

ארכימדס
מסמך מס' 472

בכיוון הנכון עם ארכימדס
לטאלון 472

כיתה י"ב - 4 חידות לימוד - חלק ב'

תוכן
הסמך
מאמרים

2024

הוצאת ארכימדס

שאלון 472

מבוא לסדרות





אסוף לוי $a^1 = a$

בכיוון הנכון עם ארכימדס
לשאלון 472

כיתה י"ב - 4 יחידות לימוד - חלק ב'

סדרה הנדסית

סדרה חשבונית

גיאומטריה במרחב (וקטורים)

$\log_a a = 1$

$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$



מהדורת 2025

הוצאת ארכימדס

שאלון 472

מבוא לסדרות





מהי סדרה?

סדרה היא קבוצה מסודרת של איברים שבה יש חשיבות למיקום של כל איבר ביחס לאחרים. בכל הסדרות שנעסוק בהן השנה קיימת חוקיות והיא מאפשרת להוסיף להן איברים ולהמשיך אותן.

דוגמה: נתבונן בסדרה: $2, 5, 8, \dots$ שבה נתונים האיברים הראשונים. סדר האיברים בסדרה הוא משמאל לימין: האיבר **הראשון** הוא 2, **השני** הוא 5 **השלישי** הוא 8 וכך הלאה. שלוש הנקודות המופיעות מימין לאיברי הסדרה מייצגות את המשכה.



מהי סדרה?

כאשר נתונה החוקיות לפיה מסודרים איברי הסדרה נוכל למצוא את האיברים הבאים בה.

לדוגמה, אם בסדרה: $2, 5, 8, \dots$ נתון שכל איבר גדול ב-3 מהאיבר שלפניו, נוכל לקבוע שהאיבר הרביעי הוא 11, והחמישי הוא 14.

כאשר נתונים רק חלק מהאיברים של סדרה **לא נוכל לקבוע מהי החוקיות** שלפיה מסודרים האיברים, אלא רק לשער מהי.



1. נתונים שלושת האיברים הראשונים בסדרה: $3, 5, 7, \dots$.

א. האם ניתן לקבוע מהי החוקיות שלפיה מסודרים איברי הסדרה לפי שלושת איברים אלו בלבד?



ב. הציעו חוקיות אפשרית שלפיה מסודרים האיברים בסדרה.

ג. לפי החוקיות שהצעתם בסעיף הקודם, קבעו מהם שני האיברים הבאים.





סדרה סופית וסדרה אין-סופית

בסדרה **סופית** יש מספר מוגבל של איברים.

נדגים זאת בעזרת שתי סדרות **סופיות**:

בסדרה הסופית: 1, 3, 9, 27 יש ארבעה איברים.

בסדרה הסופית: 7, 8, 9, ..., 83 שלוש הנקודות מייצגות את כל

האיברים המסודרים בין האיבר השלישי 9 לבין האיבר האחרון 83.





סדרה סופית וסדרה אין-סופית

בסדרה **אין-סופית** יש אין-סוף איברים.
נדגים זאת בעזרת הסדרה **האין-סופית** הבאה:
כל המספרים הטבעיים האי-זוגיים החל מ-1 והלאה לפי סדר עולה.
האיבר הראשון הוא 1, וכל איבר נוסף גדול ב-2 מהאיבר שלפניו.
לפי חוקיות זו נוכל להציג את האיברים הראשונים בסדרה: $1, 3, 5, \dots$.
בסדרה זו **אין-סוף** איברים. שלוש הנקודות המופיעות מימין לאיברי
הסדרה מייצגות את המשך הסדרה, החל מהאיבר הרביעי והלאה.



המיקום הסידורי של איבר בסדרה

לכל איבר בסדרה יש **מיקום סידורי**.

לרוב נסמן את המיקומים הסידוריים של איברי הסדרה בעזרת האות n , שמקורה במילה **number**, ומשמעותה "מספר".

דוגמה: בסדרה שאיבריה הראשונים הם: $2, 5, 8, 11, \dots$

המיקום הסידורי של האיבר הראשון (**2**) הוא $n = 1$,

המיקום הסידורי של האיבר השני (**5**) הוא $n = 2$, וכך הלאה.





