שאלון 582 - מבחן 4

פרק ראשון - גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נק')

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נק')

1. באליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ המוקד הימני הוא F_1 והשמאלי F_2. האליפסה חותכת את ציר x בנקודה A הנמצאת על הקרן החיובית של ציר ה-x. דרך F_1 עובר ישר המאונך לציר ה-x החותך את האליפסה בנקודה B ברביע הראשון ובנקודה C ברביע הרביעי. במשולש ΔBCF_2 התיכון היוצא מהקדקוד B חותך את ציר ה-y בנקודה D. אליפסה שניה, שהיא בעלת אותם מוקדים כמו האליפסה הקודמת, עוברת דרך הנקודה D וחותכת את הקרן החיובית של ציר ה-x בנקודה M.

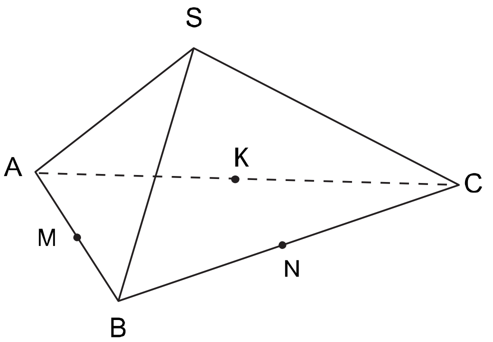
א. קבע האם הנקודה M נמצאת מימין לנקודה A, מתלכדת איתה או נמצאת משמאל לה. נמק.

ב. הבע באמצעות a ו-b בלבד את שיעור ה-y של הנקודה B.

ג. התיכון BD חותך את ציר ה-x בנקודה E. נתון: $EF_1=2$. הישר $y=1.6$ חותך את האליפסות בשלוש נקודות שונות סך הכול. מצא את משוואותיהן של שתי האליפסות.

2. בפירמידה שבסיסה המשולש שווה השוקיים ΔABC $(AB=BC)$.

נתון: $\overrightarrow{SA}=\underline{u}$, $\overrightarrow{SC}=\underline{w}$, $\overrightarrow{SB}=\underline{v}$, $|\underline{u}|=|\underline{w}|$.



א. נתון: M, K ו-N אמצעי הקטעים AB, AC ו-BC בהתאמה. הסבר מדוע: $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{SK}$.

ב. נתונים שלושת הקדקודים $(0<a)$:

$A(-1,a,-11)$, $S(a,6,1)$, $C(-a,-6,-a)$.

הנקודה $E(-3,p,-4p)$ נמצאת על הקטע BS.

מצא את a ו-p.

ג. נתון שהקדקוד B נמצא על המישור XY. קבע האם SABC הפירמידה ישרה.

3. נתונים המספר המדומה הטהור: $Z_1=\frac{ai+2b}{ai-2b}$ והמספר הממשי: $Z_2=\frac{b-i}{bi-a}$ $(0<a,\ 0<b)$.

א. מצא את a ו-b (a ו-b ממשיים).

ב. מצא את משוואת המקום הגיאומטרי: $|Z-5i|<a+b-1$ והסבר במילים את המשמעות הגיאומטרית של התוצאה במישור גאוס.

ג. מצא עבור אילו ערכי n, הישר $3y+4x+n=0$ אינו חותך את המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף ב'.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ($33\frac{1}{3}$ נק׳)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

4. נתונה הפונקציה: $f(x)=a\ln^3 x+3\ln^2 x+3a\ln x$.

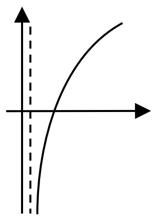
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את הערכים של a שבעבורם למשוואה $f'(x)=0$:

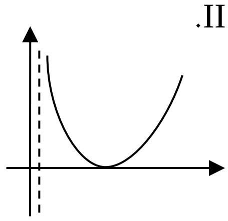
1. יהיה פתרון אחד. 2. יהיו שני פתרונות. 3. לא יהיו פתרונות.

ג. לפניך שלושה גרפים של פונקציות מן המשפחה $f(x)$ בעבור: $0\le a$.
ידוע כי $a\neq 1$ ונתון שכל אחד מהגרפים מתאים לערך או לטווח ערכים של a.
התאם לכל גרף את הערך או את טווח הערכים של a המתאים לו. נמק.

