الفصل 11 - مثلّثات خاصّة

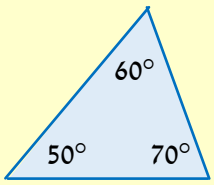
نفتَتِح الموضوع بتذكير حول أنواع المثلّثات التي تعرّفنا إليها في دراسة الرياضيّات.

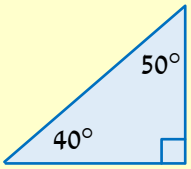
تصنيف المثلّثات حسب الزوايا

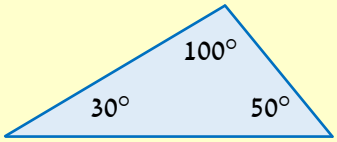
مثلّث حادّ الزوايا هو مثلّث كلّ زواياه حادّة.

مثلّث قائم الزاوية هو مثلّث فيه زاوية قائمة واحدة وزاويتان حادّتان.

مثلّث مُنفرج الزاوية هو مثلّث فيه زاوية مُنفرجة واحدة وزاويتان حادّتان.





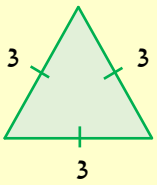


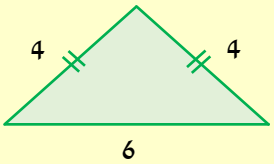
تصنيف المثلّثات حسب الأضلاع.

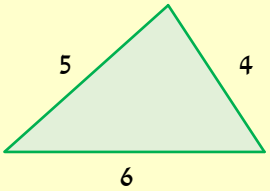
مثلّث متساوي الأضلاع هو مثلّث فيه **الأضلاع الثلاثة** متساوية في الطول.

مثلّث متساوي الساقين هو مثلّث فيه **ضلعان متساويان** في الطول.

مثلّث مختلف الأضلاع هو مثلّث لكلّ ضلع فيه طول مختلف عن باقي الأضلاع.







عندما توجد في المضلّع أضلاع متساوية، من المتّبع الإشارة إليها بإضافة علامات. في الرسوم أعلاه للمثلّث متساوي الأضلاع وللمثلّث متساوي الساقين، أضفنا علامات بواسطة خطوط على الأضلاع المتساوية.
نحرص على الإشارة إلى الأضلاع المتساوية بإضافة عدد متساوٍ من الخطوط حسب اختيارنا، لكلّ ضلع.

1. هل المثلّث متساوي الأضلاع هو أحد أنواع المثلّثات متساوية الساقَيْن؟ اشرحوا.

2. أمامكم أطوال الأضلاع في ستّة مثلّثات:

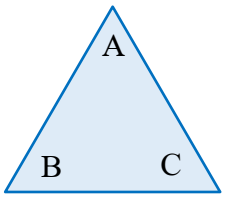
المثلّث أ: 5 سم، 7 سم، 5 سم
المثلّث ب: 8 سم، 9 سم، 7 سم
المثلّث ج: 4 سم، 4 سم، 4 سم
المثلّث د: 6 سم، 4 سم، 6 سم
المثلّث ه: 5 سم، 5 سم، 5 سم
المثلّث و: 6 سم، 8 سم، 5 سم

حدّدوا أيّ المثلّثات: أ. متساوية الساقين ب. متساوية الأضلاع جـ. مختلفة الأضلاع

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

المثلّث المُتساوي الأضلاع

3. قُصّوا بدقّة المثلّث متساوي الأضلاع من كُرّاسة اللوازم لأرخميدس.



أ. اطووه بحيث ينطبق الضلعان AB وَ AC أحدهما على الآخر. هل $\measuredangle B = \measuredangle C$ ؟

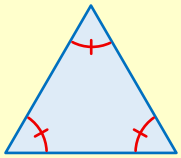
ب. اطووه بحيث ينطبق الضلعان AB وَ BC أحدهما على الآخر. هل $\measuredangle A = \measuredangle C$ ؟

جـ. أيّ خاصّيّة لزوايا المثلّث متساوي الأضلاع تُستنتج من هذه التجربة؟

د. قُصّوا مثلّثًا آخر متساوي الأضلاع، وافحصوا ما إذا كانت هذه الخاصّيّة تتحقّق.