המיקום הסידורי של איבר בסדרה

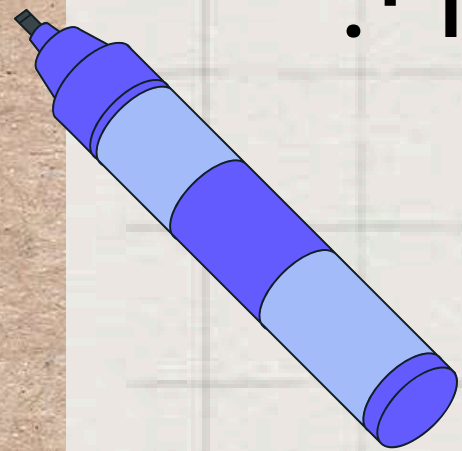
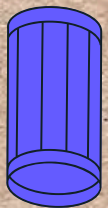
ערכי n המייצגים את המיקום הסידורי של האיברים הם מספרים טבעיים: $n = 1, 2, 3, \dots$

נהוג לסמן את איברי הסדרה באות **קטנה** ולצידה המיקום הסידורי: האיבר הראשון הוא a_1 , השני הוא a_2 וכך הלאה.

לדוגמה, בסדרה $2, 5, 8, 11, \dots$ ניתן לכתוב: $a_3 = 8$.

בכל סדרה האיבר הנמצא במקום ה- n מסומן כ- a_n . בסדרה בעלת n

איברים האיבר האחרון הוא a_n , והאיבר שלפניו הוא a_{n-1} .





המיקום הסידורי של איבר בסדרה

3. נתונה הסדרה האינסופית של כל המספרים הזוגיים החיוביים החל מ-2 והלאה לפי סדר עולה:

$2, 4, 6, 8, \dots$

א. השלימו במחברת:

1. האיבר הראשון בסדרה הוא _____, וכל איבר נוסף גדול ב-_____ מהאיבר שלפניו.

2. $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $a_3 = \underline{\hspace{2cm}}$, $a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

ב. מצאו את שלושת האיברים הבאים בסדרה, והציגו אותם כפי שהוצגו האיברים בסעיף א.2.





**מנקודה זו והלאה, לאחר הסברים, המצגת מפנה לתרגול בכרך
ב' של הספר בכיוון הנכון עם ארכימדס לשאלון 472:**

כעת נוכל לפתור את תרגילים 4-7 בעמוד 130-131.



ייצוג אלגברי של סדרה בעזרת הנוסחה לאיבר הכללי



לאחר שעסקנו בייצוג המילולי של סדרה, נעסוק כעת בייצוג האלגברי שלה (ייצוג סימבולי).

תחילה נעסוק בהגדרת הסדרה בעזרת הנוסחה לאיבר הכללי. נוסחה זו מאפשרת למצוא באופן ישיר את **ערכו המספרי** של איבר כלשהו על ידי הצבת ערך ה- n המייצג את מיקומו הסידורי בסדרה. לכן, הגדרה זו של סדרה נקראת גם **הגדרה לפי מקום**. היתרון העיקרי של הנוסחה לאיבר הכללי הוא שהיא מאפשרת למצוא באופן ישיר את ערכו של איבר כלשהו לפי מיקומו הסידורי **בלבד**.

ייצוג אלגברי של סדרה בעזרת הנוסחה לאיבר הכללי



דוגמה: נתבונן בסדרה שהייצוג המילולי שלה הוא: סדרה שבה האיבר הראשון הוא 5, וכל איבר נוסף גדול ב-3 מהאיבר שלפניו.

איבריה הראשונים הם: 5, 8, 11, 14. **הייצוג האלגברי של הסדרה,**

בעזרת הנוסחה לאיבר הכללי, הוא $a_n = 3n + 2$.

בנוסחה זו הביטוי מייצג את האיבר במקום ה- n .

למציאת a_1 נציב בנוסחה $n = 1$: $a_1 = 3 \times 1 + 2 = 5$.

למציאת a_{500} נציב בנוסחה $n = 500$: $a_{500} = 3 \times 500 + 2 = 1502$.



