

פרק פונקציית חזקה וריבוי של פונקציית פולינום
שנוסף למהדורת 2025 של ספר 571 יוד של ארכימדס



במהדורת 2025 של הספר בוצעו עדכונים רבים, לרבות הוספת פרק בנושא ריבוי של פונקציית פולינום, הוספת משפטי מעגל שהוכנסו לאחרונה לתוכנית הלימודים בשאלון 571, הוספת שאלות חקר, החלפת שאלות אלגבריות בשאלות מעניינות יותר, ועוד.

בחוברת זו מופיע פרק פונקציית החזקה וריבוי של פונקציית פולינום אשר הוסף למהדורת 2025.

פרטים לגבי הספר : <https://bit.ly/45i8MjG>

לשאלות בנושא לצוות ארכימדס בווטסאפ : 050-9074007.

הזמנת עותק **במשלוח הביתה** או עותק **דיגיטלי** : <https://bit.ly/45mmkuw>

להזמנה **מרוכזת** מ"יש הפצות" ניתן לפנות בווטסאפ או בשיחה למספר : 054-715-4122 או לפנות אליהם

בכתובת המייל yeshbooks@gmail.com או באתר : <https://bit.ly/3FQfqBy>

פונקציות חזקה עם מעריך טבעי $f(x) = x^n$

מהי פונקציית חזקה?

פונקציית חזקה היא פונקציה שהייצוג האלגברי שלה הוא מהסוג: $f(x) = ax^n$ כך שהמקדם a הוא מספר ממשי שונה מ-0 ו- n מספר שלם ואי-שלילי. לדוגמה: הפונקציות $f(x) = 2x^5$, $g(x) = -6x^5$. תחילה נעסוק רק בפונקציות שבהן $a = 1$. כאשר נעסוק בטרנספורמציות, נעסוק בערכי a נוספים.

1. נתונה פונקציית החזקה $f(x) = x^4$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$? הסבירו.

ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? הסבירו.

ג. השלימו:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)					

ד. העתיקו למחברת את מערכת הצירים המופיעה משמאל, וסמנו עליה את הנקודות שמצאתם בטבלה, כך שיתקבל גרף נקודות בדיד.

לאחר מכן העבירו עקומה דרך נקודות אלו.

ה. היעזרו בגרף הרציף שהתקבל, ועבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש כאלו.

2. תחומי העלייה והירידה.

3. תחומי החיוביות והשליליות.

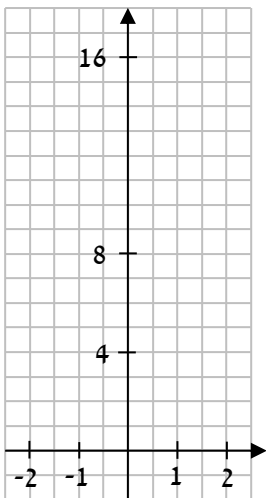
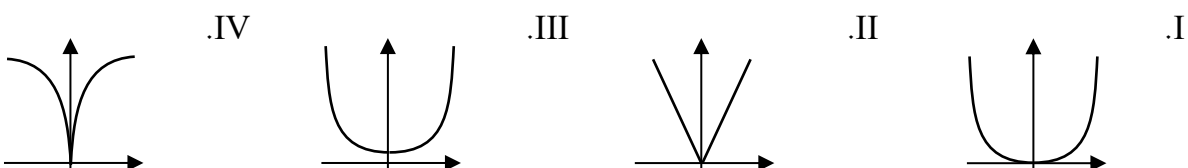
ו. היעזרו במחשבון, והשלימו את טבלת הערכים.

ז. עבור כל טענה, שעררו אם היא נכונה או שגויה:

i. ככל שערכי ה- x החיוביים שנציב בפונקציה $f(x)$ הולכים וגדלים לכיוון אינסוף (∞) , כך ערכי הפונקציה הולכים וגדלים לכיוון אינסוף (∞) .

ii. ככל שערכי ה- x השליליים שנציב בפונקציה $f(x)$ הולכים וקטנים לכיוון מינוס אינסוף $(-\infty)$, כך ערכי הפונקציה הולכים וגדלים לכיוון אינסוף (∞) .

ח. אחד מהגרפים שלפניכם הוא גרף הפונקציה $f(x)$. קבעו מהו הגרף המתאים, והסבירו:



x	-15	-10	-5	5	10	15
f(x)						

בשאלה הקודמת עסקנו בפונקציית חזקה מהסוג $f(x) = x^n$ כאשר n זוגי וחיובי.

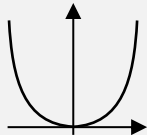
דוגמאות לפונקציות מסוג זה הן: $g(x) = x^6$, $h(x) = x^8$. לפונקציות אלו יש תכונות משותפות:

- הן פונקציות זוגיות שהגרף שלהן סימטרי ביחס לציר ה-y.

- הן מוגדרות לכל x .

- הגרפים שלהן עוברים בראשית הצירים וזו נקודת המינימום.

מסוג זה נראים כך:



- הן חיוביות בתחום: $0 < x$ ובתחום $x < 0$. אין תחום שבו הן שליליות.

- הן עולות בתחום $0 < x$ ויורדות בתחום $x < 0$.

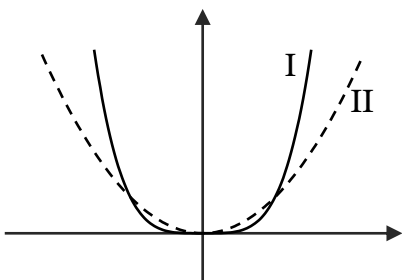
- ככל שערכי ה-x החיוביים שנציב בפונקציה $f(x)$ הולכים וגדלים לכיוון

אינסוף (∞) , כך ערכי הפונקציה הולכים וגדלים לכיוון אינסוף (∞) .