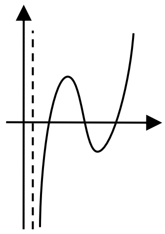
I.



II.



III.



ד. נתון: $0<a<1$. המרחק בין נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא d_1.

1. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x-4)$. המרחק בין נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הוא d_2.
לפניך שלוש טענות. קבע איזו מהטענות היא הנכונה. נמק את תשובתך.
i. $d_1<d_2$ ii. $d_1=d_2$ iii. $d_2<d_1$

2. נתונה הפונקציה $h(x)=f(0.5x)$. המרחק בין נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ הוא d_3.
לפניך שלוש טענות. קבע איזו מהטענות היא הנכונה. נמק את תשובתך.
i. $d_2<d_3$ ii. $d_3=d_2$ iii. $d_3<d_1$

5. נתונה הנגזרת השניה: $f''(x)=4e^{2x}+4e^{-2x}-17$.

גרף הנגזרת הראשונה $f'(x)$ וגרף הפונקציה $f(x)$ עוברים בראשית הצירים.

א. מצא את הנגזרת הראשונה $f'(x)$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הנגזרת השניה $f''(x)$ עם הצירים.

ג. עבור כל טענה, קבע האם היא נכונה או שגויה. נמק את תשובתך.

i. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול ברביע הראשון.

ii. לגרפים של הנגזרת $f'(x)$ ו- $f''(x)$ אין אסימפטוטות אופקיות.

ד. שרטט על גבי אותה מערכת צירים סקיצות של הגרפים של הנגזרות $f'(x)$ ו- $f''(x)$.

ה. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=x^3\cdot f(x)$.

1. עבור כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ קבע האם היא זוגית או אי זוגית.

2. חשב את האינטגרל: $\int_{-n}^{n} x^3\cdot f(x)\ dx$ עבור n טבעי.

בהצלחה!

תשובות:

1) א. משמאל ל-A. **ב.** $y_B=\frac{b^2}{a}$. **ג.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, $\frac{25x^2}{289}+\frac{25y^2}{64}=1$.

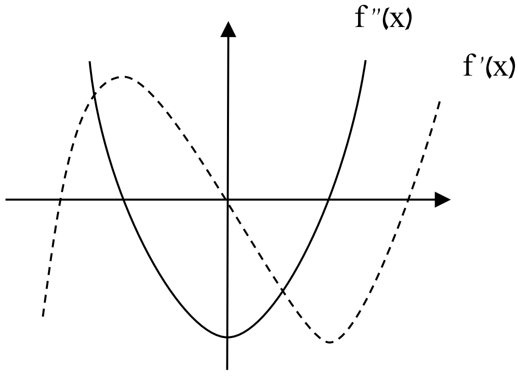
2) ב. $a=2, p=1$. **ג.** הפירמידה אינה ישרה.

3) א. $a=4, b=2$. **ב.** המקום הגיאומטרי הוא $x^2+(y-5)^2<25$ ומשמעותו: כל הנקודות הנמצאות <u>בתוך</u> המעגל: $x^2+(y-5)^2=25$ (<u>לא כולל</u> את הנקודות הנמצאות על היקפו). **ג.** $10\le n$ או $n\le -40$.

4) א. $0<x$. **ב. 1)** $a=-1,0,1$. **2)** $0<a<1$ או $-1<a<0$. **3)** $1<a$ או $a<-1$. **ג. I)** $1<a$. **II)** $a=0$. **III)** $0<a<1$. **ד. 1)** ii. **2)** i.

5) א. $f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}-17x$. **ב.** $(\ln 2,0)$, $(0,-9)$, $(-\ln 2,0)$. **ג. i)** שגויה. **ii)** נכונה.

ד.

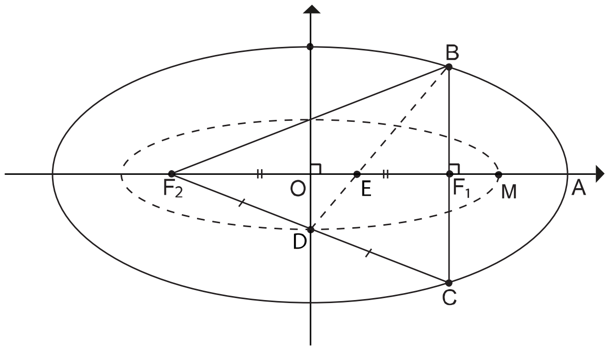


ה. 1) $f(x)$ זוגית, $g(x)$ אי זוגית.