ייצוג אלגברי של סדרה בעזרת הנוסחה לאיבר הכללי

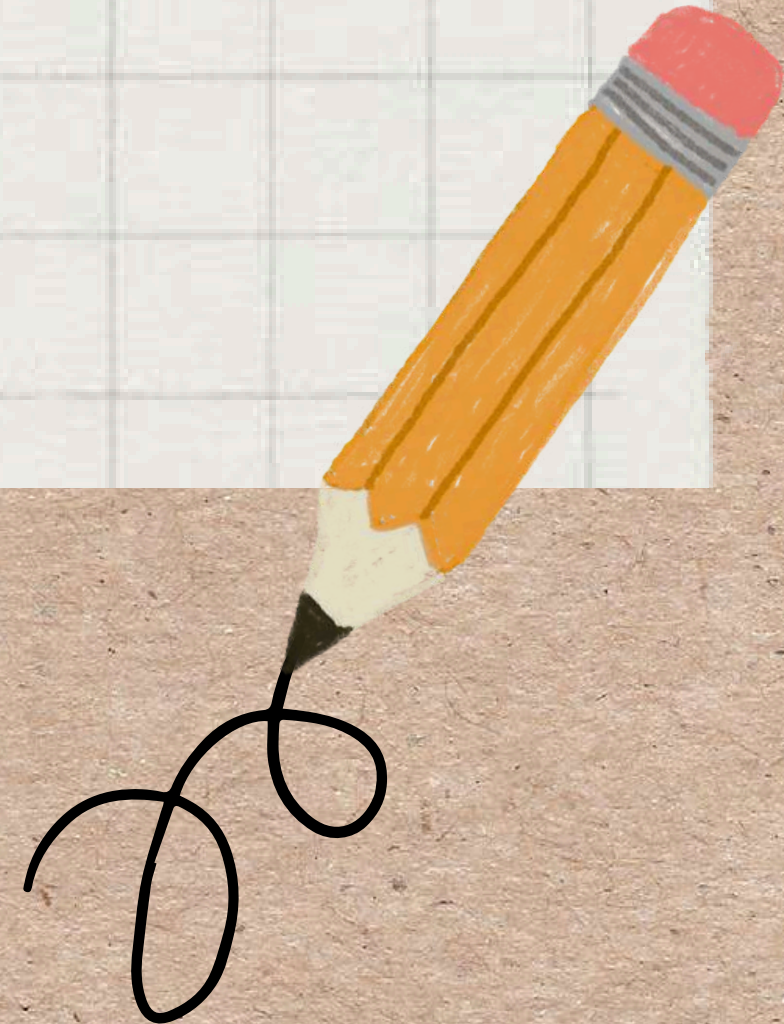
8. בכל סעיף נתונה הנוסחה לאיבר הכללי של סדרה. מצאו את ארבעת האיברים הראשונים בכל סדרה:

ב. $a_n = 3^n$

א. $a_n = 4n + 7$



כעת נוכל לפתור את תרגילים 8-10 בעמודים 131-132.



ייצוג אלגברי של סדרה בעזרת כלל נסיגה



כלל נסיגה הוא כלי אלגברי נוסף שבעזרתו נוכל להגדיר סדרה.

כללי הנסיגה שבהם נעסוק מציגים את האיבר הראשון בסדרה, הנקרא **תנאי התחלה**, ובנוסף נוסחה המאפשרת למצוא כל איבר בסדרה (מלבד האיבר הראשון) בעזרת האיבר שלפניו.

תחילה נציין שנוכל לסמן שני איברים סמוכים בסדרה בעזרת הביטויים a_n ו- a_{n+1} (n טבעי).

a_n הוא האיבר הנמצא במקום ה- n .

a_{n+1} הוא האיבר **הבא אחריו**, ומיקומו הסידורי **$n+1$** .



ייצוג אלגברי של סדרה בעזרת כלל נסיגה



נדגים זאת בעזרת הסדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:

$$a_{n+1} = a_n + 6, \quad a_1 = 5$$

כלל הנסיגה מציג את האיבר **הראשון** בסדרה, וערכו **5**. בנוסף, הכלל מציג את הקשר בין כל שני איברים סמוכים a_n ו- a_{n+1} כלשהם. בסדרה זו כל איבר נוסף גדול ב-**6** מהאיבר שלפניו.