- ככל שערכי ה-x השליליים שנציב בפונקציה $f(x)$ הולכים וקטנים לכיוון מינוס אינסוף $(-\infty)$,

כך ערכי הפונקציה הולכים וגדלים לכיוון אינסוף (∞) .

2. לפניכם הגרפים של פונקציות החזקה $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = x^4$.



א. זהו איזה מהגרפים - I או II - מתאים לכל אחת מהפונקציות.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות.

ג. היעזרו בגרפים ופתרו את אי השוויון: $f(x) < g(x)$.

ד. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה. הסבירו:

i. $f(0.5) > g(0.5)$ ii. בתחום: $1 < x$ מתקיים: $f(x) > g(x)$.

iii. $f(-2) > g(-2)$ iv. בתחום: $-1 < x < 1$ מתקיים: $g(x) \leq f(x)$.

v. $f(-1) + g(-1) < f(1) + g(1)$ (*)

3. נתונה פונקציית החזקה $f(x) = x^n$. נתון ש- n מספר זוגי. נתונה המשוואה: $f(x) = 64$.

עמית טען: "מבלי לדעת את ערכו של n , לא ניתן לדעת כמה פתרונות יש למשוואה זו."

א. האם עמית צודק? אם כן, הסבירו מדוע. אם לא, קבעו כמה פתרונות יש למשוואה זו.

ב. נתון הישר $y = k$. קבעו עבור אילו ערכי k למשוואה $f(x) = k$:

1. יהיו שני פתרונות. 2. יהיה פתרון אחד. 3. לא יהיה פתרון.

ג. נתון שאחד מפתרונות המשוואה $f(x) = 64$ הוא $x = 2$. מצאו את:

1. ערכו של n .

2. פתרונות המשוואה: $f(x) = 729$.



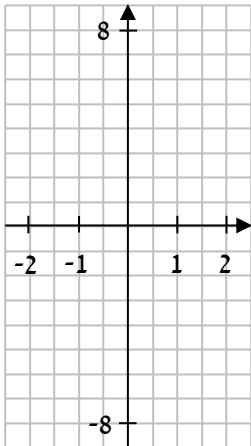
4. נתונה פונקציית החזקה $f(x) = x^3$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$? הסבירו.

ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או איזוגית? הסבירו.

ג. השלימו:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)					



ד. העתיקו למחברת את מערכת הצירים המופיעה משמאל, וסמנו עליה את הנקודות שמצאתם בטבלה, כך שיתקבל גרף נקודות בדיד.

לאחר מכן העבירו עקומה דרך נקודות אלו.

ה. היעזרו בגרף הרציף שהתקבל, ועבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש כאלו.

2. תחומי העלייה והירידה.

3. תחומי החיוביות והשליליות.

ו. היעזרו במחשבון, והשלימו את טבלת הערכים:

x	-15	-10	-5	5	10	15
f(x)						

ז. עבור כל טענה, שערו אם היא נכונה או שגויה:

i. ככל שערכי ה־x **החיוביים** שנציב בפונקציה $f(x)$ הולכים וגדלים לכיוון אינסוף (∞) , כך ערכי הפונקציה הולכים וגדלים לכיוון אינסוף (∞) .

ii. ככל שערכי ה־x **השליליים** שנציב בפונקציה $f(x)$ הולכים וקטנים לכיוון מינוס אינסוף $(-\infty)$, כך ערכי הפונקציה הולכים וגדלים לכיוון אינסוף (∞) .

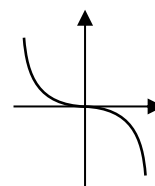
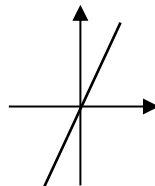
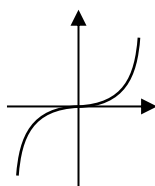
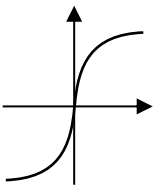
ח. אחד מהגרפים שלפניכם הוא גרף הפונקציה $f(x)$. קבעו מהו הגרף המתאים, והסבירו:

.IV

.III

.II

.I



בשאלה הקודמת עסקנו בפונקציית חזקה מהסוג $f(x) = x^n$ כאשר n איזוגי.

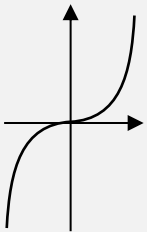
דוגמאות לפונקציות מסוג זה הן: $g(x) = x^5$, $h(x) = x^{11}$. לפונקציות אלו יש תכונות משותפות:

- הן פונקציות איזוגיות שהגרף שלהן סימטרי ביחס לראשית הצירים.

- הן מוגדרות לכל x .

הגרפים של פונקציות

מסוג זה נראים כך:



- הגרפים שלהן עוברים בראשית הצירים.

- הן חיוביות בתחום: $0 < x$ ושליליות בתחום: $x < 0$.

- הן עולות עבור כל x . אין תחום שבו הן יורדות.

- ככל שערכי ה- x החיוביים שנציב בפונקציה $f(x)$ הולכים וגדלים לכיוון

אינסוף (∞) , כך ערכי הפונקציה הולכים וגדלים לכיוון אינסוף (∞) .

- ככל שערכי ה- x השליליים שנציב בפונקציה $f(x)$ הולכים וקטנים לכיוון מינוס אינסוף $(-\infty)$,

כך ערכי הפונקציה הולכים וגדלים לכיוון מינוס אינסוף $(-\infty)$.