2) ערך האינטגרל הוא 0 כיוון שמדובר בפונקציה אי זוגית בגבולות סימטריים.

פתרון מלא - מבחן 4

שאלה 1



א. לפי השרטוט המצורף ניתן לראות כי OD הוא קטע אמצעים במשולש ΔF_1F_2C (הנקודה D היא אמצע הקטע CF_2 והנקודה O היא אמצע הקטע F_1F_2).
כלומר, הנקודה D היא גם נקודת החיתוך של הישר CF_2 עם ציר ה-y.
ניתן לראות כי המרחק של נקודה D מציר ה-x קטן יותר מהמרחק של נקודה C מציר ה-x ולכן ערך b_2 של האליפסה החדשה קטן בהכרח מערך b_1 של האליפסה המקורית.
בנוסף, לשתי האליפסות מוקד זהה (ערך c זהה).
בציור מופיעה האליפסה החדשה במקווקו. ניתן לראות כי:

$$a_1^2 = b_1^2 + c^2 \;\rightarrow\; c^2 = a_1^2 - b_1^2$$
$$a_2^2 = b_2^2 + c^2 \;\rightarrow\; c^2 = a_2^2 - b_2^2$$

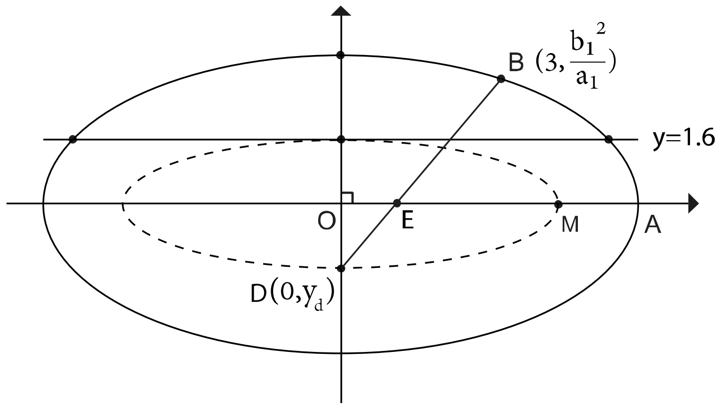
$b_2^2 < b_1^2$ ולכן <u>חייב</u> להתקיים: $a_2^2 < a_1^2$ על מנת שיתקבל c זהה בשתי האליפסות. לכן, **M משמאל לנקודה A**.

ב. נסמן את שיעורי הנקודה $F_1(c,0)$. לנקודה B ערך x זהה. נציב אותו במשוואת האליפסה כדי לקבל את שיעור y של הנקודה B:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\rightarrow\; c^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2 \;\rightarrow\; y^2a^2 = a^2b^2 - c^2b^2 \;\rightarrow\; y^2 = \frac{a^2b^2 - c^2b^2}{a^2} \;\rightarrow$$

$$y^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2} \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} y^2 = \frac{b^4}{a^2} \;\rightarrow\; y = \pm\frac{b^2}{a}$$

הנקודה B נמצאת ברביע הראשון ולכן $\boxed{y_B = \frac{b^2}{a}}$.



ג. לפי הנתון $EF_1 = 2$. הנקודה E היא מפגש התיכונים ולכן $F_1F_2 = 3EF_1 = 6$ (התיכונים מחלקים זה את זה ביחס של 2:1). נזכור כי $F_1F_2 = 2c$, מכאן נקבל: $2c = 6 \;\rightarrow\; c = 3$.
כעת נתבונן בישר $y = 1.6$ המופיע בציור. כדי שהישר יחתוך את האליפסות בשלוש נקודות בדיוק, עליו לעבור דרך נקודת החיתוך של האליפסה הקטנה
עם ציר ה-y. מכאן ש: $b_2 = 1.6$. נמצא את a_2:

$$a_2^2 = b_2^2 + c^2 \;\rightarrow\; a_2^2 = 1.6^2 + 3^2 \;\rightarrow\; a_2 = 3.4$$

מכאן שמשוואת האליפסה הקטנה היא: $\frac{x^2}{3.4^2} + \frac{y^2}{1.6^2} = 1 \;\rightarrow\; \boxed{\frac{25x^2}{289} + \frac{25y^2}{64} = 1}$

