואת הצלע BC.

ב. נתון שהמשכי הצלעות AC, BC ו-AB חותכים את האסימפטוטה

האנכית של הפונקציה $f(x)$ בנקודות D, E ו-F בהתאמה.

הוכח: הנקודה E היא אמצע הקטע DF.

ג. הוכח: הקטע AE הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle CDF$.

תשובה: א. $y = -3x + 25$.

58. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{mx^2}{m+x} + m$ ($0 < m$).

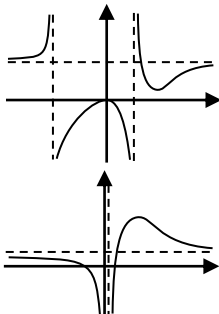
- א. הבע באמצעות m , במידת הצורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.
 ב. מצא עבור אילו ערכי m יהיו שתי נקודות הקיצון של הפונקציה בצדדים שונים של ציר ה- x .

תשובה: א. $\min(0, m)$, $\max(-2m, m - 4m^2)$. **ב.** $0.25 < m$.

59. אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = b + \frac{x^2 + a}{x^2 + x - 2}$ נמצאת בראשית הצירים.

- א. מצא את a ו- b .
 ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. תחום ההגדרה.
 2. שיעורי נקודת החיתוך עם הצירים.
 3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.
 4. תחומי העלייה והירידה.
 5. האסימפטוטות המקבילות לצירים.
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ד. נתונה הפונקציה: $g(x) = f(x) + p$.
 מצא את p שעבורו לגרף פונקציה $g(x)$ תהיה נקודת השקה אחת ויחידה לציר ה- x .

ה. (** נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



- תשובה: א.** $a = 0, b = 0$. **ב.** 1. תחום ההגדרה: $x \neq -2, 1$. 2. $(0,0)$.
 3. $\min(4, 0.88)$, $\max(0, 0)$. 4. עולה: $4 < x$ או $-2 < x < 0$ או $x < -2$;
 יורדת: $0 < x < 1$ או $1 < x < 4$. 5. $x = -2, x = 1, y = 1$.
 ג. השרטוט העליון. ד. $p = 0, -0.88$. ה. השרטוט התחתון.

60. נתונה הפונקציה: $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^n$. מספר טבעי גדול מ-1.

א. היעזר בפרמטר n , במידת הצורך ומצא עבור הפונקציה $f(x)$ את:

1. האסימפטוטה.

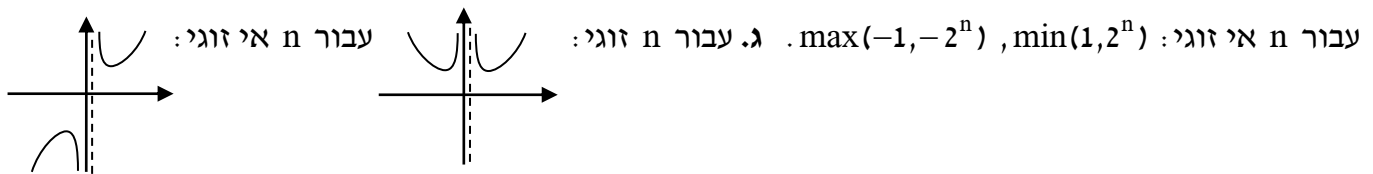
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש כאלו.

ב. על גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את שיעורי הנקודות שבהן מתקיים $f'(x) = 0$ וקבע עבור כל נקודה

האם היא נקודת מינימום או נקודת מקסימום. הבחן בין ערכי n זוגיים לבין ערכי n אי זוגיים.

ג. שרטט סקיצות של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור ערכי n זוגיים ועבור ערכי n אי זוגיים.

תשובה: א. $x=0$. 2. אין. ב. עבור n זוגי: $\min(-1, 2^n)$, $\min(1, 2^n)$.



61. לפניכם הפונקציה: $f(x) = \frac{x(x-2)^{3n-14}}{(x-3)(x-2)^n}$. מספר טבעי n .

מצא עבור אילו ערכי n יהיו לפונקציה שתי אסימפטוטות אנכיות.

תשובה: $1 \leq n \leq 6$.

62. לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - mx + 70}{x^2 - nx + 14}$ יש אסימפטוטה אנכית אחת והיא $x = 2$.

המכנה של הפונקציה מתאפס בשתי נקודות שונות.

א. מצא את m ו- n ותחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכח שגרף הפונקציה $f(x)$ עולה בכל תחום ההגדרה.

ג. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

2. האסימפטוטות.

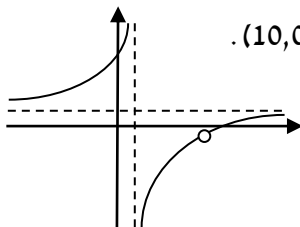
ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. הישר $y = k$ מרוחק במידה שווה מהאסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ ומנקודת

החיתוך שלה עם ציר ה- y . הישר $x = p$ ($2 < p$) אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.

הישרים $y = k$ ו- $x = p$ נחתכים בנקודה A . מהנקודה A יוצא ישר המשיק לגרף $f(x)$

בנקודה B ברביע הרביעי. מצא את שיעורי הנקודה B .



תשובה: א. $m = 17$, $n = 9$. תחום ההגדרה: $x \neq 2, 7$. ג. 1. $(10, 0)$, $(0, 5)$.

2. $x = 2$, $y = 1$. ד. השרטוט משמאל. ה. $B(4, -3)$.

חשבון דיפרנציאלי - פונקציית שורש

63. נתונה הפונקציה: $f(x) = (x - 6\sqrt{x} + 8)^n$ (n מספר טבעי גדול מ-1).