5. נתונה פונקציית החזקה $f(x) = x^3$.

א. חשבו את הערכים: 1. $f(2)$ 2. $f(1)$ 3. $f(0)$ 4. $f(-0.5)$ 5. $f(-3)$.

ב. מצאו את x שעבורו: 1. $f(x) = 1$ 2. $f(x) = 64$ 3. $f(x) = -1$ 4. $f(x) = -125$.

6. לפניכם הגרפים של פונקציות החזקה $f(x) = x^3$ ו- $g(x) = x^5$.

א. זהו איזה מהגרפים - I או II - מתאים לכל אחת מהפונקציות.

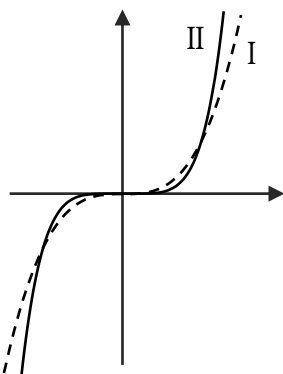
ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות.

ג. פתרו את אי השוויון: $f(x) < g(x)$.

ד. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה. הסבירו:

i. $f(-0.5) < g(-0.5)$ ii. $f(0.5) > g(0.5)$

iii. $f(-1) = -g(1)$ iv. $f(0.5) + g(-0.5) = 0$



7. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה. הסבירו:

i. לכל פונקציית חזקה $f(x) = x^n$ (n טבעי) יש נקודת מקסימום.

ii. קיימות פונקציות חזקה $f(x) = x^{2n}$ (n טבעי) שבהן עבור $x_1 < 0$ נקבל $f(x_1) < 0$.

iii. פונקציות החזקה $f(x) = x^{4n}$ ו- $g(x) = x^{2n}$ (n טבעי) נחתכות ב-2 נקודות בלבד.

תשובות:

1 א. כל x ; לא קיימים ערכי x שהצבתם בפונקציה תניב ביטוי חסר משמעות. **ב.** זוגית.

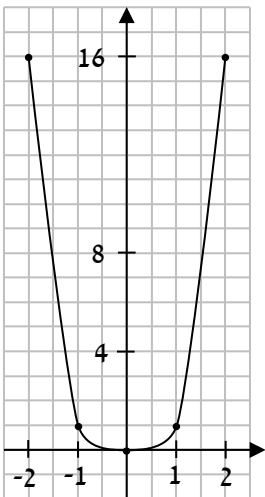
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	16	1	0	1	16

ג. הטבלה משמאל. **ד.** השרטוט משמאל למטה.

ה. 1. $(0, 0)$. 2. עלייה: $0 < x$; ירידה: $x < 0$.

3. חיוביות: $0 < x$; שליליות: $x < 0$.

ו.



x	-15	-10	-5	5	10	15
$f(x)$	50,625	10,000	625	625	10,000	50,625

ז. i. נכונה. ii. נכונה. ח. גרף I.

2 א. גרף I: $g(x)$, גרף II: $f(x)$. **ב.** $(-1, 1), (0, 0), (1, 1)$. **ג.** $1 < x$ או $x < -1$.

ד. i. נכונה. ii. שגויה. iii. שגויה. iv. נכונה. v. שגויה.

3 א. עמית טועה, למשוואה 2 פתרונות. **ב.** 1. $0 < k$. 2. $k = 0$. 3. $k < 0$.

ג. 1. $n = 6$. 2. $x = 3, x = -3$.

4 א. כל x ; לא קיימים ערכי x שהצבתם בפונקציה תניב ביטוי חסר משמעות.

ב. איזוגית. **ג.** הטבלה משמאל. **ד.** השרטוט משמאל למטה.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

ה. 1. $(0, 0)$. 2. עלייה: כל x ; ירידה: אף x .

3. חיוביות: $0 < x$; שליליות: $x < 0$.

ו.

x	-15	-10	-5	5	10	15
$f(x)$	-3,375	-1,000	-125	125	1,000	3,375

ז. i. נכונה. ii. שגויה. ח. גרף III.

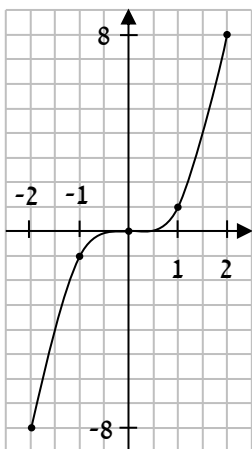
5 א. 1. $f(2) = 8$. 2. $f(1) = 1$. 3. $f(0) = 0$. 4. $f(-0.5) = -0.125$.

5. $f(-3) = -27$. **ב.** 1. $x = 1$. 2. $x = 4$. 3. $x = -1$. 4. $x = -5$.

6 א. גרף I: $f(x)$, גרף II: $g(x)$. **ב.** $(-1, -1), (0, 0), (1, 1)$.

ג. $x > 1$ או $-1 < x < 0$. **ד.** i. נכונה. ii. נכונה. iii. נכונה. iv. שגויה.

7 i. שגויה. ii. שגויה. iii. שגויה.



פונקציית פולינום

פונקציית פולינום, הנקראת גם פונקציה פולינומיאלית, היא פונקציה שהייצוג האלגברי שלה הוא:

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

כך ש: $a_n \neq 0$ ו- n מספר שלם אי-שלילי.

מעלת הפולינום היא החזקה הגבוהה ביותר של x בייצוג האלגברי של פונקציית הפולינום. דוגמאות לפונקציות פולינום:

בפונקציה $f(x) = 2x^5 - x^2$ החזקה הגבוהה ביותר של x היא 5, וזו פונקציית פולינום **ממעלה 5**.