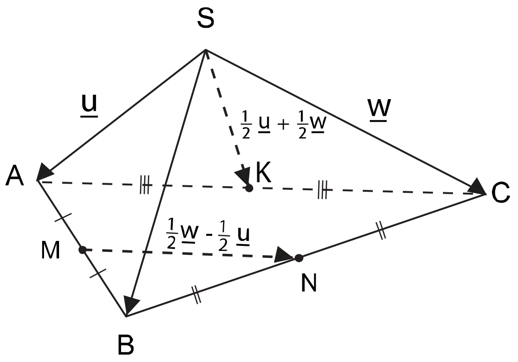
הנקודה E מחלקת את הקטע BD ביחס של 2:1 (מפגש התיכונים במשולש). נציב במשוואת חלוקת קטע ביחס נתון:

$$y_E = \frac{y_B \cdot 1 + y_D \cdot 2}{2+1} \;\rightarrow\; 0 = \frac{\frac{b_1^2}{a_1} - 1.6 \cdot 2}{3} \;\rightarrow\; b_1^2 = 3.2a_1$$

כמו כן: $\boxed{a_1^2 = b_1^2 + c}$ וגם $\boxed{c = 3}$.

נפתור את מערכת המשוואות ונקבל את הפתרונות: $a_1 = 5$ ו: $b_1 = 4$ ואת המשוואה: $\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$.

שאלה 2



א. ראשית, נביע את הווקטורים $\overrightarrow{SK}$ ו-$\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\underline{v}-\underline{u})+\frac{1}{2}(\underline{w}-\underline{v})=\frac{1}{2}\underline{w}-\frac{1}{2}\underline{u}$$

$$\overrightarrow{SK}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\frac{1}{2}(\underline{w}-\underline{u})=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{w}$$

כדי שהווקטורים יהיו מאונכים זה לזה, חייב להתקיים : $\overrightarrow{SK}\cdot\overrightarrow{MN}=0$.

$$\overrightarrow{SK}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2}\underline{w}-\frac{1}{2}\underline{u}\right)\left(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{w}\right)=\cancel{\frac{1}{4}\underline{w}\underline{u}}+\frac{1}{4}\underline{w}^2-\frac{1}{4}\underline{u}^2-\cancel{\frac{1}{4}\underline{u}\underline{w}}=\frac{1}{4}\underline{w}^2-\frac{1}{4}\underline{u}^2$$

נזכור כי : $|\underline{w}|=|\underline{u}|$ ולכן גם : $\underline{w}^2=\underline{u}^2$. מכאן : $\overrightarrow{SK}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\underline{w}^2-\frac{1}{4}\underline{u}^2=0$. כלומר, הווקטורים מאונכים.

ב. נביע את האורכים : $\overrightarrow{SA}=(-1-a,a-6,-12)$, $\overrightarrow{SC}=(-2a,-12,-a-1)$.

לפי הנתון : $SA=SC$ נשווה את האורכים :

$$\sqrt{4a^2+144+a^2+2a+1}=\sqrt{a^2+2a+1+36-12a+a^2+144}\ \rightarrow\ 5a^2+2a+145=2a^2-10a+181$$

$$3a^2+12a-36=0\ \rightarrow\ a^2+4a-12=0\ \rightarrow\ \boxed{a=2}$$ (הפתרון השלילי נפסל)

לאחר הצבת $a=2$ נקבל את שיעורי הנקודות : $C(-2,-6,-2)$ ו- $A(-1,2,-11)$.

ניתן להוכיח שהמשולשים ΔCSB ו- ΔASB חופפים לפי משפט חפיפה צ.צ.צ. כלומר, $\measuredangle ASB=\measuredangle CSB$.

בהסתמך על כך, נוכיח שהמשולשים ΔASE ו- ΔCSE חופפים לפי משפט חפיפה צ.ז.צ. מכאן ש : $AE=CE$.

כעת נביע את הווקטורים : $\overrightarrow{AE}=(-2,p-2,-4p+11)$, $\overrightarrow{EC}=(1,-6-p,-2+4p)$ ונשווה את אורכיהם :

$$\sqrt{1+36+12p+p^2+4-16p+16p^2}=\sqrt{4+p^2-4p+4+16p^2-88p+121}\ \rightarrow$$

$$17p^2-4p+41=17p^2-92p+129\ \rightarrow\ 88p=88\ \rightarrow\ \boxed{p=1}$$

ג. פירמידה ישרה כאשר אורכי מקצועות הצד שלה שווים. נציב את $a=2$ בנתון $S(a,6,1)$ ונקבל : $S(2,6,1)$.