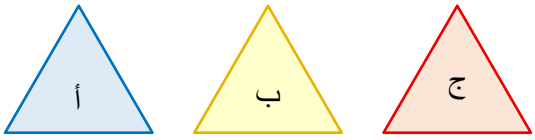
في التجربة العمليّة وجدنا **أنّه في المثلّث متساوي الأضلاع الزوايا الثلاث متساوية**.

في هذه المرحلة استنتجنا ما يتعلّق بهذه الخاصّيّة بمساعدة مثلّثات ذات قياسات مختلفة، ولكن هناك حاجة إلى برهان عامّ لجميع المثلّثات متساوية الأضلاع. سنبرهن ذلك لاحقًا في دراسة الرياضيّات.



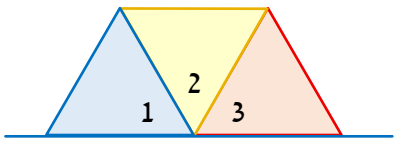
في الهندسة، من المتّبع الإشارة في الرسم إلى الزوايا المتساوية للمُضلّع، عن طريق إضافة علامات متطابقة للزوايا المتساوية. في رسم المثلّث متساوي الأضلاع من اليسار، أضفنا قطعة قصيرة على كلّ واحدة من زوايا المثلّث، ومعنى العلامة هو أنّ الزوايا الثلاث متساوية. نحرص على الإشارة إلى الزوايا المتساوية، بإضافة عدد متطابق من القِطَع حسب اختيارنا، لكلّ زاوية.

4. قُصّوا بدقّة مثلّثات متساوية الأضلاع ومُتطابقة من كُرّاسة اللوازم لأرخميدس.

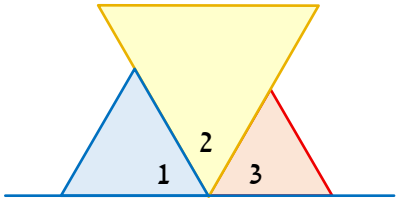


أ. ضعوا المثلّثات على امتداد قطعة مستقيمة، كما هو موصوف في الرّسم.

1. هل الزوايا المرقّمة متساوية؟ ما هو مجموعها؟
2. ماذا يمكن الاستنتاج عن مقدار كلّ زاوية؟ افحصوا بمساعدة المنقلة.

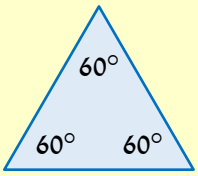


ب. قصّوا ثلاثة مثلّثات متساوية الأضلاع بأطوال أضلاع مختلفة.
ضعوها على امتداد خطّ مستقيم وافحصوا ما إذا كانت إجابتكم عن البند السابق صحيحة أيضًا، عندما تكون أطوال الأضلاع المثلثات مختلفة.



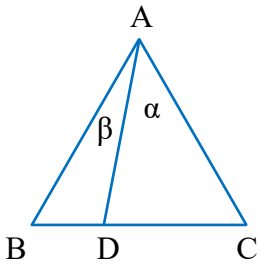
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

في السؤال السابق وجدنا أنّه **في المثلّث متساوي الأضلاع مقدار كلّ زاوية هو 60°.**



في المثلّث متساوي الأضلاع الظاهر إلى اليسار يظهر مقدار الزوايا. في هذه المرحلة استنتجنا ما يتعلّق بهذه الخاصّيّة بمساعدة مثلّثات بقياسات مختلفة، ولكن هناك حاجة إلى برهان عامّ لجميع المثلّثات متساوية الأضلاع. سنبرهن ذلك لاحقًا في دراسة الرياضيّات.

5. في المثلّث متساوي الأضلاع ΔABC تقع النقطة D على الضلع BC.

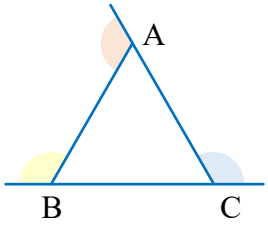


أ. ما هو مقدار الزاوية $\sphericalangle BAC$؟

ب. مُعطى: $\alpha = 40°$. جدوا β.

جـ. اقترحوا مقدارًا لـ α **من اختياركم** يختلف عن البند السابق، واحسبوا مقدار الزاوية β الملائم.

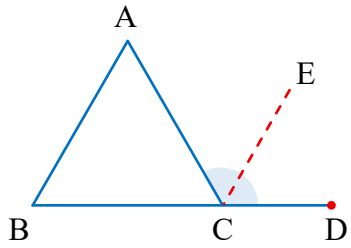
6. معطى المثلّث متساوي الأضلاع ΔABC. لكلّ زاوية من زواياه مُشار إلى زاوية مجاورة.



