פתרון מלא - מבחן 4

שאלה 1

א. נתונה סדרה שבה האיבר הכללי הוא $a_n = (-1)^n \cdot n$ וסכומה 100.

בסדרה מספר זוגי של איברים. נמצא כמה איברים בסדרה:

האיבר הכללי $(-1)^n \cdot n$ מורכב ממכפלת הפרמטר n, המייצג את המספרים הטבעיים, במקדם $(-1)^n$.

מכאן נובע שבמיקום ה-n נקבל איבר שערכו n והסימן שלו ייקבע לפי החוקיות הבאה:

- כאשר ערך הפרמטר n זוגי המקדם $(-1)^n$ יהיה שווה ל-1 ולכן הסימן של האיבר n יהיה חיובי.
- כאשר ערך הפרמטר n אי זוגי המקדם $(-1)^n$ יהיה שווה ל- -1 ולכן הסימן של האיבר n יהיה שלילי.

כלומר איברי הסדרה הראשונים הם: $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots$

נתון שמספר האיברים בסדרה המקורית הוא זוגי ולכן נסמן אותו ב- 2k.

נפריד את הסדרה הכללית לשתי תתי-סדרות בעלות k איברים כל אחת: תת-סדרת האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים ותת-סדרת האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

כל אחת מתתי הסדרות שהתקבלו היא סדרה חשבוניות והפרמטרים שלה מוצגים בטבלה הבאה:

מקומות אי זוגיים	מקומות זוגיים	
-2	2	d
k	k	N
-1	2	A_1

הסכום S_1 של הסדרה החשבונית המורכבת מהאיברים במקומות האי זוגיים הוא:

$$S_1 = \frac{k}{2}\left[2\cdot(-1)+(k-1)\cdot(-2)\right] \rightarrow S_1 = k\left[(-1)+(k-1)\cdot(-1)\right] \rightarrow S_1 = k\left[-1-k+1\right] \rightarrow S_1 = -k^2$$

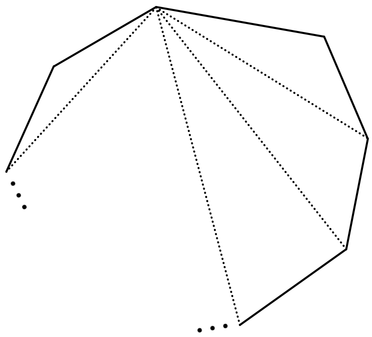
הסכום S_2 של הסדרה החשבונית המורכבת מהאיברים במקומות הזוגיים הוא:

$$S_2 = \frac{k}{2}\left[2\cdot 2+(k-1)\cdot 2\right] \rightarrow S_1 = k\left[2+(k-1)\right] \rightarrow S_1 = k\left[k+1\right] \rightarrow S_1 = k^2 + k$$

סכום הסדרה המקורית הוא $S_1 + S_2$ וכיוון שנתון לנו שהוא שווה ל-100 נקבל:

$$S_1 + S_2 = 100 \rightarrow -k^2 + (k^2 + k) = 100 \rightarrow k = 100$$

מצאנו ש- $k = 100$ וכיוון שמספר האיברים בסדרה המקורית שווה ל- 2k נסיק ש<u>בסדרה המקורית יש 200 איברים</u>.



ב. נתון מצולע קמור בעל n צלעות ($3 \le n$).

1. נביע באמצעות n את מספר אלכסוני המצולע:

מכל קודקוד במצולע ניתן להעביר אלכסון אל כל קודקוד אחר פרט אל הקודקוד עצמו, ואל שני הקודקודים הסמוכים לו. כלומר מכל אחד מ-n קודקודי המצולע ניתן להעביר אלכסון אל $n-3$ קודקודים אחרים. לכן כדי למנות את אלכסוני המצולע תחילה נעביר $n-3$ אלכסונים מכל אחד מ-n הקודקודים ולבסוף נחלק את התוצאה ב-2, כיוון שמנינו כל אלכסון פעמיים - פעם אחת עבור כל אחד משני הקודקודים שלו.

מכאן נובע שמספר האלכסונים במצולע בעל n צלעות הוא: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

2. במצולע יש 44 אלכסונים. נחשב את סכום הזוויות במצולע הנתון:

I. נשווה את מספר האלכסונים לנוסחה שמצאנו בסעיף 1 כדי למצוא את מספר הצלעות n במצולע:

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2}=44 \rightarrow n\cdot(n-3)=88 \rightarrow n^2-3n-88=0 \rightarrow (n-11)(n+8)=0 \rightarrow n_1=-8\,,\, n_2=11$$

הפתרון $n_1=-8$ נפסל כיוון שמספר הצלעות לא יכול להיות שלילי ולכן נסיק שבמצולע הנתון 11 צלעות.

II. נמצא את הנוסחה הכללית עבור סכום הזוויות במצולע קמור בעל n צלעות:

כאשר מעבירים מקודקוד יחיד במצולע את $n-3$ האלכסונים היוצאים ממנו (כפי שהודגם בסעיף 1) מקבלים חלוקה של המצולע למשולשים. העברת כל אחד מהאלכסונים מגדילה ב-1 את מספר תתי-המצולעים שהמצולע המקורי מורכב מהם ולכן $n-3$ האלכסונים שהעברנו מחלקים את המצולע ל: $(n-3)+1=n-2$ משולשים.

סכום הזוויות במצולע המקורי שווה לסכום הזוויות בכלל המשולשים שמרכיבים אותו. מצאנו שהמצולע מורכב מ- $n-2$ משולשים ומשום שסכום הזוויות בכל אחד מהם שווה ל- $180°$ נסיק שסכום הזוויות במצולע שווה ל- $180°\cdot(n-2)$.

שימו לב: החישוב שהוצג מתאים אך ורק עבור מצולע <u>קמור</u>, כפי שהוא נתון בשאלה, שכן החלוקה למשולשים מסתמכת על כך שכל האלכסונים שהועברו המסגרת החישוב נמצאים כולם <u>בתוך</u> המצולע.

III. לחישוב הסכום S של הזוויות במצולע קמור בעל n צלעות נציב את מספר הצלעות 11 בנוסחה שפיתחנו:

$$S=180°\cdot(n-2) \rightarrow S=180°\cdot(11-2) \rightarrow S=180°\cdot 9 \rightarrow S=1{,}620°$$

מכאן נובע שבמצולע בו 44 אלכסונים, סכום הזוויות שווה ל- $1{,}620°$.

ג. הטענות הבאות עוסקות במרובעים. עבור כל טענה, נקבע אם היא נכונה או שגויה:

i. יתכן שמכפלת הסינוסים של ארבע הזוויות במרובע תהיה שווה ל-1: הטענה נכונה.