נחשב את אורכי מקצועות הצד AS ו-CS :

$$AS=\sqrt{\left(2-(-1)\right)^2+(6-2)^2+\left(1-(-11)\right)^2}=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=\sqrt{169}=13$$

לפי הנתון : $SA=SC$ ולכן גם : $CS=13$.

נציב בנתון $E(-3,p,-4p)$ את $p=1$ ונקבל : $E(-3,1,-4)$.

בכדי למצוא את שיעורי הקדקוד B תחילה נמצא את משוואת הישר SB בעזרת הקדקודים S ו-E :

$$SE=S+t\cdot\overrightarrow{SE}\ \rightarrow\ SE=(2,6,1)+t(-5,-5,-5)\ \rightarrow\ SE=(2,6,1)+t(1,1,1)$$

כעת, כיוון שהנקודה B נמצאת על המשך הישר SE נסיק שהיא מהצורה : $B(2+t,6+t,1+t)$.

נתון שהקדקוד B נמצא על המישור XY ולכן שיעור ה-z שלו הוא 0 ומתקיים :

$$1+t=0\ \rightarrow\ t=-1$$

נציב את ערך t שמצאנו בהצגה הפרמטרית של הישר SE כדי למצוא את שיעורי הקדקוד B ונקבל : $B(1,5,0)$.

לבסוף נחשב את אורך המקצוע BS :

$$BS=\sqrt{(2-1)^2+(6-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{1^2+5^2+0^2}=\sqrt{26}$$

וכיוון ש : $\sqrt{26}\neq 13$ מצאנו שאורך המקצוע BS <u>שונה</u> מאורכי המקצועות AS ו-CS והפירמידה SABC <u>אינה ישרה</u>.

שאלה 3

א. על מנת שנוכל להתייחס למספרים Z_1 ו- Z_2 כמספרים (מדומים או ממשיים) עלינו "להיפטר" מהמספר המרוכב במכנה. נעשה זאת על ידי הכפלת המונה והמכנה במספר הצמוד למכנה:

$$Z_1=\frac{2b+ai}{-2b+ai}\cdot\frac{-2b-ai}{-2b-ai}=\frac{-4b^2-2abi-2abi+a^2}{4b^2+a^2}=\frac{a^2-4b^2}{4b^2+a^2}-\frac{4ab}{4b^2+a^2}\cdot i$$

לפי הנתון, Z_1 הוא מספר <u>מדומה טהור</u> ולכן החלק <u>הממשי</u> שלו שווה ל-0. כלומר:

$$\frac{a^2-4b^2}{4b^2+a^2}=0 \rightarrow a^2-4b^2=0 \rightarrow a^2=4b^2 \rightarrow \boxed{a=2b}$$ (הפתרון השלילי נפסל על פי תנאי השאלה)

$$Z_2=\frac{b-i}{-a+bi}\cdot\frac{-a-bi}{-a-bi}=\frac{-ab-b^2i+ai-b}{a^2+b^2}=\frac{-ab-b}{a^2+b^2}+\frac{a-b^2}{a^2+b^2}\cdot i$$

לפי הנתון, Z_2 הוא מספר <u>ממשי טהור</u> ולכן החלק <u>המדומה</u> שלו שווה ל-0:

כלומר: $$\frac{a-b^2}{a^2+b^2}=0 \rightarrow \boxed{a=b^2}$$

נפתור את מערכת המשוואות שקיבלנו (במסגרות המלבניות): $b^2=2b \rightarrow b^2-2b=0 \rightarrow b(b-2)=0$.

על פי הנתון $0<b$ ולכן נקבל: $\boxed{b=2}$. בהתאם נקבל $\boxed{a=4}$.