ادَّعت كارين: "الزوايا المجاورة الملوّنة متساوية فيما بينها".

هل هي محِقّة؟ ما هو مقدارها؟

7. مُعطى المُثلّث المتساوي الأضلاع ΔABC. مدّوا الضلع BC على استقامته من جهة الرأس C حتّى النقطة D. القطعة CE تُنصّف $\sphericalangle ACD$.

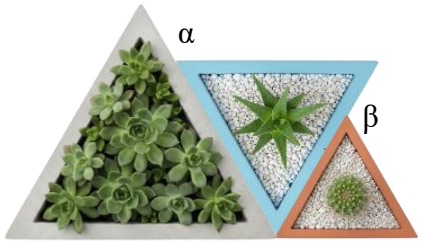


أ. احسبوا مقدار $\sphericalangle ACE$.

ب. ادَّعَت رَغد: "الضلع AC ينصّف $\sphericalangle BCE$".

هل هي محِقّة؟ علّلوا.

8. أمامكم ثلاثة أُصُص على شكل مثلّثات متساوية الأضلاع، وُضِعَت متجاورة بجانب بعضها بعضًا.



جدوا α وَ β.

9. حدّدوا بالنسبة لكلّ ادّعاء ممّا يلي ما إذا كان صحيحًا أم خطأً:

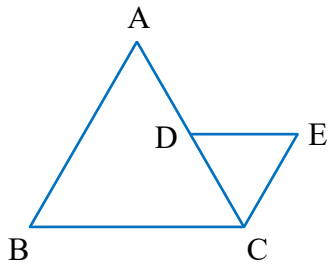
i. كلّ مثلّث متساوي الأضلاع هو حادّ الزوايا.

ii. كلّ مثلّث حادّ الزوايا هو متساوي الأضلاع.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

تذكير! مُحيط المثلّث هو مجموع أطوال أضلاع المثلّث.

10. المُثلّثان ΔABC وَ ΔCDE متساويا الأضلاع.



أ. جِدوا في الرسم زاويتين حادّتين متساويتين.

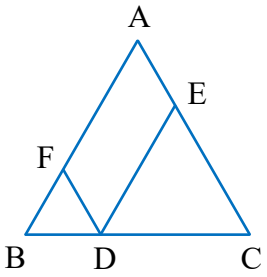
ب. جِدوا في الرسم زاويتين منفرجتين متساويتين.

جـ. مُحيط ΔCDE هو 6 سم. النقطة D هي منتصف الضلع AC.

احسبوا طول الضلع: 1. CD. 2. AC.

د. احسبوا مُحيط المُخمّس ABCED.

11. تقع النقاط D، E، وَ F على أضلاع المثلّث متساوي الأضلاع ΔABC، كما هو مبيّن في الرسم. المثلّثان ΔBDF وَ ΔCDE متساويا الأضلاع.

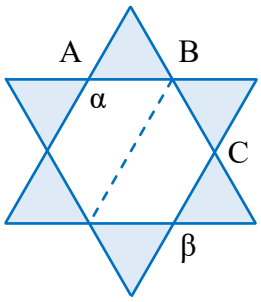


أ. احسبوا مقدار $\sphericalangle EDF$.

ب. مُعطى: 2 سم $= BD$. مُحيط ΔABC هو 18 سم. احسبوا:

1. طول الضلع CE. 2. مُحيط الشكل الرباعيّ AEDF.

12. أمامكم رسم لنجمة داود المُكوّنة من مثلّثين متساويي الأضلاع مُتطابقين، بحيث تنتج المثلّثات الزرقاء الستّة وهي مُتطابقة فيما بينها ومتساوية الأضلاع.



أ. جِدوا α وَ β.

ب. القطعة المتقطّعة تُنصّف $\sphericalangle ABC$.

احسبوا مقدار الزاوية التي بينها وبين القطعة AB.