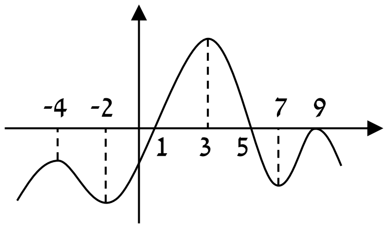
לדוגמה, במלבן ישנן 4 זוויות ישרות שגודלן $90°$. הסינוס של כל אחת מהזוויות הללו מקיים: $\sin 90° = 1$ ולכן מכפלת הסינוסים של 4 הזוויות תהיה שווה ל-1.

ii. יתכן שמכפלת הסינוסים של ארבע הזוויות במרובע תהיה שלילית: הטענה נכונה.

לדוגמה, בדלתון קעור 3 זוויות שגודל כל אחת מהן בין $0°$ ל- $180°$ ובנוסף זווית רביעית נישאה שטווח הערכים שלה הוא בין $180°$ ל- $360°$. הסינוס של כל אחת מ-3 הזוויות הראשונות הוא חיובי ואילו הסינוס של הזווית הנישאה הוא שלילי. לכן מכפלת הסינוסים של 4 הזוויות תהיה שלילית.

iii. יתכן שמכפלת הקוסינוסים של ארבע הזוויות במרובע תהיה שווה ל-0: הטענה נכונה.

הקוסינוס של זווית ישרה שגודלה $90°$ שווה ל-0 ולכן בכל מרובע שמכיל לפחות זווית ישרה אחת מכפלת הקוסינוסים של הזוויות היא מכפלה שאחד הגורמים שלה שווה ל-0 ולכן היא מתאפסת.



ד. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x. לפניכם גרף הנגזרת $f'(x)$.

עבור כל טענה נקבע אם היא נכונה או שגויה:

i. $f(6) < f(7)$: <u>הטענה שגויה</u>.

לפי השרטוט הנתון ניתן לראות שבתחום $6 \le x \le 7$ הנגזרת שלילית ולכן בין הערכים $x = 6$ ו- $x = 7$ הפונקציה נמצאת במגמת ירידה ומתקיים: $f(6) > f(7)$.

ii. $f''(10) < f''(-5)$: <u>הטענה נכונה</u>.

לפי השרטוט ניתן לראות שב- $f'(-5)$ פונקציית הנגזרת <u>עולה</u> ולכן הנגזרת השנייה חיובית שם ומקיימת: $0 < f''(-5)$. כמו כן, ניתן לראות שב- $f'(10)$ פונקציית הנגזרת <u>יורדת</u> ולכן הנגזרת השנייה שלילית שם ומקיימת: $f''(10) < 0$. משני אלה נוכל להסיק ש: $f''(10) < f''(-5)$.

iii. $f'(1) = f''(3)$: <u>הטענה נכונה</u>.

לפי השרטוט ניתן לראות ש: $f'(1) = 0$. כמו כן, ניתן לראות בשרטוט שבנקודה $x = 3$ הנגזרת מקבלת ערך קיצון ולכן הנגזרת השנייה תתאפס שם כך שמתקיים: $f''(3) = 0$. משני אלה נוכל להסיק ש: $f'(1) = f''(3)$.

שאלה 2

א. כדי להוכיח ש- b_n היא סדרה הנדסית, נראה כי המנה המתקבלת בין כל שני איברים סמוכים ($\frac{b_{n+1}}{b_n}$)

היא קבועה ואינה תלויה ב-n. ראשית נביע את הביטוי a_{n+2} בעזרת כלל הנסיגה $a_{n+1} = 4\cdot 3^n - a_n$:

$$a_{n+2} = a_{(n+1)+1} = 4\cdot 3^{n+1} - a_{n+1} = 4\cdot 3^{n+1} - \underbrace{(4\cdot 3^n - a_n)}_{a_{n+1}} = 4\cdot 3^{n+1} - 4\cdot 3^n + a_n$$

ולאחר הוצאת גורם משותף $4\cdot 3^n$ משני המחוברים הראשונים : $a_{n+2} = 4\cdot 3^n \underbrace{(3-1)}_{2} + a_n = 8\cdot 3^n + a_n$

כעת נביע את הביטוי b_n : $b_n = \frac{a_{n+2} - a_n}{8} = \frac{\overbrace{(8\cdot 3^n + a_n)}^{a_{n+2}} - a_n}{8} = \frac{8\cdot 3^n + a_n - a_n}{8} = \frac{\cancel{8}\cdot 3^n}{\cancel{8}} = 3^n$

מכאן שהביטוי b_{n+1} שווה ל: $b_{n+1} = 3^{n+1}$.

נחלק ונקבל: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \rightarrow q = 3$.

מצאנו שהמנה קבועה ואינה תלויה ב-n ולכן הסדרה $b_n = 3^n$ היא סדרה הנדסית.

ב. נוכיח באינדוקציה כי הביטוי $(b_n)^2 - b_n$ מתחלק ב-6 ללא שארית עבור כל n טבעי :

ראשית נציב את נוסחת האיבר הכללי $b_n = 3^n$ ונראה שמתקיים:

$$(b_n)^2 - b_n = (3^n)^2 - 3^n = 3^{2n} - 3^n$$

ולכן נבצע את המשך ההוכחה עבור הביטוי $3^{2n} - 3^n$.

I. שלב הבדיקה - מקרה הבסיס $n = 1$:

$$3^{2\cdot 1} - 3^1 = 9 - 3 = 6$$

מצאנו שעבור $n = 1$ ערכו של הביטוי $3^{2n} - 3^n$ שווה ל-6 ולכן הוא מתחלק ב-6 ללא שארית.

II. שלב ההנחה - נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$, כלומר שהביטוי $3^{2k} - 3^k$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

III. שלב ההוכחה -

נראה שהטענה נכונה עבור $n = k+1$, כלומר שהביטוי $3^{2\cdot(k+1)} - 3^{k+1}$ מתחלק ב-3 ללא שארית :

תחילה נפתח את הביטוי $3^{2\cdot(k+1)}-3^{k+1}$:

$$3^{2\cdot(k+1)}-3^{k+1}=3^{2k+2}-3^{k+1}=3^2\cdot3^{2k}-3^1\cdot3^k=9\cdot3^{2k}-3\cdot3^k=(6+3)\cdot3^{2k}-3\cdot3^k$$
$$=6\cdot3^{2k}+3\cdot3^{2k}-3\cdot3^k=6\cdot3^{2k}+3\cdot(3^{2k}-3^k)$$

כלומר מצאנו ש : $3^{2\cdot(k+1)}-3^{k+1}=6\cdot3^{2k}+3\cdot(3^{2k}-3^k)$.

כעת נראה שהביטוי השקול $6\cdot3^{2k}+3\cdot(3^{2k}-3^k)$ מתחלק ב-6 ללא שארית :

1. לפי הנחת האינדוקציה, הביטוי $3^{2k}-3^k$ מתחלק ב-6 ללא שארית ולכן גם $3\cdot(3^{2k}-3^k)$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
2. הביטוי $6\cdot3^{2k}$ הוא כפולה של 6 ולכן מתחלק ב-6 ללא שארית.
3. הביטוי $6\cdot3^{2k}+3\cdot(3^{2k}-3^k)$ הוא סכום של שני מחוברים שמתחלקים ב-6 ללא שארית ולכן הוא מתחלק ב-6 ללא שארית.