בפונקציה $f(x) = -7x^3 + x^2 + x$ החזקה הגבוהה ביותר של x היא 3, ולכן זו פונקציית פולינום **ממעלה 3**.

1. קבעו אלו מהפונקציות הבאות הן פונקציות פולינום, וציינו מאיזו מעלה הפולינום:

i. $f(x) = x^4 + x + 7$ ii. $g(x) = -x^{2.5} + 2x^2 - 1$ iii. $h(x) = 7x^8 - 8x^7$

2. כתבו פונקציית פולינום **משלכם** שבה הפולינום ממעלה: א. רביעית. ב. תשיעית.

מהו ריבוי של גורם?

בתחום המספרים הממשיים כל פונקציית פולינום ניתנת להצגה גם כפולינום וגם כמכפלת חזקות של גורמים ליניאריים ו/או גורמים ריבועיים בלתי פריקים.

נתבונן בפונקציה: $f(x) = x^7 - 2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^3$.

ניתן להציג אותה גם כמכפלה: $f(x) = x^3(x-1)^2(x^2+1)$.

מעריך החזקה שבסיסה הוא גורם ליניארי או גורם ריבועי בלתי פריק נקרא **ריבוי הגורם**. נדגים זאת בעזרת הפונקציה $f(x)$:

החזקה של הגורם הליניארי x היא 3, ולכן **הריבוי של הגורם x הוא 3**.

החזקה של הגורם הליניארי $x-1$ היא 2, ולכן **הריבוי של הגורם $x-1$ הוא 2**.

החזקה של הגורם הריבועי הבלתי פריק x^2+1 היא 1, ולכן **הריבוי של הגורם x^2+1 הוא 1**.

3. עבור כל פונקציית פולינום הציגו את הריבוי של כל גורם:

א. $f(x) = (x-4)^5 \cdot (x^2+1)^3$ ב. $f(x) = (x^2+5)^3 \cdot (x+7)^5$



4. כתבו פונקציית פולינום **משלכם** שבה יש גורם ליניארי עם ריבוי 3 וגורם ליניארי עם ריבוי 4.



בכל אחת מנקודות החיתוך של גרף פונקציית פולינום עם ציר ה־x (נקודת האפס), אחד מהגורמים הליניאריים מתאפס. גורמים ריבועיים **שאינם פריקים** לגורמים ליניאריים, אינם מתאפסים.

5. נתונה פונקציית הפולינום: $f(x) = x^5 \cdot (x-4)^3 \cdot (x^2+1)$.

א. מבלי לפתוח סוגריים, קבעו איזו מהטענות נכונה ביחס לפונקציה $f(x)$, והסבירו:
 i. יש לה נקודת אפס אחת. ii. יש לה 2 נקודות אפס. iii. יש לה 3 נקודות אפס.



ב. קבעו כמה נקודות אפס יש לפונקציות הבאות:

$$1. g(x) = (2x^2 + 1)^8 \cdot (6 - x)^2$$

$$2. h(x) = x^2 \cdot (x^2 + 6) \cdot (x - 2)^4$$

6. עבור כל פונקציה, מצאו את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה־x:

א. $f(x) = x^6 \cdot (x^2 + 9)^2 \cdot (x + 8)$ ב. $f(x) = (x - 7)^5 \cdot (2 - x)^3 \cdot (x^2 + 16)$

מהם ריבוי זוגי וריבוי איזוגי?

נתבונן בפונקציית הפולינום $f(x) = x^3 \cdot (x - 2)^4$.

הריבוי של הגורם x הוא 3, וזהו **ריבוי איזוגי**. הריבוי של הגורם $x - 2$ הוא 4, וזהו **ריבוי זוגי**.

7. בכל פונקציה כתבו לאילו גורמים יש ריבוי זוגי ולאילו גורמים יש ריבוי איזוגי:

א. $f(x) = (3 - x)^9 \cdot (x + 5)^5$

ב. $g(x) = x^3 \cdot (x - 6)^2 \cdot (3x - 5)^4$

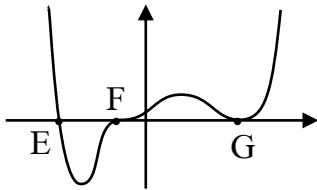
ג. $h(x) = x \cdot (6 - x)^4 \cdot (2x + 7)^3$

8. כתבו פונקציית פולינום **משלכם** שבה מופיעים גורם בעל ריבוי זוגי ושני גורמים בעלי ריבוי איזוגי.

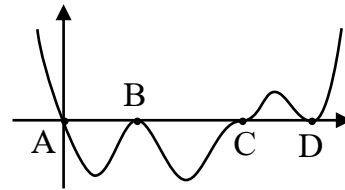


9. לפניכם שתי פונקציות פולינום וסקיצות של הגרפים שלהן:

$$g(x) = (x + 3) \cdot (x + 1)^5 \cdot (x - 3)^6$$

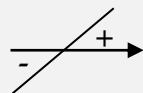


$$f(x) = x \cdot (x - 2)^2 \cdot (x - 5)^3 \cdot (x - 8)^4$$

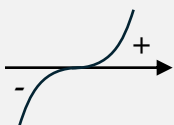
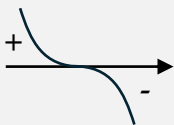


- א. מצאו את שיעורי נקודות האפס A, B, C, D, E, F, G.
- ב. באילו מנקודות האפס שמצאתם מתאפס גורם ליניארי שהריבוי שלו הוא 1?
- ג. באילו מנקודות האפס שמצאתם מתאפס גורם ליניארי שהריבוי שלו זוגי?
- ד. באילו מנקודות האפס שמצאתם מתאפס גורם ליניארי שהריבוי שלו איזוגי וגדול מ-1?
- ה. התבוננו בצורת גרף הפונקציה בסביבת נקודות האפס מסעיף ב'. מהו המאפיין המשותף?
- ו. התבוננו בצורת גרף הפונקציה בסביבת נקודות האפס מסעיף ג'. מהו המאפיין המשותף?
- ז. התבוננו בצורת גרף הפונקציה בסביבת נקודות האפס מסעיף ד'. מהו המאפיין המשותף?