א. היעזר בפרמטר n , במידת הצורך ומצא עבור הפונקציה $f(x)$ את:

1. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

ב. על גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את שיעורי הנקודות שבהן מתקיים $f'(x) = 0$ וקבע האם כל נקודה

היא נקודת מינימום, נקודת מקסימום או נקודת פיתול. התייחס לערכים שונים של n .

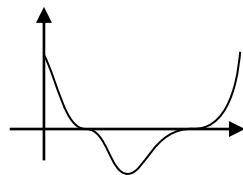
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור n זוגי ועבור n אי זוגי.

תשובה: א. 1. $0 \leq x$. **2.** $(0, 8^n)$, $(4, 0)$, $(16, 0)$.

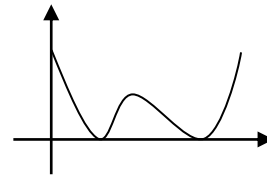
ב. עבור n זוגי: נקודות קיצון פנימיות: $\min(4, 0)$, $\max(9, 1)$, $\min(16, 0)$.

בקצה התחום: $\max(0, 8^n)$. עבור n אי זוגי: פנימית: $\min(9, -1)$;

בקצה התחום: $\max(0, 8^n)$. נקודות הפיתול: $(4, 0)$, $(16, 0)$.



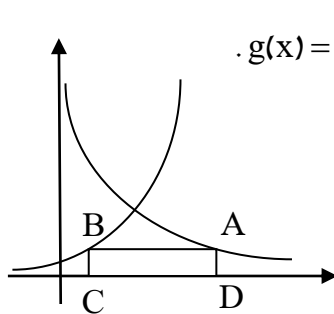
עבור n אי זוגי:



עבור n זוגי:

חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון

פונקציית מנה



64. בשרטוט מופיעים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{4}{a-x}$ ו- $g(x) = \frac{bx^2 + 4}{x^2 - b}$ ($0 < a$).

לשתי הפונקציות אותה אסימפטוטה אופקית.

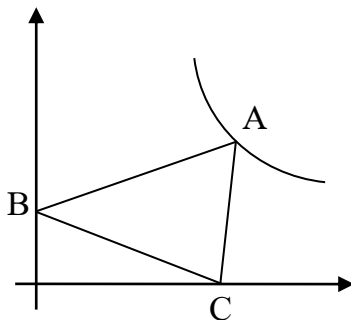
א. מצא את b .

ב. המלבן ABCD כלוא ברביע הראשון בין הגרפים של הפונקציות לבין ציר ה- x . השטח המקסימלי של המלבן הוא 9 יח"ר.

מצא את a .

ג. חשב את היקפו של המלבן ABCD ששטחו מקסימלי.

תשובה: א. $b = 0$. ב. $a = 0.2$. ג. 50.72 יח' אורך.



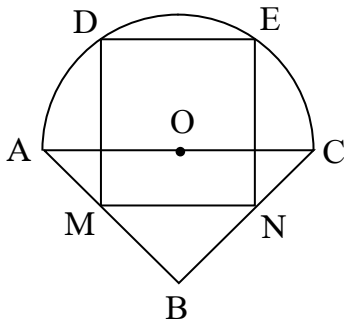
65. במשולש ΔABC הקדקוד A נמצא ברביע הראשון על גרף הפונקציה $g(x) = \frac{128}{x^2}$. נתונים הקדקודים: $B(0,4)$ ו- $C(8,0)$.

א. מצא את שיעורי הנקודה A עבורם יהיה שטח המשולש ΔABC מינימלי.

ב. כאשר שטח המשולש ΔABC מינימלי, חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הצלע BC . אין צורך להשתמש בנוסחאות מתקדמות של גיאומטריה אנליטית.

תשובה: א. $A(8,2)$. ב. $\frac{4}{\sqrt{5}} = 1.78$ יח' אורך.

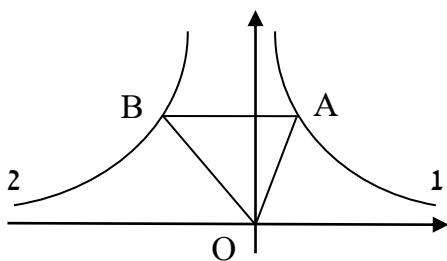
פונקציית שורש



66. היתר של המשולש ישר הזווית ושווה השוקיים $\triangle ABC$ הוא קוטרו של חצי מעגל שרדיוסו R. הנקודות D ו-E נמצאות על חצי המעגל והנקודות M ו-N נמצאות על ניצבי המשולש $\triangle ABC$ כך שמתקבל המלבן DENM. המיתר DE מקביל לקוטר AC. נסמן: $DE = 2x$.
 א. הבע באמצעות R ו-x את אורך הקטע NE.
 ב. הבע באמצעות R את אורך הקטע NE כאשר היקף המלבן DENM מקסימלי.

תשובה: א. $R - x + \sqrt{R^2 - x^2}$. **ב.** R.

67. בשרטוט נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-a}}$ ו: $g(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x-4a}}$, $(0 < a)$.



- א. קבע איזה מהגרפים - 1 או 2 - הוא גרף $f(x)$. נמק.
 ב. ראשית הצירים בנקודה O. הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בהתאמה כך שהישר AB מקביל לציר ה-x. הבע באמצעות a את שיעור ה-x של הנקודה A שעבורה שטח המשולש $\triangle ABO$ מינימלי.

- ג. כאשר שטח המשולש $\triangle ABO$ מינימלי, שטח המשולש הוא 3 יח"ר. מצא את a.

תשובה: א. גרף 1. **ב.** $x_A = 3a$. **ג.** $a = 2$.