מצאנו שהביטוי $6\cdot3^{2k}+3\cdot(3^{2k}-3^k)$ מתחלק ב-6 ללא שארית ולכן גם $3^{2\cdot(k+1)}-3^{k+1}$ השקול לו מתחלק ב-6 ללא שארית, כנדרש.

לסיכום, הראנו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ מסוים אז היא נכונה גם עבור $n=k+1$. יחד עם הבדיקה עבור מקרה הבסיס $n=1$ הוכחנו שהטענה נכונה לכל n טבעי.

ג. נשרטט את איברי הסדרה שמכילה 2n איברים :

$$\overbrace{b_1,b_2,b_3,..,b_n}^{n},\overbrace{b_{n+1},b_{n+2}...,b_{2n}}^{n}$$

שני האיברים האמצעיים

כלומר, שני האיברים האמצעיים הם b_n ו- b_{n+1}. בסעיף א' מצאנו שמנת הסדרה היא 3 וכיוון ש- b_{n+1} הוא האיבר העוקב של b_n מתקיים : $b_{n+1}=3\cdot b_n$. נתון שסכום שני האיברים הללו שווה ל-108 ולכן מתקבלת המשוואה :

$$b_n+b_{n+1}=108\ \rightarrow\ b_n+3b_n=108\ \rightarrow\ 4b_n=108\ \rightarrow\ b_n=27$$

נציב את נוסחת האיבר הכללי $b_n=3^n$ שמצאנו בסעיף א' ונקבל :

$$b_n=27\ \rightarrow\ 3^n=27\ \rightarrow\ n=3$$

לבסוף, בסדרה הנתונה יש $2n$ איברים ולכן מספר האיברים בסדרה הוא : $2n=6$.

ד. כעת ניעזר בנוסחת האיבר הכללי: $b_n = 3^n$ ונמצא ששני האיברים האמצעיים הם: $b_3 = 27$ ו- $b_4 = 81$.

האיבר הראשון של הסדרה הוא $b_1 = 3$ ולכן הסדרה ההנדסית החדשה שהתקבלה היא: $3+k, 27, 81$.

כדי למצוא את k ניעזר בתכונת הסדרה ההנדסית לפיה $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$:

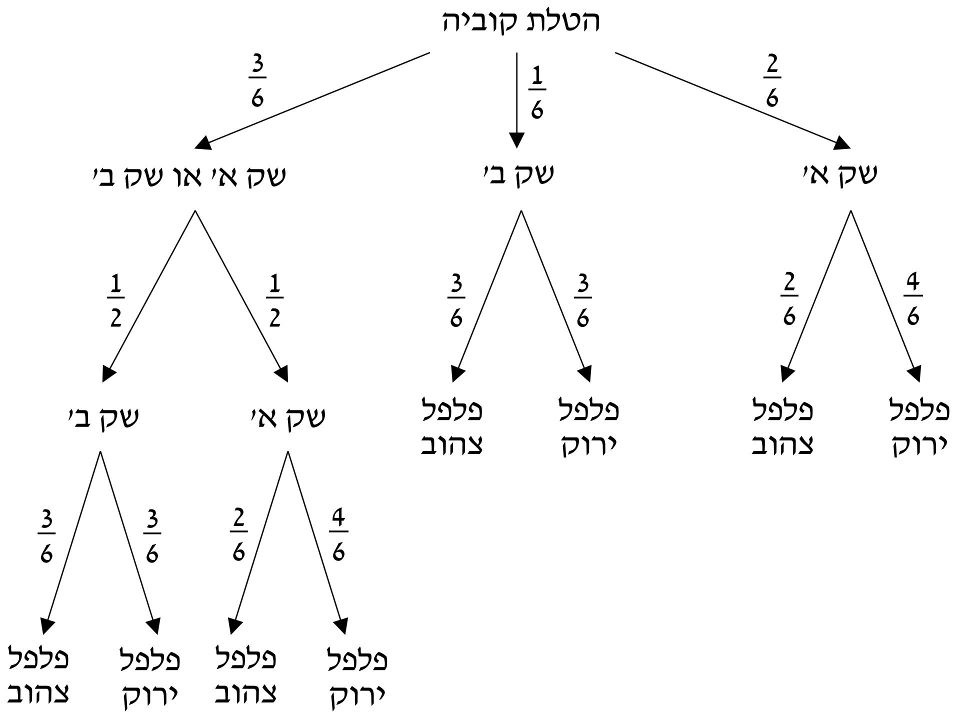
$$27^2 = (3+k)\cdot 81 \;\rightarrow\; 729 = (3+k)\cdot 81 \;\rightarrow\; 3+k = 9 \rightarrow\; k = 6$$

שאלה 3

בשק א׳ יש 4 פלפלים ירוקים ו-2 פלפלים צהובים. בשק ב׳ יש 3 פלפלים ירוקים ו-3 פלפלים צהובים.
אנטון מטיל קוביה הוגנת. אם מתקבלת אחת מהספרות 1 או 2, הוא מוציא באקראי פלפל משק א׳.
אם מתקבלת הספרה 3, הוא מוציא באקראי פלפל משק ב׳.
אם מתקבלת ספרה אחרת, הוא בוחר באקראי אחד מהשקים ומוציא ממנו פלפל.

א. נקבע איזה פלפל - ירוק או צהוב - סביר יותר שאנטון יוציא:

תחילה נסדר את הנתונים בדיאגרמת עץ:



כדי לחשב את ההסתברות להוצאת פלפל ירוק נחשב בנפרד את ההסתברות עבור כל אחד מהענפים שמסתיימים בפלפל ירוק ולאחר מכן, כיוון שמדובר על מאורעות זרים, נוכל לחשב את ההסתברות לאיחוד המאורעות הללו באמצעות סכימת ההסתברויות של כל אחד מהם בנפרד:

$$P_1=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}=\frac{43}{72}$$

באותו אופן נחשב את ההסתברות להוצאת פלפל צהוב:

$$P_2=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}=\frac{29}{72}$$

מצאנו שמתקיים: $P_2<P_1$ ולכן יותר סביר להוציא פלפל ירוק.

ב. אנטון החזיר את הפלפל שהוציא לשק שממנו הוצא, הוציא פלפל לפי הכלל שתואר, החזיר לשק ממנו הוצא ושוב הוציא וכך המשיך. אנטון חזר על התהליך 5 פעמים. ידוע שבחלק מההוצאות יצא פלפל ירוק ובחלקן יצא פלפל צהוב. נחשב את ההסתברות שאנטון הוציא פלפל צהוב רק פעמיים:

מהנתון בשאלה ניתן להסיק שההסתברות המבוקשת היא ההסתברות המותנית $P(A / B)$.

I. נגדיר את המאורעות הבאים:

המאורע A – פלפל צהוב הוצא בדיוק פעמיים.