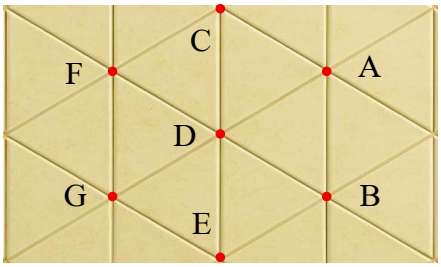
ما هي القبّة الجيوديزيّة؟ (القبّة الهندسيّة المضلّعة)

القبّة الجيوديزيّة هي مبنى يُشبه نصف الكرة، يُبنى من مثلّثات صغيرة متّصلة ببعضها البعض. تُستخدَم لبناء مبانٍ قويّة، خفيفة ورخيصة مثل الدفيئات، الخيام وحتّى البيوت. المثلّث متساوي الأضلاع هو شكل فعّال لبناء قباب كهذه، لأنّه يتيح بناء مبنى مستقرّ بشكل خاصّ، يتوزّع فيه الحِمل بالتساوي. كلّما كان المبنى مكوّنًا من عدد أكبر من المثلّثات متساوية الأضلاع، اقترب شكله أكثر من شكل نصف الكرة.



© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

13. أمامكم جزء من جدار سيراميك فيه كلّ البلاطات متطابقة وشكلها مثلّث متساوي الأضلاع.



أ. جدوا في الرسم زاويتين مقدارهما: 1. 60° 2. 120°

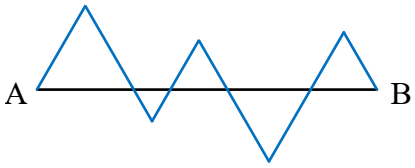
ب. جدوا شكلًا رباعيًّا يظهر في الرسم واكتبوا ما هي مقادير زواياه.

جـ. جدوا في الرسم قطعة تُنصِّف زاوية. سجّلوا اسم القطعة واسم الزاوية.

د. ادّعى شادي: "يوجد في الجدار عدد من أزواج الزوايا المتقابلة بالرأس وكلّها بمقدار 60°."
هل هو محِقّ؟ اشرحوا.

هـ. ادّعت حنين: "يوجد في الجدار عدد من أزواج الزوايا المتجاورة. في كلّ زوج إحدى الزاويتين تُساوي ضعف الزاوية الثانية". هل هي مُحِقَّة؟ اشرحوا.

14. (*) في الرسم الذي أمامكم القطعة AB تَتَقَاطع مع قطع زرقاء، بحيث تكون كلّ المثلّثات الناتجة متساوية الأضلاع.
معطى: AB = 7 سم . احسبوا مجموع أطوال القطع الزرقاء.



إجابات:

1) نعم. في المثلّث متساوي الأضلاع، الأضلاع الثلاثة متساوية فيما بينها، وبشكل خاصّ ضلعان من أضلاعه متساويان، ولذلك فهو متساوي الساقين. **2) أ.** "أ"، "ج"، "د"، "ه". **ب.** "ج"، "ه". **جـ.** "ب"، "و".

3) أ. نعم. **ب.** نعم. **جـ.** في المثلّث متساوي الأضلاع كلّ الزوايا متساوية فيما بينها. **د.** الخاصّيّة تتحقّق.

4) أ. 1. نعم، المجموع 180°. **2.** جميعها بمقدار 60°. **ب.** نعم.

5) أ. 60°. **ب.** 20°. **جـ.** إجابات مُمكنة: $\alpha = 45°$ وَ $\beta = 15°$؛ $\alpha = 50°$ وَ $\beta = 10°$.

6) كارين مُحِقّة. مقدارها 120°. **7) أ.** 60°. **ب.** رَغِدْ مُحِقّ. يتحقّق: $\measuredangle ACB = \measuredangle ACE = 60°$.

8) $\alpha = 120°$، $\beta = 120°$. **9) i.** صحيح. **ii.** خاطئ.

10) أ. كلّ الزوايا التالية مقدارها 60°، ولذلك فهي حادّة ومتساوية: $\measuredangle B$، $\measuredangle A$، $\measuredangle CDE$، $\measuredangle ACB$، $\measuredangle DCE$، $\measuredangle E$. **ب.** $\measuredangle ADE = \measuredangle BCE$. **جـ. 1.** 2 سم. **2.** 4 سم. **د.** 14 سم.

11) أ. 60°. **ب. 1.** 4 سم. **2.** 12 سم. **12) أ.** $\alpha = 120°$، $\beta = 120°$. **ب.** 60°.

13) أ. إجابات مُمكنة: **1.** $\measuredangle ABD$ وَ $\measuredangle FGD$. **2.** $\measuredangle CAB$ وَ $\measuredangle CDG$.