כלומר, האיבר השני גדול ב-**6** מהאיבר הראשון, ולכן: $a_2 = 11$. בדומה, האיבר השלישי גדול ב-**6** מהאיבר השני, ולכן: $a_3 = 17$.

ייצוג אלגברי של סדרה בעזרת כלל נסיגה



היתרון של כלל הנסיגה: מקל בזיהוי החוקיות של הסדרה.

החיסרון של כלל נסיגה: כאשר נתון האיבר הראשון, ועלינו למצוא

את ערכו של איבר כלשהו בהמשך הסדרה, עלינו למצוא קודם את

כל האיברים שלפניו. תהליך זה עשוי להיות ארוך...





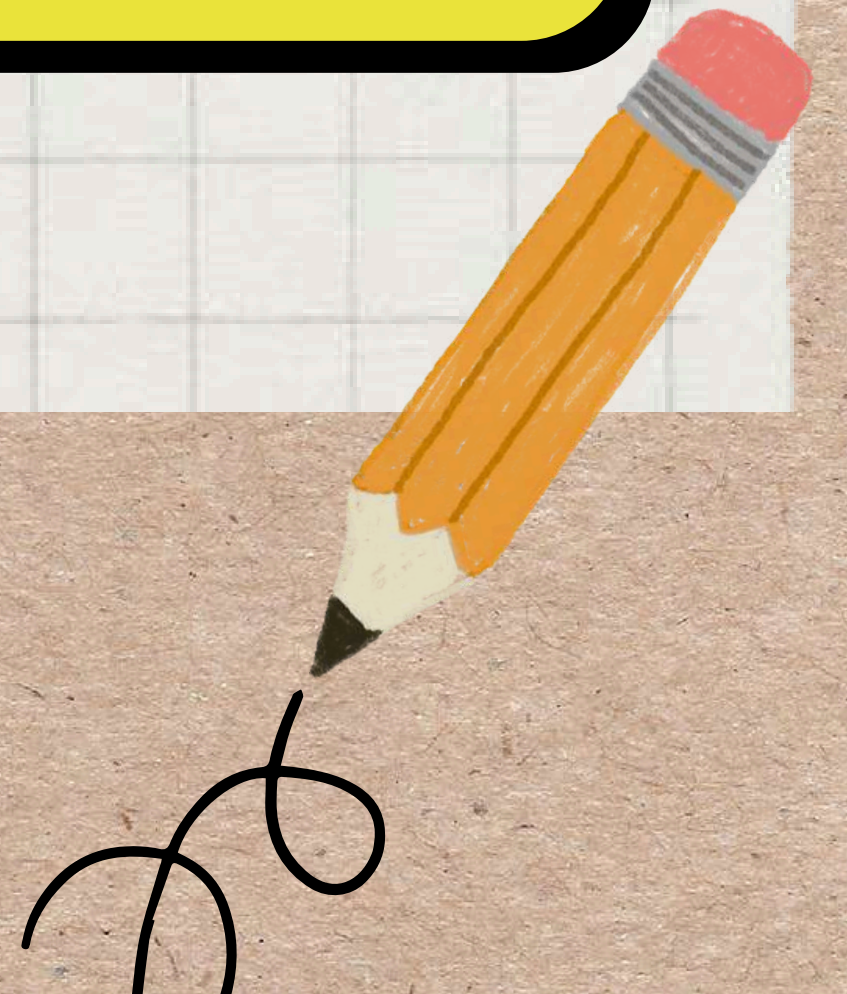
11. מצאו את 4 האיברים הראשונים בסדרה המוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:

$$א. \quad a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad a_1 = -3 \quad \text{ב.} \quad a_{n+1} = a_n + 2, \quad a_1 = 4$$