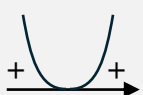
בשאלה הקודמת עסקנו בקשר שבין צורת הגרף של פונקציית פולינום בסביבת נקודת האפס לבין ריבוי זוגי וריבוי איזוגי. בהקשר זה מתקיימים שלושה מצבים אפשריים:



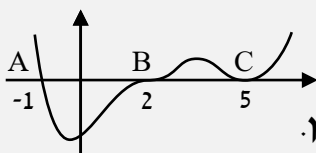
בנקודת אפס של פונקציית פולינום, שבה מתאפס גורם ליניארי בעל ריבוי 1, הגרף חותך את ציר ה-x והפונקציה מחליפה סימן.



בנקודת אפס של פונקציית פולינום, שבה מתאפס גורם ליניארי בעל ריבוי איזוגי שאינו 1, הגרף חותך את ציר ה-x כך שגרף הפונקציה "מתפתל" והפונקציה מחליפה סימן.



בנקודת אפס של פונקציית פולינום, שבה מתאפס גורם ליניארי בעל ריבוי זוגי, תתקבל נקודת קיצון מקומית כך שהפונקציה אינה מחליפה סימן.



נדגים בעזרת גרף פונקציית הפולינום $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 2)^3 \cdot (x - 5)^2$ שהסקיצה של הגרף שלה מופיעה משמאל.

בנקודה A מתאפס הגורם $(x + 1)$ שהריבוי שלו 1 והפונקציה מחליפה סימן.

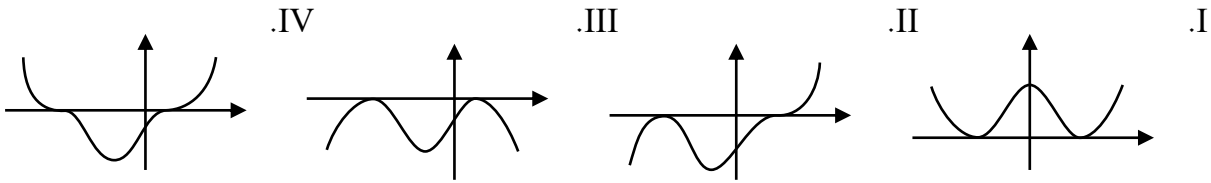
בנקודה B מתאפס הגורם $(x - 2)^3$ שהריבוי שלו 3 הוא איזוגי, הגרף מתפתל והפונקציה מחליפה

סימן. בנקודה C מתאפס הגורם $(x - 5)^2$ שהריבוי שלו 2 הוא זוגי, מתקבלת נקודת מינימום והפונקציה מחליפה סימן.

10. נתונה פונקציית הפולינום $f(x) = (x + 4)^4 \cdot (x - 2)^7$.

א. מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה $f(x)$.

ב. אחת מהסקיצות IV-I מתאימה לגרף הפונקציה $f(x)$. קבעו מהי הסקיצה המתאימה:



11. לפניכם סקיצה של גרף פונקציית פולינום כלשהי. הסתמכו על שיקולי ריבוי

זוגי ואיזוגי, וקבעו לאילו מהפונקציות הבאות גרף זה עשוי להתאים:



i. $f(x) = (x + 6)^2 \cdot (x - 3)^4$ ii. $g(x) = (x + 2)^3 \cdot (x - 1)$

iii. $h(x) = (x + 8)^6 \cdot (x - 4)^2$ iv. $k(x) = (x + 6)^2 \cdot (x - 3)^5$

12. נתונה פונקציית הפולינום $f(x) = (x - 2)^3 \cdot (x + 2)^2$.

א. מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה $f(x)$.

ב. היעזרו בריבוי של כל גורם ליניארי ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

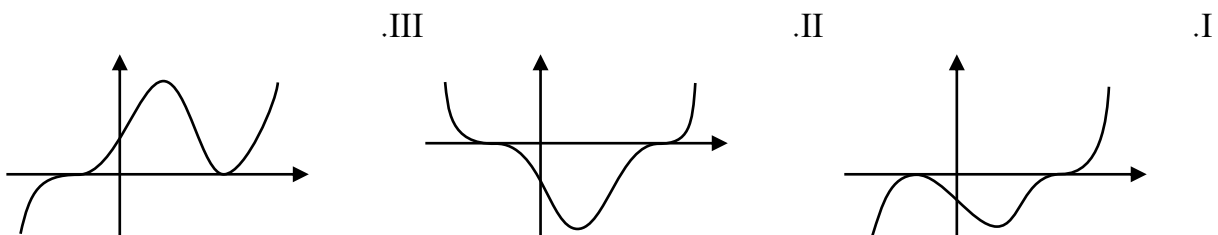
ג. היעזרו בסעיפים הקודמים, ושרטטו סקיצות של הגרפים של הפונקציות:

1. $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 3)$ 2. $f(x) = x^5 \cdot (x - 1)^4$

3. $f(x) = (x - 1)^6 \cdot (x + 5)^3$ 4. $f(x) = x \cdot (x + 3)^2 \cdot (x - 4)^3$

5. $f(x) = x^7 \cdot (x + 2)^4 \cdot (x + 8)$ 6. $f(x) = (x + 2)^6 \cdot (x + 4)^4 \cdot (x - 4)^7$

13. נתונה פונקציית הפולינום $f(x) = (x + 2)^n \cdot (x - 5)^k$, n ו- k שלמים וחיוביים. נתונות שלוש סקיצות:



הציעו ערכי n ו- k משלכם עבורם הסקיצה שתתאים לגרף הפונקציה תהיה:

א. סקיצה I. ב. סקיצה II. ג. סקיצה III.