ب. إجابات مُمكنة: ABDC- 60°، 120°، 60°، 120°؛ ACFB - 60°، 60°، 120°، 120°.

جـ. إجابات مُمكنة: AD مُنصّف الزاوية $\measuredangle BAC$؛ DG مُنصّف الزاوية $\measuredangle EGF$.

د. شادي مخطئ. على سبيل المثال، الزاويتان المتقابلتان بالرأس $\measuredangle ADF$ وَ $\measuredangle BDG$ مقدارهما 120°.

هـ. حنين مُحِقَّة. كلّ زوج يتكوّن من زاوية بمقدار 60° وزاوية بمقدار 120°. **14)** 14 سم.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

المُثلّث المتساوي السّاقين

المثلّث المتساوي الساقين هو مثلّث فيه ضلعان متساويان فيما بينهما.



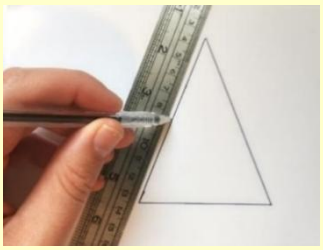
الضلعان المتساويان في الطول يُسمَّيَان **ساقين**.
الضلع الثالث في المثلّث يُسمَّى **قاعدة**.

الزوايا المحصورة بين ساق وقاعدة تُسمَّى **زوايا القاعدة**.
الزاوية المحصورة بين الساقين والمقابلة للقاعدة، تُسمَّى **زاوية الرأس**.

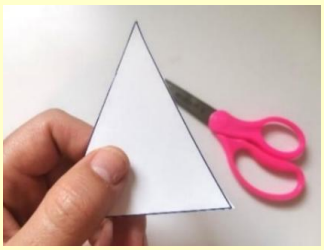
نُشير إلى أنّ المثلّث متساوي الأضلاع هو نوع من المثلّث متساوي الساقين، تكون فيه الأضلاع الثلاثة متساوية فيما بينها.

سنعرض الآن خاصّيّة مهمّة للمثلّث متساوي الساقين، بالاستعانة بتجربة عمليّة محسوسة:

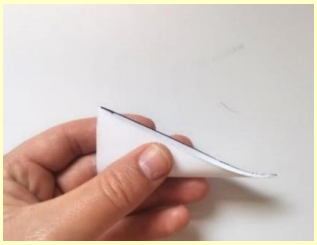
1. استعينوا بمسطرة وارسموا مثلّثًا متساوي الساقين بدقّة.



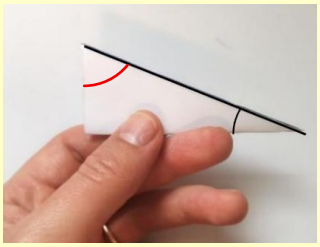
2. قُصّوا المُثلّث.



3. اطووا الساقين بحيث تنطبق إحداهما على الأخرى بدقّة.



4. تأمّلوا زاويتي القاعدة المنطبقتين إحداهما على الأخرى، ماذا يُمكنكم أن تستنتجوا بشأنهما؟



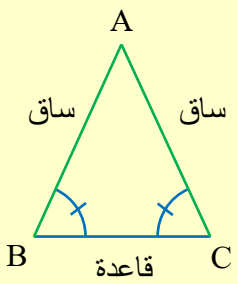
أعيدوا التجربة مع مثلّث **آخر** متساوي الساقين.
هل تحقّقت الخاصّيّة التي استنتجتموها؟

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

ماذا يُمكننا أن نستنتج من التجربة العمليّة؟

في التجربة المحسوسة وجدنا خاصّيّة مهمّة للمثلّث متساوي الساقين:

في المثلّث متساوي السّاقين مقابل السّاقين المتساويتين تقع زاويتان متساويتان.



سنُوضّح ذلك بالاستعانة بالمثلّث متساوي الساقين من اليسار والذي فيه: $AC = AB$.

في هذا المثلّث يتحقّق: $\sphericalangle B = \sphericalangle C$.

في هذه المرحلة استنتجنا ما يتعلّق بهذه الخاصّيّة بالاستعانة بمثلّثات بقياسات مختلفة، ولكن توجد حاجة إلى برهان عامّ لكلّ المثلّثات متساوية السّاقين.

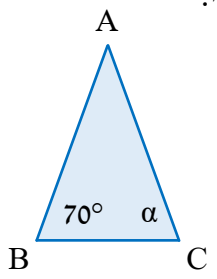
سنُبرهن ذلك لاحقًا في تتمّة دراستنا للرياضيّات.