המאורע B – בחלק מההוצאות יצא פלפל צהוב ובחלק מההוצאות יצא פלפל ירוק.

כדי לחשב את ההסתברות של המאורע A ניעזר בנוסחת ברנולי. במקרה המדובר יש **2** הוצאות של פלפל צהוב מתוך **5** הוצאות בסך הכל. ההסתברות להוצאה בודדת של פלפל צהוב היא $\frac{29}{72}$ ולכן נציב ונקבל:

$$P(A)=\binom{5}{2}\cdot(\frac{29}{72})^2\cdot(1-\frac{29}{72})^3 \rightarrow P(A)=10\cdot(\frac{29}{72})^2\cdot(\frac{43}{72})^3 \rightarrow P(A)=0.3456$$

כדי לחשב את ההסתברות של המאורע B ניעזר במאורע המשלים שלו:

המאורע $\bar{B}$ – "בכל ההוצאות יצא פלפל צהוב <u>או</u> בכל ההוצאות יצא פלפל ירוק".

ההסתברות שב-5 הוצאות רצופות יצא פלפל צהוב היא: $(\frac{29}{72})^5=0.0106$ וההסתברות שב-5 הוצאות רצופות יצא פלפל ירוק היא: $(\frac{43}{72})^5=0.076$. כיוון שהמאורע הללו זרים ההסתברות של האיחוד שלהן $\bar{B}$ היא סכום ההסתברויות שחישבנו והיא שווה ל: $P(\bar{B})=0.0106+0.076=0.0866$.

כעת נוכל לחשב את ההסתברות של המאורע B באופן הבא:

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-0.0866=0.9134$$

II. כיוון שהמאורע A <u>מוכל</u> במאורע B מתקיים: $P(A\cap B)=P(A)$ ולכן, ההסתברות המבוקשת שווה ל:

$$P(A / B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{0.3456}{0.9134}=0.378$$

ג. אנטון החזיר את הפלפל שהוציא לשק שממנו הוצא. כעת לקח קוביה חדשה **שאינה הוגנת**.
בקוביה זו, ההסתברות לקבל את הספרה 3 זהה להסתברות שהייתה לו הייתה הקוביה הוגנת.

נראה מדוע מבין הטענות שהוצגו הנכונה היא <u>טענה iii</u>:
״ניתן לקבוע כי סביר יותר שאנטון יוציא פלפל ירוק״.

נסמן ב-p את ההסתברות שתתקבל אחת מהספרות 1 או 2. ההסתברות שתתקבל הספרה 3 אינה משתנה ולכן שווה ל- $\frac{1}{6}$ ומכאן שההסתברות שתתקבל ספרה אחרת (4, 5 או 6) היא $\frac{5}{6}-p$.

ניתן להיעזר בעץ שבנינו עבור סעיף א׳, לאחר התאמת ההסתברויות בענפים השונים לנתון החדש, ולחשב את ההסתברות להוצאת פלפל ירוק באופן הבא:

$$P_1 = p\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+(\frac{5}{6}-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}+(\frac{5}{6}-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}=\frac{4}{6}p+\frac{3}{36}+\frac{20}{72}-\frac{4}{12}p+\frac{15}{72}-\frac{3}{12}p=\frac{1}{12}p+\frac{41}{72}$$

את ההסתברות החדשה להוצאת פלפל צהוב ניתן לחשב באמצעות המאורע המשלים:

$$P_2 = 1-P_1 = 1-(\frac{1}{12}p+\frac{41}{72})=\frac{31}{72}-\frac{1}{12}p$$

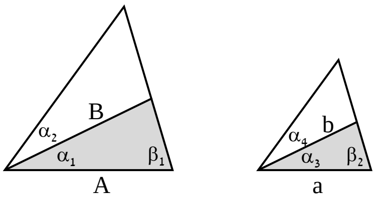
כיוון ש- $\frac{41}{72}<\frac{32}{72}$ ו-p פרמטר חיובי נסיק שמתקיים:

$$\frac{32}{72}<\frac{41}{72} \rightarrow \frac{32}{72}-\frac{1}{12}p<\frac{41}{72}+\frac{1}{12}p$$

וזאת משום שהוספנו מספר חיובי לערך הגדול $\frac{41}{72}$ והחסרנו מספר שלילי מהערך הקטן $\frac{32}{72}$.

לסיכום, הראנו ש- $P_2<P_1$ ומכאן נובע שההסתברות להוציא פלפל ירוק גדולה יותר.

שאלה 4

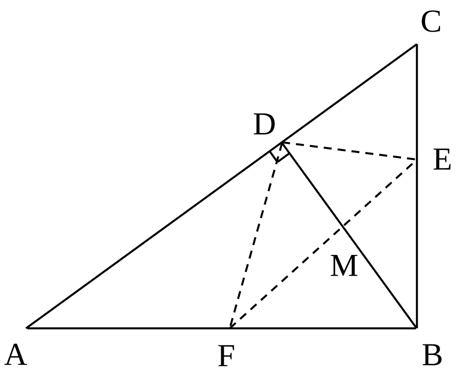


א. נוכיח את המשפט: "במשולשים דומים היחס בין חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון"

1)	$\alpha_1 = \alpha_2 \ , \alpha_3 = \alpha_4$	הקטע המחלק הוא חוצה זווית במשולשים
2)	$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$	זוויות מתאימות במשולשים דומים
3)	$\alpha_1 + \alpha_1 = \alpha_3 + \alpha_3$	הצבה לפי (2) ב-(1)
4)	$\alpha_1 = \alpha_3$	מסקנה מ-(3)
5)	$\beta_1 = \beta_2$	זוויות מתאימות במשולשים דומים
6)	המשולשים האפורים דומים	לפי משפט דמיון ז.ז.
7)	$\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$	יחס הדמיון שהוכח ב-(6) **מ.ש.ל א'**

ב. במשולש ישר הזווית ΔABC הקטע BD הוא הגובה ליתר.

נוכיח ש: $\Delta ABD \sim \Delta BCD$



8)	$\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = 90^\circ$	BD גובה ליתר AC במשולש ΔABC
9)	$\sphericalangle BAD = \alpha$	סימון
10)	$\sphericalangle ABD = 90^\circ - \alpha$	השלמה ל-180° ב-ΔABD
11)	$\sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = 90^\circ$	המשולש ΔABC ישר זווית
12)	$(90^\circ - \alpha) + \sphericalangle CBD = 90^\circ \ \rightarrow \ \sphericalangle CBD = \alpha$	הצבת (10) ב-(11)
13)	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CBD$	מסקנה מ-(10) ו-(12)
14)	$\Delta ABD \sim \Delta BCD$	לפי משפט דמיון ז.ז. **מ.ש.ל ב'**

ג. הקטעים DE ו-DF הם חוצי זוויות במשולשים ΔBCD ו-ΔABD בהתאמה. נוכיח: $\frac{BC}{AB} = \frac{ME}{MF}$.