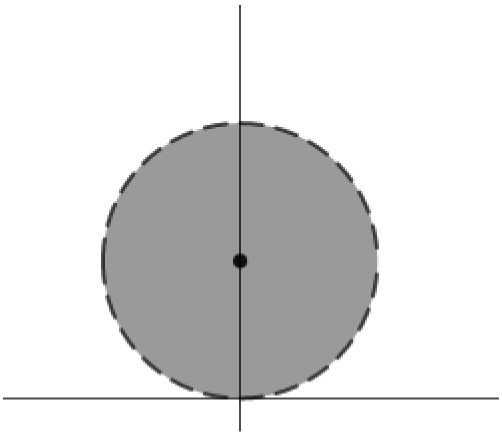
ב. נציב $a=4$, $b=2$ ו- $Z=x+yi$ במקום הגיאומטרי $|Z-5i|<a+b-1$ ונקבל:

$$|Z-5i|<a+b-1 \rightarrow |x+yi-5i|<4+2-1 \rightarrow |x+(y-5)\cdot i|<5$$

נזכור כי: $|Z|=R=\sqrt{x^2+y^2}$ ונקבל: $\sqrt{x^2+(y-5)^2}<5 \rightarrow \boxed{x^2+(y-5)^2<25}$

קיבלנו אי שוויון המזכיר משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $(0,5)$ ואורך רדיוסו 5 יח'. משוואת מעגל היא אוסף כל הנקודות הנמצאות **על** המעגל, כלומר מרחקן מהנקודה $(0,5)$ שווה ל-5. לעומת זאת, **המקום הגיאומטרי שקיבלנו** הוא אוסף כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $(0,5)$ קצר מ-5 יח' אורך. כלומר: **אוסף כל הנקודות שנמצאות <u>בתוך</u> המעגל**, <u>לא</u> כולל את הנקודות הנמצאות על המעגל עצמו.

לצורך הבהרה, המקום הגיאומטרי שקיבלנו נראה כך:



ג. הישר $3y+4x+n=0$ הוא ישר ששיפועו שלילי. הישר <u>אינו</u> חותך את המקום הגיאומטרי $x^2+(y-5)^2<25$ כאשר מרחק הישר מהנקודה $(0,5)$ גדול או שווה ל-5 יח' אורך. ניעזר בנוסחת המרחק בין נקודה לישר:

$$d=\frac{|Ax+By+c|}{\sqrt{A^2+B^2}} \rightarrow \frac{|4\cdot 0+3\cdot 5+n|}{\sqrt{4^2+3^2}}\geq 5 \rightarrow \frac{|15+n|}{5}\geq 5 \rightarrow |15+n|\geq 25$$

מכיוון שהביטוי השמאלי הוא בערך מוחלט ייתכנו שתי אפשרויות:

$15+n\leq -25 \rightarrow \boxed{n\leq -40}$ או $15+n\geq 25 \rightarrow \boxed{n\geq 10}$

שאלה 4

נתונה הפונקציה: $f(x)=a\ln^3 x+3\ln^2 x+3a\ln x$.

א. תחום ההגדרה נקבע לפי פונקציית ה-ln ולכן הוא: $\boxed{0<x}$.

ב. תחילה נמצא את הנגזרת של הפונקציה:

$$f'(x)=3a\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}+3\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}+3a\cdot\frac{1}{x}=\frac{3}{x}\left(a\ln^2 x+2\ln x+a\right)$$

כדי למצוא את מספר הפתרונות של המשוואה $f'(x)=0$ נפשט את הביטוי באמצעות הסימון $t=\ln x$ ונקבל את המשוואה הריבועית:

$$\frac{3}{x}\left(at^2+2t+a\right)=0\ \Big/:\frac{3}{x}\neq 0\ \rightarrow\ at^2+2t+a=0$$

שפתרונותיה הם: $t_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4a^2}}{2a}$.

1) קיימות שתי אפשרויות עבורן למשוואה הריבועית יהיה פתרון יחיד:

I. עבור $a=0$ המקדם t^2 במשוואה $at^2+2t+a=0$ יתאפס ולכן היא אינה ריבועית וקיים פתרון יחיד.

II. הביטוי בתוך השורש <u>שווה ל-0</u>:

$$4-4a^2=0\ \rightarrow\ 4a^2=4\ \rightarrow\ a^2=1\ \Big/\sqrt{\ }\ \rightarrow\ a=\pm 1$$

כלומר למשוואה הריבועית פתרון יחיד עבור: $\boxed{a=0}$ או $\boxed{a=\pm 1}$.