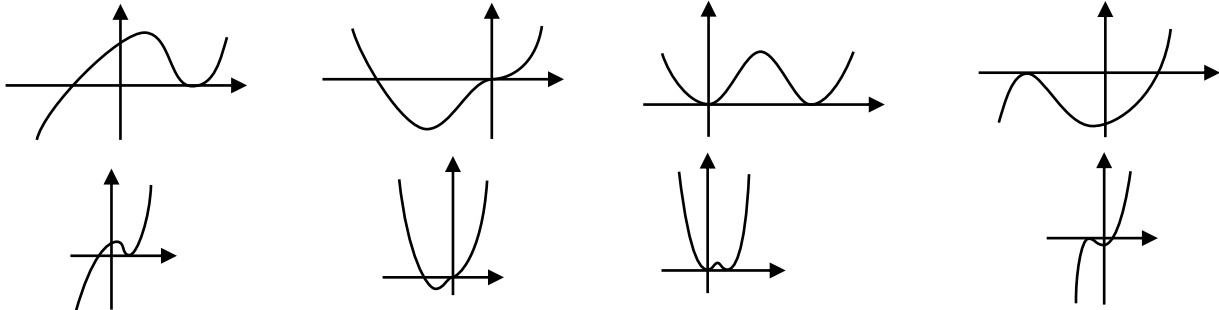


תזכורת! מעלת הפולינום היא החזקה הגבוהה ביותר של x בייצוג האלגברי של פונקציית הפולינום.

14. לפניכם ארבע פונקציות פולינום. מתחת לכל פונקציה מצורפות שתי סקיצות של הגרף שלה. הסקיצה העליונה מתמקדת בסביבת ראשית הצירים, והסקיצה התחתונה מעניקה "מבט מרחוק".



$$k(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 \quad h(x) = x^4 + 3x^3 \quad g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \quad f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$



- א. באילו מהפונקציות מעלת הפולינום היא זוגית?
 ב. באילו מהפונקציות מעלת הפולינום היא איזוגית?
 ג. התבוננו בגרף התחתון של כל פונקציה. השוו בין צורות הגרפים של הפונקציות שמצאתם בסעיף א', לבין צורות הגרפים של הפונקציות שמצאתם בסעיף ב'.
 מה ניתן להסיק לגבי הקשר בין צורת הגרף לבין הזוגיות או אי-הזוגיות של מעלת הפולינום?

בשאלה הקודמת עסקנו בקשר שבין צורת הגרף לבין הזוגיות או אי-הזוגיות של מעלת הפולינום. בפונקציות שבהן מעלת הפולינום זוגית והמקדם של ה- x שזו חזקתו הוא חיובי, לדוגמה בפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ בשאלה הקודמת, התנהגות הפונקציה באינסוף ובמינוס אינסוף דומה לזו של הפונקציה $y = x^2$ ולהתנהגות של כל פונקציית חזקה בעלת מעריך זוגי: ככל שערכי ה- x החיוביים מקיימים $x \rightarrow \infty$ כך ערכי הפונקציה מקיימים $f(x) \rightarrow \infty$. ככל שערכי ה- x השליליים מקיימים $x \rightarrow -\infty$ כך ערכי הפונקציה מקיימים $f(x) \rightarrow \infty$. נשים לב שכאשר בייצוג האלגברי של הפונקציה, מקדם ה- x בעל המעריך הגדול ביותר הוא שלילי, צורת הגרף היא הפוכה, והוא דומה לגרף הפונקציה $y = -x^2$.

בפונקציות שבהן מעלת הפולינום איזוגית והמקדם של ה- x שזו חזקתו הוא חיובי, לדוגמה בפונקציות $f(x)$ ו- $k(x)$ בשאלה הקודמת, התנהגות הפונקציה באינסוף ובמינוס אינסוף דומה לזו של הפונקציה $y = x^3$ ולהתנהגות של כל פונקציית חזקה בעלת מעריך איזוגי: ככל שערכי ה- x החיוביים מקיימים $x \rightarrow \infty$ כך ערכי הפונקציה מקיימים $f(x) \rightarrow \infty$. ככל שערכי ה- x השליליים מקיימים $x \rightarrow -\infty$ כך ערכי הפונקציה מקיימים $f(x) \rightarrow -\infty$. נשים לב שכאשר בייצוג האלגברי של הפונקציה, מקדם ה- x בעל המעריך הגדול ביותר הוא שלילי, צורת הגרף היא הפוכה, והוא דומה לגרף הפונקציה $y = -x^3$.