15)	$\sphericalangle EDM = 45^\circ \ , \sphericalangle FDM = 45^\circ$	לפי (8) ומהנתון ש-DE ו-DF חוצי זווית
16)	DM חוצה הזווית $\sphericalangle FDE$	מסקנה מ-(15)
17)	$\frac{DE}{DF} = \frac{ME}{MF}$	מסקנה מ-(16), לפי משפט חוצה זווית

18)	$\frac{BC}{AB}=\frac{DE}{DF}$	מסקנה מ-(15) ומהמשפט שהוכח בסעיף א'
19)	$\frac{BC}{AB}=\frac{ME}{MF}$	לפי (17), (18) וכלל המעבר **מ.ש.ל ג'**

ד. לפניכם שתי טענות. עבור כל טענה נקבע האם היא נכונה או שגויה:

i. ניתן לחסום את המרובע BEDF במעגל: <u>הטענה נכונה</u>.

שתיים מהזוויות הנגדיות במרובע הן הזוויות <u>הישרות</u>: $\sphericalangle FDE$ ו- $\sphericalangle FBE$ ולכן הן מקיימות:

$\sphericalangle FBE+\sphericalangle FDE=180°$

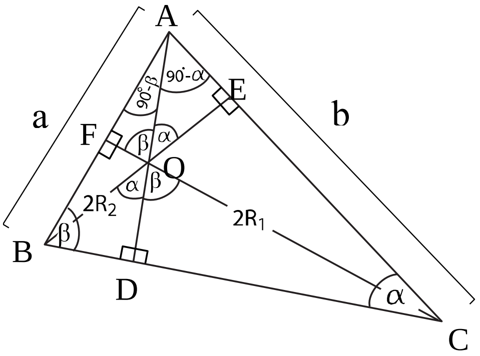
סכום הזוויות במרובע שווה ל- $360°$ ולכן מתקיים גם: $\sphericalangle DFB+\sphericalangle BED=180°$.

מצאנו במרובע BEDF שני זוגות של זוויות נגדיות שסכומן שווה ל- $180°$ ולכן המרובע בר חסימה במעגל.

ii. הקטע BD ארוך יותר מהקטע EF: <u>הטענה שגויה</u>.

בסעיף i הראנו שהמרובע BEDF בר חסימה במעגל. הקטעים BD ו-EF הם מיתרים במעגל החוסם המדובר. על המיתר FE נשענת הזווית הישרה $\sphericalangle FDE$ ולכן מיתר זה הוא קוטר במעגל. הקוטר הוא המיתר הארוך ביותר במעגל ובפרט הוא מקיים $BD<FE$ ולכן הטענה שגויה.

שאלה 5



א.

1)	AD, CF, BE גבהים, $AB=a$, $AC=b$	נתון
2)	$\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle ACB=\alpha$	נתון
3)	$CO=2R_1$, $BO=2R_2$	זווית היקפית בת $90°$ נשענת על קוטר
4)	$\sphericalangle BAD=180°-90°-\beta \rightarrow \sphericalangle BAD=90°-\beta$	סכום זוויות במשולש ΔABD
5)	$\sphericalangle AOF=\sphericalangle COD=\beta$	סכום זוויות במשולש ΔAFO + זוויות קודקודיות
6)	$\sphericalangle CAD=180°-90°-\alpha \rightarrow \sphericalangle CAD=90°-\alpha$	סכום זוויות במשולש ΔACD
7)	$\sphericalangle AOE=\sphericalangle BOD=\alpha$	סכום זוויות במשולש ΔAEO + זוויות קודקודיות
8)	$\frac{DO}{2R_1}=\cos\beta \rightarrow DO=2R_1\cos\beta$	קוסינוס במשולש ישר הזווית ΔCDO
9)	$\frac{DO}{2R_2}=\cos\alpha \rightarrow DO=2R_2\cos\alpha$	קוסינוס במשולש ישר הזווית ΔBDO
10)	$2R_1\cos\beta=2R_2\cos\alpha \rightarrow \frac{R_1}{R_2}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$	כלל המעבר, נובע מ-(8) ו-(9)
11)	$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b}$	משפט הסינוסים במשולש ΔABC

12) עלינו להוכיח: $\frac{b\sin 2\alpha}{a\sin 2\beta}=\frac{R_1}{R_2}$. נפתח את האגף השמאלי תוך שימוש ב- (10) ו-(11):

$$\frac{b\sin 2\alpha}{a\sin 2\beta}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\cancel{2}\sin\alpha\cos\alpha}{\cancel{2}\sin\beta\cos\beta}=\frac{\cancel{b}}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{R_1}{R_2}$$

לסיכום, מתקיים: $\frac{b\sin 2\alpha}{a\sin 2\beta}=\frac{R_1}{R_2}$.

מ.ש.ל

ב.

13)	X רדיוס המעגל החוסם את המשולש ΔABC	סימון
14)	Y רדיוס המעגל החוסם את המשולש ΔBCO	סימון
15)	$\sphericalangle BAC=180°-(\alpha+\beta)$	סכום זוויות במשולש ΔABC
16)	$\frac{BC}{\sin\sphericalangle BAC}=2X \rightarrow \frac{BC}{\sin[180°-(\alpha+\beta)]}=2X$	משפט הסינוסים במשולש ΔABC
17)	$\frac{BC}{\sin\sphericalangle BOC}=2Y \rightarrow \frac{BC}{\sin(\alpha+\beta)}=2Y$	משפט הסינוסים במשולש ΔBCO
18)	$\frac{BC}{\sin[180°-(\alpha+\beta)]}=\frac{BC}{\sin(\alpha+\beta)} \rightarrow 2X=2Y \rightarrow X=Y$	נובע מ-(16) ו-(17) + שימוש בזהות $\sin\left[180°-(\alpha+\beta)\right]=\sin(\alpha+\beta)$ **מ.ש.ל**

שאלה 6

נתונה הנגזרת השנייה: $f''(x)=\frac{4}{(x+6)^2}-\frac{1}{(x-3)^2}$.

לגרף הנגזרת הראשונה $f'(x)$ יש את נקודת המקסימום A ואת נקודת המינימום B.

א. נחשב את שיפוע הישר שעליו מונח הקטע AB:

$f''(x)$ היא הנגזרת <u>הראשונה</u> של הפונקציה $f'(x)$ שאת נקודות הקיצון שלה A ו-B אנו מחפשים.