يظهر من اليسار رابط لفعّاليّة رقميّة يظهر فيها المثلّث متساوي الساقين ΔABC والذي فيه $AC = AB$.

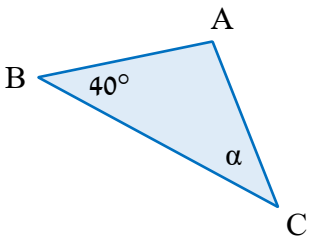
عندما تحرّكون الرأسين B وَ C، ستبقى الساقان متساويتين. حرّكوا هذين الرأسين عدّة مرّات وبعد كلّ تحريك افحصوا ما هو مقدار الزاويتين $\sphericalangle B$ وَ $\sphericalangle C$.

1. أمامكم مثلّثات متساوية الساقين فيها: $AC = AB$. جدوا قيمة α:

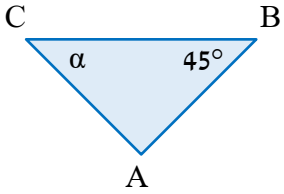
أ.



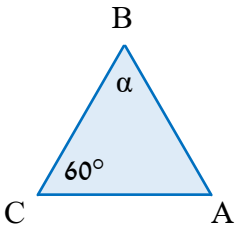
ب.



جـ.



د.



2. مُعطى مثلّث متساوي الساقين. أيّ من الإجابات التالية تُعرض فيها زوايا يُمكن أن تكون زواياه الثلاث؟

i. 45°، 45°، 90° ii. 50°، 60°، 70° iii. 56°، 65°، 59° iv. 10°، 160°، 10°.

3. اكتبوا سؤالًا **من عندكم** يُشبه السؤال السابق.

4. اكتبوا أطوال أضلاع مثلّث متساوي الساقين يمكنكم إنشاؤه:

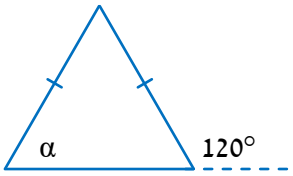
أ. بالاستعانة بخيط طوله 40 سم، إذا كان معطى أنّ طول قاعدته هو 10 سم.

ب. بالاستعانة بخيط طوله 105 سم، إذا كان معطى أنّ طول إحدى ساقيه هو 45 سم.

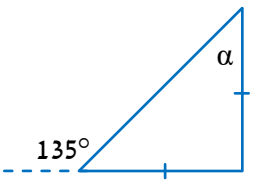
© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

5. يظهر في كلّ بند مثلّث متساوي الساقين وزاوية مجاورة لإحدى زواياه. جِدوا قيمة α:

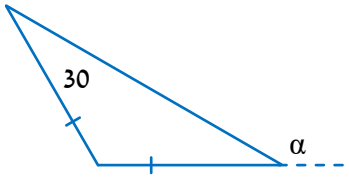
أ.



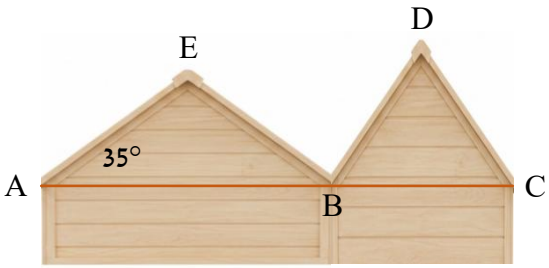
ب.



جـ.



6. يُوضَع في الدكّان نموذجان من برجِ الحمام. من الجهة الخلفيّة يظهر كلّ نموذج كشكل مكوَّن من مثلّث وتحته مستطيل.



ΔBCD هو مثلّث متساوي الأضلاع.

ΔABE هو مثلّث متساوي الساقين ($AE = BE$).

مُعطى: $\sphericalangle BAE = 35°$. احسبوا مقدار الزاوية:

أ. $\sphericalangle ABE$ ب. $\sphericalangle CBD$ جـ. $\sphericalangle DBE$

7. أمامكم رسم تخطيطيّ لعلَم دولة غيانا الواقعة في أمريكا الجنوبيّة.