15. נתונות ארבע פונקציות פולינום :

$$g(x) = -x^7 + 5x^4 - 5x^2, \quad f(x) = x^6 - 4x^5 - 3x + 1$$

$$k(x) = -7x^4 - 9x^3 + 6, \quad h(x) = 3x^5 - x^4 - 3x^2 - 5$$

- א. קבעו באילו מהפונקציות הנתונות מעלת הפולינום זוגית.
 ב. קבעו באילו מהפונקציות הנתונות המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא חיובי.
 ג. לפניכם הטענה: "כאשר $x \rightarrow \infty$ אז ערכי ה־ y של הפונקציה שואפים לאינסוף".
 קבעו עבור אילו מהפונקציות הנתונות, הטענה נכונה.
 ד. לפניכם הטענה: "כאשר $x \rightarrow -\infty$ אז ערכי ה־ y של הפונקציה שואפים למינוס אינסוף".
 קבעו עבור אילו מהפונקציות הנתונות, הטענה נכונה.

16. נתונות שתי פונקציות פולינום :

$$g(x) = (x+1)(1-x)(x-2) \quad f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$$

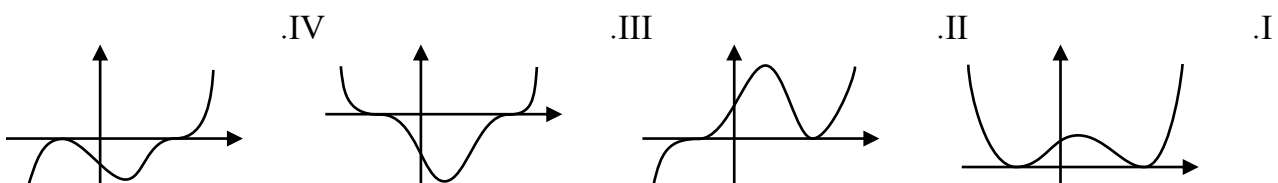
- א. הסבירו מדוע בשתי הפונקציות הנתונות, מעלת הפולינום היא 3.
 ב. עבור כל פונקציה קבעו אם מקדם החזקה הגבוהה ביותר הוא חיובי או שלילי.
 ג. שרטטו סקיצה של הגרף של כל פונקציה, וציינו בה את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
 ד. בדקו את ערכי הפונקציה כאשר $x \rightarrow \infty$ ו־ $x \rightarrow -\infty$.

17. נתונות שלוש פונקציות פולינום :

$$h(x) = (2-x)^2(x+1)^2 \quad g(x) = (2-x)^2(x+1) \quad f(x) = (2-x)(x+1)^2$$

- א. מבלי לפתוח את הסוגריים, עבור כל פונקציה מצאו את מעריך הפולינום, וקבעו אם מקדם החזקה הגבוהה ביותר של x הוא חיובי או שלילי.
 ב. שרטטו סקיצה של הגרף של כל פונקציה, וציינו בה את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
 ג. בדקו את ערכי הפונקציה כאשר $x \rightarrow \infty$ ו־ $x \rightarrow -\infty$.

18. נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot (x+3)^n \cdot (x-6)^k$, n ו־ k שלמים וחיוביים. נתונות שלוש סקיצות :

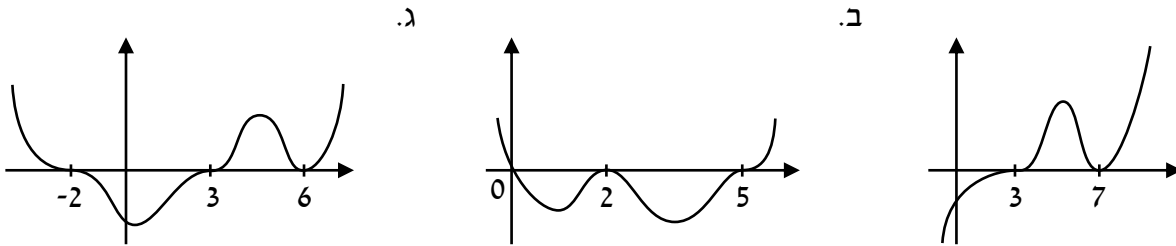


הציעו ערכי n , k ו־ a משלכם עבורם הסקיצה שתתאים לגרף הפונקציה תהיה :

- א. סקיצה I. ב. סקיצה II. ג. סקיצה III. ד. סקיצה IV.



19. עבור כל גרף הציעו פונקציית פולינום **משלכם**, והציגו אותה אלגברית כמכפלת ביטויים ליניאריים בעלי חזקות טבעיות:



20. נתונה הפונקציה הריבועית $f(x) = (x - m)(x - n)$, $(0 < n < m)$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונות הפונקציות: $g(x) = (x - m)^3 \cdot (x - n)$, $h(x) = (x - m)^2 \cdot (x - n)^3$.

שרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של הגרפים של הפונקציות:

1. $f(x)$ ו- $g(x)$ 2. $f(x)$ ו- $h(x)$

תשובות:

1. i. פונקציית פולינום ממעלה 4. ii. אינה פונקציית פולינום. iii. פונקציית פולינום ממעלה 8.

2. תשובות אפשריות: א. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^4 - 2x^2 - 3$, ב. $h(x) = x^9 - 3$.

$k(x) = x^4 - x^7 + x^9$

3. א. הריבוי של הגורם הליניארי $x - 4$ הוא 5 והריבוי של הגורם הריבועי הבלתי פריק $x^2 + 1$ הוא 3.

ב. הריבוי של הגורם הריבועי הבלתי פריק $x^2 + 5$ הוא 3 והריבוי של הגורם הליניארי $x + 7$ הוא 5.

4. תשובות אפשריות: $f(x) = x^3 \cdot (x - 5)^4$, $g(x) = (x + 3)^4 \cdot (x - 2)^3$.

5. א. ii. לפונקציה $f(x)$ יש שני גורמים ליניאריים ולכן יש לה 2 נקודות אפס. ב. 1. 1. 2. 2.

6. א. $(0, 0)$, $(-8, 0)$. ב. $(2, 0)$, $(7, 0)$.