נתחיל מהשוואת הנגזרת של $f'(x)$ ל-0:

$$f''(x)=0 \rightarrow \frac{4}{(x+6)^2}-\frac{1}{(x-3)^2}=0 \rightarrow \frac{4}{(x+6)^2}=\frac{1}{(x-3)^2} \rightarrow 4(x-3)^2=(x+6)^2 \quad /\pm\sqrt{\ }$$

עבור השורש החיובי נקבל: $2(x-3)=x+6 \rightarrow 2x-6=x+6 \rightarrow x=12$

עבור השורש השלילי נקבל: $2(x-3)=-(x+6) \rightarrow 2x-6=-x-6 \rightarrow 3x=0 \rightarrow x=0$

כעת נחשב את האינטגרל הלא מסוים של $f''(x)$ כדי לבטא את $f'(x)$ באמצעות הפרמטר c:

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int 4\cdot(x+6)^{-2}-(x-3)^{-2}dx=4\cdot\frac{(x+6)^{-1}}{-1}-\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+c=-\frac{4}{x+6}+\frac{1}{x-3}+c$$

$$\rightarrow f'(x)=-\frac{4}{x+6}+\frac{1}{x-3}+c$$

נציב את שיעור ה-x של הנקודות A ו-B:

$$f'(0)=-\frac{4}{0+6}+\frac{1}{0-3}+c=-\frac{4}{6}-\frac{1}{3}+c=-1+c$$

$$f'(12)=-\frac{4}{18}+\frac{1}{9}+c=-\frac{1}{9}+c$$

כלומר מבין שתי הנקודות A ו-B אחת היא הנקודה $(0,-1+c)$ והשנייה היא הנקודה $(12,-\frac{1}{9}+c)$.

כעת נחשב את שיפוע הקטע AB באמצעות שיעורי שתי הנקודות שמצאנו:

$$m_{AB}=\frac{(-\frac{1}{9}+c)-(-1+c)}{12-0}=\frac{-\frac{1}{9}+c+1-c}{12}=\frac{\frac{8}{9}}{12}=\frac{2}{27}$$

לכן שיפוע הישר שעליו מונח הקטע AB הוא $\frac{2}{27}$.

ב. הקטע AB חותך את ציר ה-y בנקודה $(0,-1)$. נמצא את הנגזרת הראשונה $f'(x)$:

ניעזר בשיעורי הנקודה $(0,-1+c)$ והשיפוע $\frac{2}{27}$ כדי לבטא את משוואת הקטע AB באמצעות c:

$$AB:\ y-(-1+c)=\frac{2}{27}(x-0) \rightarrow y+1-c=\frac{2}{27}x \rightarrow y=\frac{2}{27}x-1+c$$

נתון שהקטע AB עובר בנקודה $(0,-1)$ ולכן שיעוריה מקיימים את משוואת הישר. נציב במשוואת הישר:

$$-1=\frac{2}{27}\cdot(0)-1+c \rightarrow -1=-1+c \rightarrow c=0$$

לסיום, נציב את $c=0$ בייצוג של $f'(x)$ שמצאנו בסעיף א׳ ונקבל: $f'(x)=-\frac{4}{x+6}+\frac{1}{x-3}$.

ג. נשרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$:

ראשית נמצא את האסימפטוטות של הפונקציה:

תחום ההגדרה של $f'(x)$ הוא $x\neq-6$, $x\neq3$ ולכן האסימפטוטות האנכיות הן: $x=3$, $x=-6$.

כדי למצוא את האסימפטוטה האופקית נבצע את החישוב הבא:

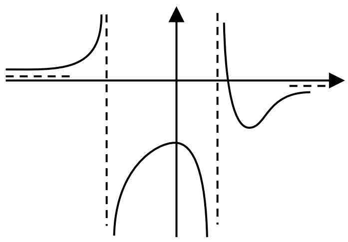
$$\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{4}{x+6}+\frac{1}{x-3}=\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{6}{x}}+\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{3}{x}}\approx-\frac{0^{\pm}}{1+0^{\pm}}+\frac{0^{\pm}}{1-0^{\pm}}\approx0$$

ולכן האסימפטוטה האופקית של $f'(x)$ היא: $y=0$.

נציב את הנתונים בטבלת עלייה וירידה:

שיעור ה-x	$x<-6$	$x=-6$	$-6<x<0$	$x=0$	$0<x<3$	$x=3$	$3<x<12$	$x=12$	$12<x$
סימן הנגזרת $f''(x)$	+	נקודת אי-הגדרה	+	נקודת קיצון	−	נקודת אי-הגדרה	−	נקודת קיצון	+
מגמת הפונקציה $f'(x)$	↗		↗	max	↘		↘	min	↗

ולכן כעת יש בידינו מספיק מידע כדי לשרטט את הסקיצה:

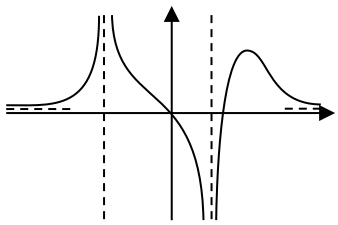


ד. נשרטט סקיצה של גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$:

כדי לשרטט את גרף <u>הנגזרת</u> של $f'(x)$ אין צורך לבצע חקירה מלאה אלא מספיקות התובנות הבאות :

- ל- $f'(x)$ שתי אסימפטוטות אנכיות : $x=3$, $x=-6$ ולכן גם ל- $f''(x)$ אותן האסימפטוטות האנכיות.
- ל- $f'(x)$ אסימפטוטה אופקית <u>כלשהי</u> ולכן ל- $f''(x)$ יש את האסימפטוטה האופקית $y=0$.
- כפי שראינו בסעיף ג', הנגזרת של $f'(x)$ חיובית בתחום : $12<x$, $-6<x<0$, $-6<0$ ושלילית בתחום : $3<x<12$, $0<x<3$.
- כפי שראינו בסעיף א', הנגזרת של $f'(x)$ מתאפסת עבור $x=12$ ו- $x=0$.

מידע זה מספיק ומאפשר לשרטט את הסקיצה הבאה :

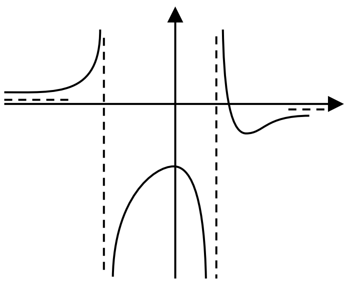


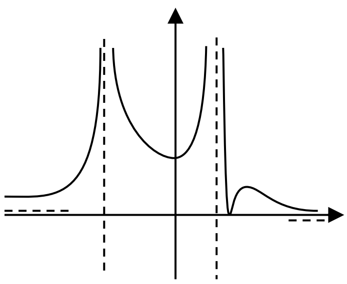
ה. הגדירו פונקציה חדשה : $g(x)=\left[f'(x)\right]^n$. n טבעי.

1. נקבע כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $g(x)$:

העלאת פונקציה בחזקה מביאה למתיחה <u>הרחק מציר ה-x</u> של כל הערכים שמרחקם מציר ה-x גדול מ-1, וכיווץ <u>לכיוון ציר ה-x</u> של כל הערכים שמרחקם מציר ה-x קטן מ-1. כמו כן, עבור חזקה זוגית יתבצע בנוסף למתיחה ולכיווץ גם שינוי סימן של כל הערכים השליליים לחיובי.

לכן, עבור <u>n אי-זוגי</u> גרף הפונקציה $g(x)$ הוא הגרף הימני ולפונקציה <u>2 נקודות קיצון</u>.
ואילו , עבור <u>n זוגי</u> גרף הפונקציה $g(x)$ הוא הגרף השמאלי ולפונקציה <u>3 נקודות קיצון</u>.