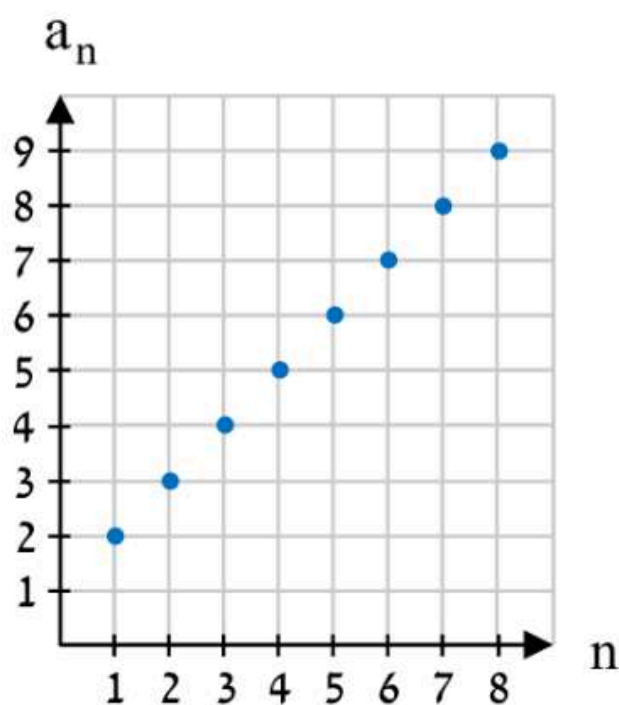


כעת נוכל לפתור את תרגילים 12-16 בעמודים 132-133.



ייצוג גרפי של סדרה

17. האיברים הראשונים של סדרה אינסופית מוצגים כנקודות בגרף בדיד במערכת הצירים שלפניכם.



א. הסבירו מה מייצג כל אחד מהצירים.

ב. מצאו את שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ג. הניחו שהחוקיות ממשיכה לכל n טבעי:

1. כתבו ייצוג מילולי אפשרי לסדרה זו.

2. קבעו איזו מהנוסחאות היא נוסחת האיבר הכללי של הסדרה:

i. $a_n = 2n + 2$ ii. $a_n = n + 1$ iii. $a_n = 2n$

ד. מדוע בייצוג הגרפי מופיעות נקודות ולא קו רציף? הסבירו.

ה. אחד מארבעת כללי הנסיגה שלפניכם מגדיר את הסדרה לכל n טבעי. קבעו מהו הכלל המתאים:

ii. $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 1$

i. $a_{n+1} = a_n + 1$, $a_1 = 1$

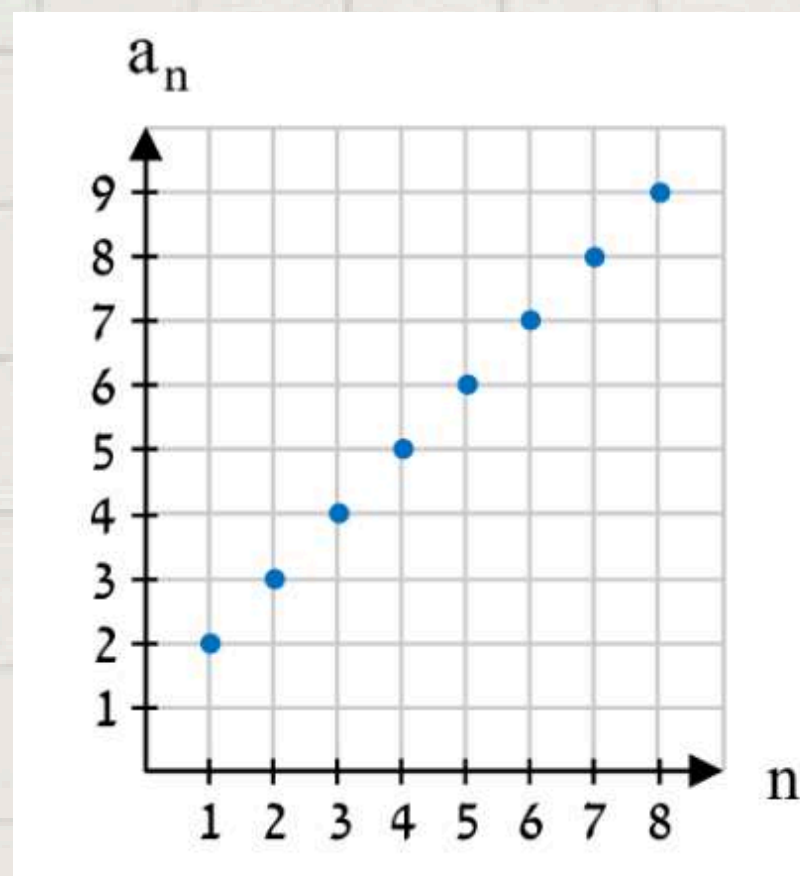
iv. $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 2$