7. א. זוגי: אין; איזוגי $x + 5$ ו- $x - 3$. ב. זוגי: $x - 6$ ו- $3x - 5$; איזוגי x .

ג. זוגי: $x - 6$; איזוגי x ו- $2x + 7$.

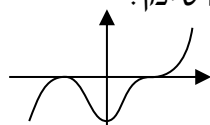
8. תשובה אפשריות: $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 12) \cdot (x + 1)^3$.

9. א. $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(5, 0)$, $D(8, 0)$, $E(-3, 0)$, $F(-1, 0)$, $G(3, 0)$. ב. A, E . ג. B, D, G .

ד. F, C . ה. בנקודות אלו גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x והפונקציה משנה סימן. ו. בנקודות אלו

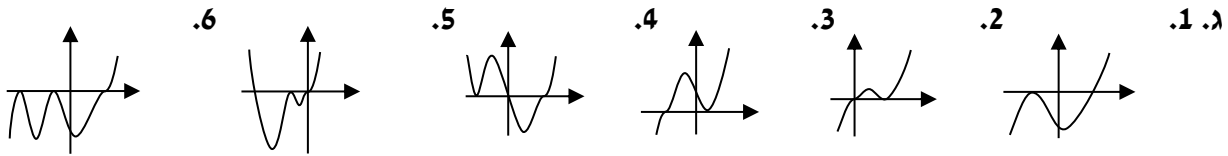
מתקבלת נקודת קיצון. גרף הפונקציה משיק לציר ה- x והפונקציה אינה משנה סימן. ז. בנקודות אלו

גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x והפונקציה משנה סימן.



10. א. $(-4, 0)$, $(2, 0)$. ב. II. 11. i, iii.

12 א. $(-2, 0), (2, 0)$. ב. השרטוט משמאל.



13 תשובות אפשריות: א. $k=3, n=2$. ב. $k=3, n=3$. ג. $k=2, n=3$.

14 א. $g(x)$ ו- $h(x)$. ב. $f(x)$ ו- $k(x)$. ג. כאשר מעלת הפולינום זוגית, ככל שערכי ה- x מקיימים $x \rightarrow \infty$

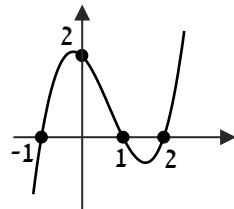
או $x \rightarrow -\infty$ כך ערכי הפונקציה מקיימים $f(x) \rightarrow \infty$. כאשר מעלת הפולינום איזוגית ככל שערכי ה- x

החיוביים מקיימים $x \rightarrow \infty$ כך ערכי הפונקציה מקיימים $f(x) \rightarrow \infty$ וככל שערכי ה- x השליליים

מקיימים $x \rightarrow -\infty$ כך ערכי הפונקציה מקיימים $f(x) \rightarrow -\infty$.

15 א. $f(x), k(x)$. ב. $f(x), h(x)$. ג. $f(x), h(x)$. ד. $h(x), k(x)$.

16 א. אם נפתח את הסוגריים בעזרת חוק הפילוג, נקבל שהחזקה הגבוהה ביותר של x היא 3.



$f(x)$: ב. חיובי. ג. השרטוט העליון.

ד. כאשר $x \rightarrow \infty : f(x) \rightarrow \infty$. כאשר $x \rightarrow -\infty : f(x) \rightarrow -\infty$.

$g(x)$: ב. שלילי. ג. השרטוט התחתון.

ד. כאשר $x \rightarrow \infty : g(x) \rightarrow -\infty$. כאשר $x \rightarrow -\infty : g(x) \rightarrow \infty$.

17 $f(x)$: א. 3; שלילי. ב. השרטוט הימני.

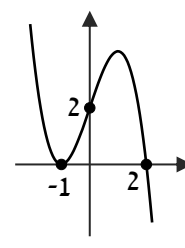
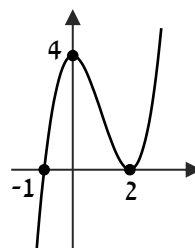
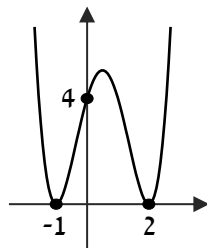
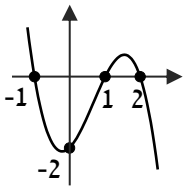
ג. כאשר $x \rightarrow \infty : f(x) \rightarrow -\infty$. כאשר $x \rightarrow -\infty : f(x) \rightarrow \infty$.

$g(x)$: א. 3; חיובי. ב. השרטוט האמצעי.

ג. כאשר $x \rightarrow \infty : g(x) \rightarrow \infty$. כאשר $x \rightarrow -\infty : g(x) \rightarrow -\infty$.

$h(x)$: א. 4; חיובי. ב. השרטוט השמאלי.

ג. כאשר $x \rightarrow \infty : h(x) \rightarrow \infty$. כאשר $x \rightarrow -\infty : h(x) \rightarrow \infty$.



18 תשובות אפשריות: א. $k=2, n=2, a=3$. ב. $k=2, n=3, a=2$. ג. $k=3, n=3, a=2$.

ד. $k=3, n=2, a=1$. 19 תשובות אפשריות: א. $f(x) = (x-3)^3 \cdot (x-7)^2$.

ב. $f(x) = x \cdot (x-2)^2 \cdot (x-5)^3$. ג. $f(x) = (x+2)^3 \cdot (x-3)^3 \cdot (x-6)^2$.

20 א. השרטוט הימני.

ב. 1. השרטוט האמצעי. 2. השרטוט השמאלי.