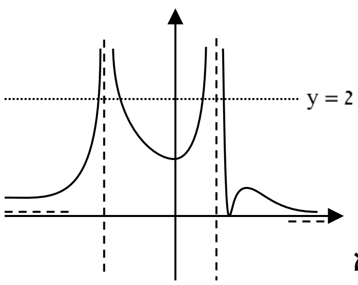




2. נתון שלפונקציה $g(x)$ יש 3 נקודות קיצון ולכן n הוא זוגי וגרף הפונקציה הוא <u>העליון משמאל</u>.

נקבע כמה פתרונות יש למשוואות הבאות :

א. $g(x)=2$: הישר $y=2$ עובר <u>מעל</u> נקודת המינימום $(0,1)$ ולכן, כפי שניתן לראות בשרטוט משמאל, הוא חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ ב-4 נקודות שונות.
לכן למשוואה $g(x)=2$ יש 4 פתרונות.



ב. $g(x)=-2$: הישר $y=-2$ עובר <u>מתחת</u> לציר ה-x בזמן שהפונקציה $g(x)$ היא אי-שלילית. לכן השניים אינם נחתכים באף נקודה ולמשוואה $g(x)=-2$ יש 0 פתרונות.

שאלה 7

נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sin 2x+4\sin bx+6x$ בתחום: $-\frac{\pi}{3}\le x\le \frac{3\pi}{2}$. אחת מנקודות הפיתול של הפונקציה נמצאת על הישר $x=\pi$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x=\frac{\pi}{2}$ הוא 8.

א. 1. נמצא את הפרמטרים a ו- b $(0<b<2)$:

ראשית נמצא את הנגזרת הראשונה של הפונקציה $f(x)$:

$$f'(x)=2a\cos 2x+4b\cos bx+6$$

כעת נמצא את הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$:

$$f''(x)=-2\cdot 2a\sin 2x-4b^2\sin bx=-4a\sin 2x-4b^2\sin bx$$

נתון ששיעור ה-x של אחת מנקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$ הוא π ולכן:

$$f''(\pi)=0\ \rightarrow\ -4a\sin 2\cdot\pi-4b^2\sin b\cdot\pi=0\ \rightarrow\ -4a\cdot 0-4b^2\sin(b\cdot\pi)=0\ \rightarrow\ \sin(b\cdot\pi)=0$$

זו משוואה טריגונומטרית שפתרונה הכללי הוא: $b\cdot\pi=\pi k$ ולכן: $b=k$.

לבסוף, נתון ש- $0<b<2$ ומכאן נסיק ש: $b=1$.

כעת נציב את $b=1$ בנגזרת הראשונה ונקבל:

$$f'(x)=2a\cos 2x+4\cos x+6$$

נתון ששיפוע המשיק בנקודה $x=\frac{\pi}{2}$ הוא 8 ולכן מתקיים:

$$f'(\frac{\pi}{2})=8\ \rightarrow\ 2a\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})+4\cos(\frac{\pi}{2})+6=8\ \rightarrow\ 2a\cos\pi+4\cos(\frac{\pi}{2})=2\ \rightarrow\ 2a\cdot(-1)+4\cdot 0=2$$

$$\rightarrow -2a=2\ \rightarrow\ a=-1$$

ולכן מצאנו ש: $a=-1$, $b=1$.

2. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן:

$$f'(x)=0\ \rightarrow\ -2\cos 2x+4\cos x+6=0\ \rightarrow\ -2\cdot(2\cos^2 x-1)+4\cos x+6=0$$

$$\rightarrow\ -4\cos^2 x+2+4\cos x+6=0\ \rightarrow\ \cos^2 x-\cos x-2=0\ \rightarrow\ (\cos x-2)(\cos x+1)=0$$

האפשרות $\cos x=2$ נפסלת כיוון שאין למשוואה זו פתרונות ולכן:

$$\cos x=-1\ \rightarrow\ x=\pi+2\pi k$$

כאשר עבור $k=0$ מתקבל הפתרון היחיד בתחום $x=\pi$.

נתון לנו שעל הישר $x=\pi$ נמצאת נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$ ולכן הנקודה שזיהינו אינה קיצון וניתן להסיק שלפונקציה אין נקודות קיצון פנימיות.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ ולכן יש לה שתי נקודות קצה. נמצא את שיעורי ה-y שלהן:

$$f(-\frac{\pi}{3}) = -\sin(2\cdot -\frac{\pi}{3}) + 4\sin(-\frac{\pi}{3}) + 6\cdot(-\frac{\pi}{3}) \approx -8.88$$

$$f(\frac{3\pi}{2}) = -\sin(2\cdot \frac{3\pi}{2}) + 4\sin(\frac{3\pi}{2}) + 6\cdot \frac{3\pi}{2} \approx 24.27$$

בנוסף, כיוון שהנגזרת רציפה ואינה מתאפסת בתחום ההגדרה של הפונקציה מספיק לבצע הצבה יחידה של ערך מהתחום (למשל $x = 0$) כדי לגלות את סימן הנגזרת בתחום כולו:

$$f'(0) = -2\cos(2\cdot 0) + 4\cos 0 + 6 = -2\cdot 1 + 4\cdot 1 + 6 = 8$$

מצאנו ש: $f'(0) > 0$ ולכן הנגזרת חיובית בכל התחום והפונקציה <u>עולה</u> בכל תחום הגדרתה. מכאן נובע שנקודת הקצה השמאלית היא מסוג מינימום והימנית היא מסוג מקסימום.

לסיכום, נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן: $\max(\frac{3\pi}{2}, 24.27)$, $\min(-\frac{\pi}{3}, -8.88)$.

3. נמצא את תחומי הקעירות $\cup$ והקעירות $\cap$:

$$f''(x) = 0 \rightarrow 4\sin 2x - 4\sin x = 0 \rightarrow 8\sin x\cos x - 4\sin x = 0 \rightarrow 4\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

האפשרות הראשונה היא שמתקיים: $2\cos x - 1 = 0$ ולכן:

$$\cos x = 0.5 \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

עבור $k = 0$ מתקבל הפתרון היחיד שנמצא <u>בתוך התחום</u> והוא: $x = \frac{\pi}{3}$.

האפשרות השנייה היא שמתקיים: $4\sin x = 0$ ולכן:

$$4\sin x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = \pi k$$

עבור $k = 0$ ו- $k = 1$ מתקבלים הפתרונות היחידים שנמצאים <u>בתוך התחום</u> והם: $x = 0$, $x = \pi$.