2) למשוואה הריבועית שני פתרונות כאשר הביטוי בתוך השורש <u>גדול מ-0</u>:

$$0<4-4a^2\ \rightarrow\ 0<1-a^2\ \rightarrow\ -1<a<1$$

אבל ראינו שעבור $a=0$ למשוואה פתרון יחיד ולכן התחום המתאים הוא: $\boxed{0<a<1}$ או $\boxed{-1<a<0}$.

3) למשוואה הריבועית לא יהיו פתרונות כאשר הביטוי בתוך השורש <u>קטן מ-0</u>:

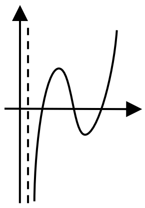
$$4-4a^2<0\ \rightarrow\ 1-a^2<0\ \rightarrow\ \boxed{a<-1}\ \text{או}\ \boxed{1<a}$$

ג. גרף I: הגרף עולה בכל תחום ההגדרה ולכן למשוואה $f'(x)=0$ לא קיימים פתרונות. לפי הסעיף הקודם טווח ערכי a המתאים הוא: $a<-1$ או $1<a$. כמו כן, נתון $0\leq a$ ולכן הטווח המבוקש הוא החיתוך המשותף לתחומים אלו: $\boxed{1<a}$.

גרף II: לגרף נקודת קיצון יחידה ולכן למשוואה $f'(x)=0$ פתרון יחיד. לפי הסעיף הקודם ערכי a המתאימים הם: $a=0$ או $a=1$. בנוסף נתון $a\neq 1$ ולכן קיים ערך a יחיד המקיים את תנאי השאלה: $\boxed{a=0}$.

גרף III: לגרף שתי נקודות קיצון ולכן למשוואה $f'(x)=0$ שני פתרונות. לפי הסעיף הקודם טווח ערכי a המתאים הוא: $0<a<1$ או $-1<a<0$. כמו כן, נתון $0\leq a$ ולכן הטווח המבוקש הוא החיתוך המשותף לתחומים אלו: $\boxed{0<a<1}$

ד. נתון: $0<a<1$ ולכן הגרף המתאים הוא גרף III:



כמו כן, המרחק בין נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא d_1.

1) נתונה הפונקציה $g(x)=f(x-4)$. המרחק בין נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הוא d_2.
גרף הפונקציה $g(x)$ מתקבל מהזזה של גרף $f(x)$ 4 יחידות ימינה על ציר ה-x ולכן המרחק בין נקודות הקיצון אינו משתנה. לכן הטענה הנכונה היא: ii. $\boxed{d_1=d_2}$.

2) נתונה הפונקציה $h(x)=f(0.5x)$. המרחק בין נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ הוא d_3.
גרף הפונקציה $h(x)$ מתקבל ממתיחה אופקית (פי 2) של גרף $f(x)$ מציר ה-y <u>כלפי חוץ</u> ולכן המרחק בין נקודות הקיצון גדל ומתקיים: $d_1<d_3$. בסעיף הקודם ראינו שמתקיים $d_1=d_2$. לכן, לפי כלל המעבר, הטענה הנכונה היא: i. $d_2<d_3$.

שאלה 5

א. נמצא את הנגזרת הראשונה $f'(x)$ בעזרת האינטגרל הבא:

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int\left(4e^{2x}+4e^{-2x}-17\right)dx=\frac{4e^{2x}}{2}+\frac{4e^{-2x}}{-2}-17x+C=2e^{2x}-2e^{-2x}-17x+C$$

כמו כן, נתון שהנגזרת הראשונה עוברת בראשית הצירים ולכן מתקיים: $f'(0)=0$ ונקבל:

$$f'(0)=0\ \rightarrow\ 2e^{2\cdot0}-2e^{-2\cdot0}-17\cdot0+C=0\ \rightarrow\ 2\cdot1-2\cdot1+C=0\ \rightarrow\ C=0$$

ולכן: $\boxed{f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}-17x}$.