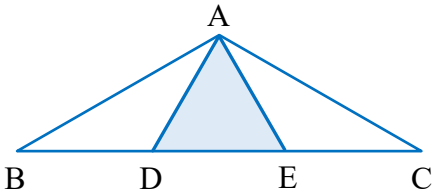
الضلع AB مشترك بين المثلّث متساوي الأضلاع ΔABD

وبين المثلّث متساوي السّاقين ΔABC ($AC = BC$).

مُعطى: $\sphericalangle CBD = 15°$. احسبوا مقدار الزاوية:

أ. $\sphericalangle ABC$ ب. $\sphericalangle BAC$

8. في المثلّث متساوي السّاقين ΔABC ($AB = AC$) النقطتان D وَ E تقعان على القاعدة BC. ΔADE هو متساوي الأضلاع.

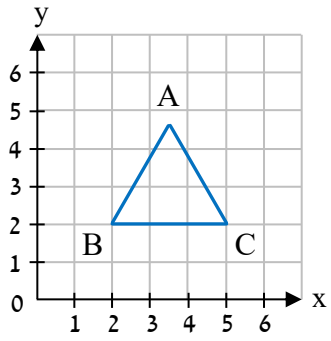


أ. احسبوا مقدار $\sphericalangle ADB$.

ب. معطى: $\sphericalangle ACE = 30°$ ، $BD = AD$. احسبوا مقدار:

1. $\sphericalangle ABD$ 2. $\sphericalangle BAD$

9. أمامكم ΔABC في هيئة المحاور.



مُعطى $AB = 3$ ، $AC = 3$.

ادّعت شيرين: "ΔABC هو مثلّث متساوي الساقين."

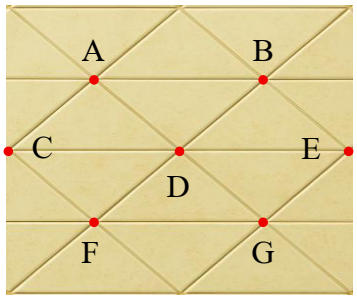
ادّعت ليان: "ΔABC هو مثلّث متساوي الأضلاع."

أ. حدّدوا بالنسبة لكلّ تلميذة، ما إذا كانت على حقّ. اشرحوا.

ب. ما هو مقدار كلّ زاوية من زوايا المثلّث؟

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون

10. أمامكم جزء من جدار سيراميك جميع بلاطاته متطابقة، وشكلُها مثلّث متساوي الساقين. جميع القطع المستقيمة الأفقيّة، مثل AB وَ CD، هي قواعِد مثلّثات متساوية الساقين. جميع القطع المستقيمة المائلة، مثل AC وَ AD، هي السيقان المتساوية في المثلّثات.



مُعطى: $\sphericalangle ACD = 40°$.

أ. احسبوا مقدار الزاوية:

1. $\sphericalangle ADC$ 2. $\sphericalangle ADE$ 3. $\sphericalangle BDE$ 4. $\sphericalangle ADB$

ب. جِدوا في الرسم زاويتين مقدار كلّ منهما: 1. 40° 2. 100° 3. 140°

ادخلوا إلى المسابقة الصفّيّة الظّاهرة على اليسار:





إجابات:

1) أ. 70° ب. 40° جـ. 45° د. 60°.

2) i، iv.

4) أ. 10 سم، 15 سم، 15 سم. ب. 15 سم، 45 سم، 45 سم.

5) أ. 60° ب. 45° جـ. 150°.

6) أ. 35° ب. 60° جـ. 85°.

7) أ. 75° ب. 75°.

8) أ. 120° ب. **1.** 30° **2.** 30°.

9) أ. شيرين على حقّ. المثلّث الذي فيه ضلعان متساويان هو مثلّث متساوي الساقين؛ ليان على حقّ. أضلاع المثلّث الثلاثة متساوية، ولذلك فهو مثلّث متساوي الأضلاع. ب. $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$.

10) أ. **1.** 40° **2.** 140° **3.** 40° **4.** 100°. ب. إجابات مُمكنة: **1.** $\sphericalangle CDF$، $\sphericalangle DGF$، $\sphericalangle ABD$. **2.** $\sphericalangle CAD$، $\sphericalangle FDG$، $\sphericalangle DGE$. **3.** $\sphericalangle EGF$، $\sphericalangle BDC$، $\sphericalangle CAB$.

© جميع حقوق الطبع محفوظة **لإصدار أرخميدس**– تصوير أو نسخ من هذا الكتاب يُعدّ مُخالفًا للقانون