כדי למצוא את סוג הקעירות נציב את הנקודות שמצאנו בטבלה הבאה:

שיעור ה-x	$x = \frac{3\pi}{2}$	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$x = \pi$	$\frac{\pi}{3} < x < \pi$	$x = \frac{\pi}{3}$	$0 < x < \frac{\pi}{3}$	$x = 0$	$-\frac{\pi}{3} < x < 0$	$x = -\frac{\pi}{3}$
סימן הנגזרת $f''(x)$	קצה התחום	+	נקודת קיצון	−	נקודת פיתול	+	נקודת פיתול	−	קצה התחום
סוג הקעירות		$\cup$		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

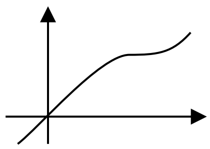
ולכן תחום הקעירות $\cup$ הוא: $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{3}$ וקעירות $\cap$ הוא: $\frac{\pi}{3} < x < \pi$, $-\frac{\pi}{3} < x < 0$.

4. נמצא את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה-y:

$$f(0) = -\sin(2\cdot 0) + 4\sin 0 + 6\cdot 0 = 0$$

לכן נקודת החיתוך היא: $(0,0)$.

ה. על סמך הסעיפים הקודמים נוכל לשרטט את סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:



ו. נחשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הישר $x = \frac{3\pi}{2}$ וציר ה-x:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (-\sin 2x + 4\sin x + 6x)dx = \Big[0.5\cos 2x - 4\cos x + 3x^2\Big]_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left(0.5\cos(2\cdot\frac{3\pi}{2}) - 4\cos(\frac{3\pi}{2}) + 3(\frac{3\pi}{2})^2\right) - \left(0.5\cos(2\cdot 0) - 4\cos(0) + 3\cdot(0)^2\right)$$

$$\approx (66.12) - (-3.5) \approx 69.62$$

כלומר גודל השטח הוא <u>69.62 יח"ר</u>.

שאלה 8

א. נביע את שיעור ה-x של הנקודה A על ידי השוואת הפונקציות:

$$f(x)=g(x)\rightarrow\sqrt{16x-a^2}=\sqrt{9a^2-16x}\rightarrow 16x-a^2=9a^2-16x\rightarrow 32x=10a^2\rightarrow x=\frac{5a^2}{16}$$

נציב את שיעור ה-x באחת הפונקציה כדי למצוא את שיעור ה-y:

$$f(\frac{5a^2}{16})=\sqrt{16\cdot\frac{5a^2}{16}-a^2}=\sqrt{5a^2-a^2}=\sqrt{4a^2}=2a$$

ולכן שיעורי הנקודה A הם: $A(\frac{5a^2}{16},2a)$.

ב. על פי הנתון, המשיקים בנקודה A מאונכים זה לזה ולכן מכפלת שיפועיהם היא 1-. את השיפועים

בנקודה A נמצא על ידי גזירת הפונקציות והצבת $x=\frac{5a^2}{16}$ בנגזרות:

$$f(x)=\sqrt{16x-a^2}\rightarrow f'(x)=\frac{16}{2\sqrt{16x-a^2}}\rightarrow f'(\frac{5a^2}{16})=\frac{16}{2\sqrt{16(\frac{5a^2}{16})-a^2}}=\frac{16}{2\sqrt{4a^2}}=\frac{16}{4a}=\frac{4}{a}$$

$$g(x)=\sqrt{9a^2-16x}\rightarrow g'(x)=\frac{-16}{2\sqrt{9a^2-16x}}\rightarrow g'(\frac{5a^2}{16})=\frac{-16}{2\sqrt{9a^2-16(\frac{5a^2}{16})}}=\frac{-16}{2\sqrt{4a^2}}=\frac{-16}{4a}=\frac{-4}{a}$$

כאמור, מכפלת השיפועים היא 1- ולכן: $\frac{-4}{a}\cdot\frac{4}{a}=-1\rightarrow a^2=16\rightarrow a=\pm4$.

לאור הנתון $0<a$ נקבל את הפתרון $a=4$.

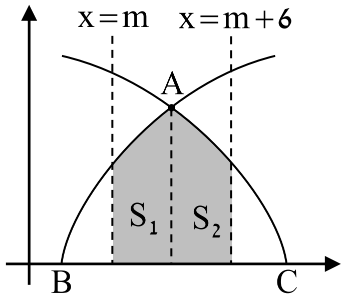
ג. ראשית נרשום את הפונקציות לאחר הצבת $a=4$: $g(x)=\sqrt{144-16x}$, $f(x)=\sqrt{16x-16}$.

בעזרת סעיף א' נמצא את שיעור ה-x של הנקודה A: $x=\frac{5\cdot4^2}{16}=5$.

כעת נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר x ולצורך כך נשווה את הפונקציות ל-0:

$$f(x)=0=\sqrt{16x-16}\rightarrow 0=16x-16\rightarrow x=1\rightarrow B\,(1,0)$$

$$g(x)=0=\sqrt{144-16x}\rightarrow 0=144-16x\rightarrow x=9\rightarrow C\,(9,0)$$



השטח המבוקש הוא מורכב משני שטחים. לכן נוריד אנך מנקודת המפגש A לציר ה-x. נוסיף לשרטוט את שני הישרים $x = m$ ו: $x = m + 6$ כך שהם עוברים משני צדי הנקודה A אך בין הנקודות B ו-C.

נקרא לשטח השמאלי S_1 ולשטח הימני S_2 ונחשב בנפרד את נפח גוף הסיבוב המתקבל עבור כל אחד מהשטחים המסתובבים סביב ציר ה-x:

נפח גוף הסיבוב של S_1:

$$V_1 = \pi\int_m^5 (\sqrt{16x-16})^2 dx = \pi\int_m^5 (16x-16)dx = \pi\cdot(8x^2-16x)\Big|_m^5 = \pi\left[200-80-(8m^2-16m)\right]$$
$$= \pi\left[-8m^2+16m+120\right]$$

נפח גוף הסיבוב של S_2:

$$V_2 = \pi\int_5^{m+6} (\sqrt{144-16x})^2 dx = \pi\int_5^{m+6} (144-16x)dx = \pi(144x-8x^2)\Big|_5^{m+6} =$$

$$\pi\left[144(m+6)-8(m+6)^2-520\right] = \pi\left[144m+864-8m^2-96m-288-520\right] = \pi\left[-8m^2+48m+56\right]$$

כעת נחבר את שני נפחי גוף הסיבוב שמצאנו כדי לקבל את נפח גוף הסיבוב באמצעות m:

$$V_1 + V_2 = \pi(-8m^2+16m+120) + \pi(-8m^2+48m+56) = \pi(-16m^2+64m+176)$$

ד. זוהי בעיית קיצון עבור פונקציית המטרה: $h(m) = \pi(-16m^2+64m+176)$.

נגזור את הפונקציה: $h'(m) = \pi(-32m+64) = 0 \rightarrow 32m = 64 \rightarrow \quad m = 2$

נבדוק את סוג הקיצון על ידי שימוש בנגזרת השנייה. כך נוודא שאכן קיבלנו נפח <u>מקסימלי</u> כפי שהתבקשנו:

$$h''(m) = -32\pi < 0 \rightarrow max$$

ואכן, עבור $m = 2$ נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא מקסימלי.