iii. $a_{n+1} = a_n + 1$, $a_1 = 2$





ייצוג גרפי של סדרה

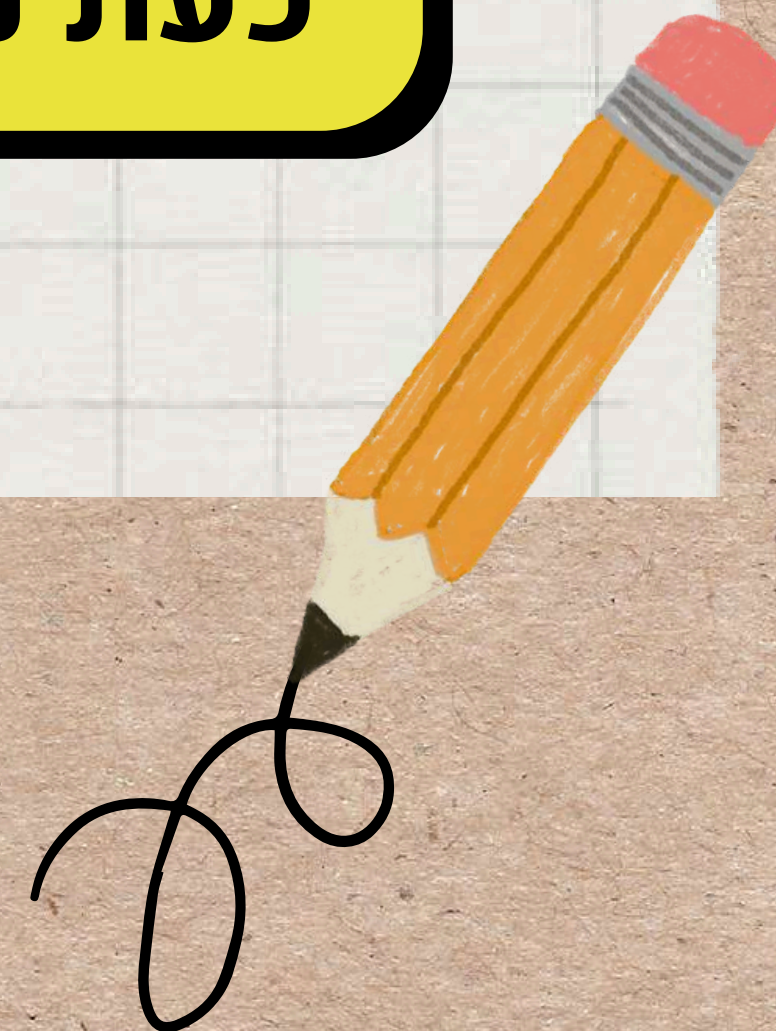


בשאלה הקודמת עסקנו בייצוג גרפי של סדרה.
ציר ה-x מייצג את המיקום הסידורי n של האיבר.
ציר ה-y מייצג את ערכו של האיבר.

רק ערכי n **טבעיים** יכולים לייצג מיקום סידורי של איבר. כלומר, רק עבור ערכי x טבעיים מתקבל ערך y המייצג איבר בסדרה, וכך מתקבל גרף נקודות הנקרא **גרף בדיד**. ערכי ה- x הם למעשה ערכי ה- n .



כעת נוכל לפתור את תרגילים 18-19 בעמוד 134.





למרחב ההוראה לחצו כאן

במרחב ההוראה מאות דפי תרגול, וביניהם בחינות מתכונת. המרחב מיועד לצוותי הוראה במוסדות לימוד אשר רכשו את הספר.



למי לפנות?

לשאלות לארכימדס:

במספר 050-9074007 של הוצאת ארכימדס

להזמנות מרוכזות - פונים ל- "יש הפצות":

טלפון 03-5595354 או וואטסאפ 054-7154211