ב. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של הנגזרת השנייה $f''(x)$ עם הצירים:

$$f''(x)=0\ \rightarrow\ 4e^{2x}+4e^{-2x}-17=0\ \rightarrow\ 4e^{2x}+\frac{4}{e^{2x}}-17=0\ \rightarrow\ \left[t=e^{2x}\right]\ \rightarrow\ 4t+\frac{4}{t}-17=0$$

$$\rightarrow\ 4t^2-17t+4=0\ \rightarrow\ t_1=4\ ,\ t_2=0.25$$

נציב את שני הפתרונות ונקבל:

$$e^{2x}=4\ \rightarrow\ \ln e^{2x}=\ln4\ \rightarrow\ 2x=\ln4\ \rightarrow\ x=\frac{\ln4}{2}\ \rightarrow\ x_1=\ln2$$

$$e^{2x}=0.25\ \rightarrow\ \ln e^{2x}=\ln0.25\ \rightarrow\ 2x=\ln0.25\ \rightarrow\ x=\frac{\ln0.25}{2}=\ln0.5=\ln2^{-1}=-\ln2\ \rightarrow\ x_2=-\ln2$$

כמו כן:

$$f''(0)=4e^{2\cdot0}+4e^{-2\cdot0}-17=4\cdot1+4\cdot1-17=-9$$

ולכן, שיעורי נקודות החיתוך של הנגזרת השנייה $f''(x)$ עם הצירים הם: $\boxed{\left(\pm\ln2,0\right)}$, $\boxed{\left(0,-9\right)}$.

ג. 1) לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול ברביע הראשון – **הטענה <u>אינה</u> נכונה:**

מימין לראשית הצירים הנגזרת הראשונה מתאפסת בנקודה אחת בלבד $x=\ln2$ ולכן זו חשודה בתור נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$. נמצא את הפונקציה $f(x)$ בעזרת האינטגרל הבא:

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(2e^{2x}-2e^{-2x}-17x\right)dx=e^{2x}+e^{-2x}-\frac{17}{2}x^2+C$$

כמו כן, נתון שהפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים ולכן מתקיים: $f(0)=0$ ונקבל:

$$f(0)=0\ \rightarrow\ e^{2\cdot0}+e^{-2\cdot0}-\frac{17}{2}0^2+C=0\ \rightarrow\ 1+1+C=0\ \rightarrow\ C=-2$$

ולכן: $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}-\frac{17}{2}x^2-2$.

נמצא את שיעור ה-y של הנקודה החשודה בפיתול:

$$f\left(\ln2\right)=e^{2\ln2}+e^{-2\ln2}-\frac{17}{2}\left(\ln2\right)^2-2\approx-1.834$$

ומכאן שזוהי <u>אינה נקודה ברביע הראשון</u> ולכן גם זו אכן נקודת פיתול, הטענה אינה נכונה.

2) לגרפים של הנגזרת $f'(x)$ ו- $f''(x)$ <u>אין</u> אסימפטוטות אופקיות - **הטענה <u>נכונה</u>:**

כאשר x שואף לאינסוף, המחוברים $4e^{2x}$ ו- $2e^{2x}$ ב-$f''(x)$ ו-$f'(x)$ בהתאמה, שואפים לאינסוף ולכן הפונקציות עצמן שואפות לאינסוף ואין אסימפטוטה אופקית ב-∞.

כאשר x שואף למינוס אינסוף, המחוברים $4e^{-2x}$ ו- $-2e^{-2x}$ ב-$f''(x)$ ו-$f'(x)$ בהתאמה, שואפים לאינסוף ולמינוס אינסוף ולכן אין אסימפטוטה אופקית ב-$-\infty$.

ד. השרטוט מופיע בפתרון בעמוד 229.

ה. 1) ראשית נראה ש: $f'(-x)=2e^{2(-x)}-2e^{-2(-x)}-17\left(-x\right)=2e^{-2x}-2e^{2x}+17x=-f'(x)$ ולכן הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית. מכאן נוכל להסיק שהפונקציה $f(x)$ היא <u>פונקציה זוגית</u>, כלומר מתקיים: $f(-x)=f(x)$.

כמו כן, מתקיים: $g(-x)=\left(-x\right)^3\cdot f(-x)=\left(-x\right)^3\cdot f(x)=-x^3\cdot f(x)=-g(x)$ ולכן נוכל להסיק שהפונקציה $g(x)$ היא <u>פונקציה אי-זוגית</u>.

2) האינטגרל המבוקש $\int_{-n}^{n}x^3\cdot f(x)dx$ הוא למעשה $\int_{-n}^{n}g(x)dx$. בסעיף הקודם ראינו ש-$g(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

לכן, כיוון שמדובר על גבול סימטרי ביחס לראשית הצירים, נסיק שערך האינטגרל הוא 0.